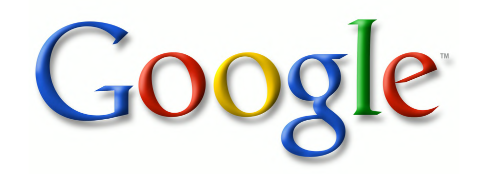
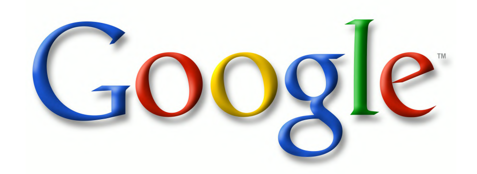
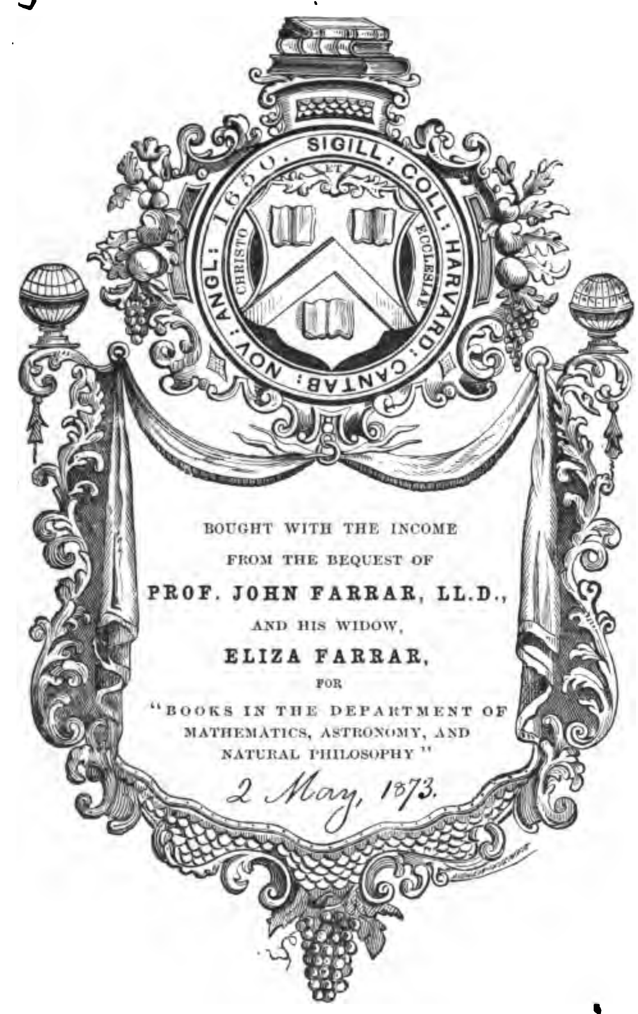







SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
2 May, 1873.



LEHRBUCH

DER

PHYSIKALISCHEN MECHANIK.

Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

LEHRBUCH

DER

PHYSIKALISCHEN MECHANIK

VON

DR. HEINRICH BUFF,

Professor der Physik an der Universität Giessen.

IN ZWEI THEILEN.

MIT ZAHLREICHEN IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

ERSTER THEIL.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1871.

VORREDE.

Der Verfasser des vorliegenden Werkes ist in der Bearbeitung desselben von dem in den meisten Lehrbüchern der Mechanik adoptirten rein mathematischen Entwicklungsgange darin abgewichen, dass er auf die ausführliche Erörterung mechanischer Grundbegriffe, wie die von Ruhe und Bewegung, von Masse und Kraft, von Druck und Gegendruck, von Trägheit, Arbeit u. a. m., welche nicht mathematisch ableitbar, sondern der Physik, also der Erfahrung entlehnt sind, einen grössern Nachdruck gelegt hat, als dieses sonst wohl zu geschehen pflegt.

Seine vieljährigen Erfahrungen als Docent haben ihn belehrt, dass der Vortrag der Mechanik, gestützt auf eine möglichst eingehende Erläuterung jener Grundbegriffe, sich nicht nur ungemein vereinfachen lässt, sondern dass auch auf diesem Wege die wichtigsten Lehrsätze selbst solchen Studirenden verständlich gemacht werden können, denen eine mathematische Vorbildung von weiterm Umfange, als jedes gut geleitete Gymnasium sie bieten kann, entgeht.

Es dürfte hierauf gerade in der Gegenwart um so mehr Wichtigkeit zu legen sein, da die Mechanik nicht mehr, fast ausschliesslich nur als die wissenschaftliche Grundlage der Physik, der Astronomie, der Architektur, des Ingenieurwesens eine grosse Bedeutung hat, sondern ihren Einfluss in den verschiedensten Zweigen der Technik zur Geltung gebracht hat, und dadurch ein wichtiges wenn nicht unentbehrliches Hülfsmittel des Studiums für einen grossen

Theil der gebildeten Gesellschaft geworden ist. Um nicht von dem mechanischen Fabrikwesen und von der Kriegskunst zu sprechen; auch der chemische Techniker kann gegenwärtig gründliche mechanische Kenntnisse nicht mehr entbehren, wie dies von vielen Chemikern, nachdem sie ihre Thätigkeit der chemischen Industrie bereits gewidmet hatten, leider zu spät erkannt worden ist.

Der Nutzen, welchen ein durch das Studium der Mechanik gebildetes Urtheil für den Anatomen und Physiologen haben könne, ist zwar schon von dem alten Borelli gezeigt, seitdem aber nur wenig beachtet worden, bis erst in der neuesten Zeit einsichtsvolle Fachmänner ihrer gründlichen Ausbildung in der Mechanik die glänzendsten Erfolge zu verdanken hatten.

Bei der von dem Verfasser gewählten Form der Darstellung hat ihn der Gedanke geleitet, dass der grössere Werth eines Lehrbuches nicht sowohl darauf beruht, dass es seinen Lesern eine möglichst grosse Summe von Thatsachen vorführt, als vielmehr in einer Behandlungsweise, welche dahin zielt, die Aufmerksamkeit, das Nachdenken, die Selbstthätigkeit des Studirenden anzuregen und zu fesseln.

Eigene Anstrengung darf ihm nicht erlassen werden; nicht ohne Mühe und geistige Arbeit soll er sich erwerben, was dieses Buch ihm bieten kann. Denn nur dadurch kann sein Interesse geweckt und dauernd erhalten werden; nur dann werden die aufgesammelten Kenntnisse einen wirklichen Gewinn für ihn bilden, nicht bloss zur Stärkung des Gedächtnisses dienen, sondern ein Fortschreiten zu tieferer Erkenntniss bezeichnen.

Die Lehrsätze der Mechanik, welche bestimmt sind, den leitenden Faden der Darstellung zu bilden, suchte der Verfasser, wo irgend thunlich, in elementarer Weise zu entwickeln, und es liess sich dies, ohne die Gründlichkeit zu verletzen, in den meisten Fällen durchführen.

Bei den zahlreichen Anwendungen auf Gegenstände der Naturwissenschaft und Technik, welche theils dazu dienen, als erläuternde Beispiele den Lehrsätzen sich anzuschliessen, theils aber auch den Zweck haben, den in so überaus mannichfaltiger Weise hervortretenden Nutzen mechanischer Kenntnisse zur Anschauung zu bringen, bemühte sich der Verfasser zwar stets, die fasslichsten Erklärungswege aufzusuchen, indessen die Anwendung einfacher Regeln der

Infinitesimalrechnung wurde dabei gleichwohl nicht umgangen, wenn die Darstellung dadurch an Einfachheit und Durchsichtigkeit gewann. Der mit dieser Rechnungsweise nicht vertraute Leser wird sich daher hier und da mit den gewonnenen Resultaten begnügen müssen, ohne die Richtigkeit ihres Nachweises prüfen zu können. Mancher dürfte aber auch dadurch angeregt werden, in der Erweiterung seiner mathematischen Kenntnisse Befriedigung und Belohnung zu suchen.

In den übrigens nicht sehr zahlreichen Fällen, in welchen die Anwendung von Differentialgleichungen nöthig erschien, sind dieselben, wie sich von selbst versteht, vollständig entwickelt und begründet worden. Eine ausführliche Erörterung der aus denselben hervorgehenden, meist überdies leicht abzuleitenden Integralwerthe wurde jedoch unterlassen; theils aus Gründen der Kürze und Raumersparung, theils weil man voraussetzte, dass derjenige, welcher sich in der Mathematik zu unterrichten beabsichtigt, dazu ein Werk der physikalischen Mechanik nicht wählen wird. Bezüglich der Richtigkeit der mitgetheilten Resultate kann dadurch bei dem wissbegierigen Leser nie eine Ungewissheit entstehen, weil er es jeder Zeit in der Hand hat, durch Umkehrung der Rechnung die Wahrheit einer Angabe zu controlliren.

INHALT DES ERSTEN THEILES.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Dritter Abschnitt.

Vierter Abschnitt.

Fünfter Abschnitt.

Sechster Abschnitt.

Siebenter Abschnitt.

Achter Abschnitt.

Neunter Abschnitt.

Zehnter Abschnitt.

Elfter Abschnitt.

Zwölfter Abschnitt.

Dreizehnter Abschnitt.

Erster Abschnitt.

Die Zustände von Ruhe und von Bewegung.

Die Begriffe von Ruhe und Bewegung nach der Auffassungsweise des gewöhnlichen Lebens bedeuten Gegensätze. Man bezeichnet einen Körper als ruhend, wenn er nach dem Urtheile des Auges seine Lage unverändert beibehält, als bewegt dagegen, wenn er dieselbe stetig verändert. Ein Wagen z. B., während er sich von einer gewissen Stelle entfernt, ist in Bewegung. Bleibt aber sein Abstand von den ihn umgebenden Gegenständen unverändert, so sagt man: er befinde sich in Ruhe. Eine schärfere Erwägung lässt jedoch erkennen, dass jene Begriffe, auf wirkliche Vorgänge angewendet, in der That nur Unterschiede ausdrücken. So sprechen wir von einem ruhenden Gegenstande auf einem Schiffe, während dieses doch, und folglich Alles was sich darauf befindet, mit ihm fortschreitet. Einen Körper dagegen, der auf dem Verdecke des Schiffes rückwärts schreitet, mit einer Schnelligkeit, welche derjenigen des Schiffes gleichkommt, nennen wir in Bewegung, obschon seine Lage, auf irgend Punkte des Ufers bezogen, unverändert bleibt. — Der Schiffer auf einem Kahne, wenn ihm dichte Nebel die benachbarten Ufer verbergen, könnte, wenn schon durch die Gewalt des Stromes mit Schnelligkeit fortgetrieben, dennoch wähnen, er weiche nicht von der Stelle, weil irgend andere schwimmende Körper, die er wahrnimmt, in immer gleicher Nähe zu dem Kahn verharren. Ebenso würde der Luftschiffer ohne die Beihülfe des Barometers häufig ausser Stande sein, zu beurtheilen, ob er steigt oder sinkt, und mit welcher Schnelligkeit diese Bewegung vor sich geht. 1

Unserm Urtheile über Ruhe- oder Bewegungszustände liegt immer eine Vergleichung zu Grunde, die Beziehung auf irgend Punkte, die man als ruhend voraussetzt. Ein wirklicher Ruhezustand findet sich aber nirgends in der Natur. Die Erde dreht sich um ihre Axe und um die Sonne. Alles Irdische nimmt Antheil an dieser Bewegung. Sämmtliche Planeten und Kometen unseres Sonnensystems, ja die Sonne selbst sind in unaufhaltsamem Fortschreiten begriffen. Bewegung ist also der natürliche Zustand der ganzen Körperwelt.

Das Wort Ruhe, wo immer wir es anwenden, kann nur beziehungsweise (relativ) eine Bedeutung haben. Ruhe, oder was wir gemeinhin so nennen, ist derjenige Bewegungszustand eines Körpers, den er mit anderen, mit welchen er in einer bestimmten Beziehung steht, in der Art theilt, dass ihre Entfernungen von einander unverändert bleiben. So pflegen wir Erdkörper als ruhend zu betrachten, so lange sie sich an dem allgemeinen Bewegungszustande der Erdtheile gleichmässig betheiligen; wir betrachten sie aber als in Bewegung (relativer Bewegung) befindlich, sobald ihr wirklicher Bewegungszustand von dem den Erdtheilen in ihrer Breite im Allgemeinen angehörenden abweicht.

2 Man bemerkt, dass die Bewegung eines Körpers nach irgend welcher Richtung mit gleicher Unabhängigkeit von der Umwälzung der Erde um ihre Axe und um die Sonne erfolgt. Aehnliches zeigt sich unter ähnlichen Bedingungen bei anderen Bewegungen. So fällt im Innern eines Eisenbahnwagens ein Stein, nach dem Urtheile des Zuschauers, in genau gleicher Weise, ob der Wagen steht oder fährt. Wird derselbe schwere Körper durch ein Fenster des Wagens geworfen, so stimmt die Bahn, welche er beschreibt, für den Beobachter im Innern aufs Täuschendste mit derjenigen überein, die sich beim Wurf von festem Standorte aus ergiebt. Aus derartigen Erfahrungen müssen wir schliessen, dass die Körper befähigt sind, an gleichzeitigen Bewegungen nach verschiedenen Richtungen mit gleicher Freiheit Antheil zu nehmen; und dass jede (relative) Bewegung so aufgefasst und untersucht werden darf, als wäre sie die ausschliesslich vorhandene.

3 Die Mechanik ist die Lehre der Bewegung. Ihre Aufgabe besteht in der Erforschung alles dessen, was die Bewegungen der Körper Bemerkenswerthes bieten.

4 Jeder Körper besteht aus einer Nebeneinanderlagerung zahlloser sehr kleiner Theile, der Atome oder physikalischen Punkte. Es ist sehr wohl denkbar, dass verschiedene Theile eines Körpers ungleiche Bewegungen besitzen. Der Bewegungszustand eines Körpers lässt sich daher genau nur aus der Kenntniss der Bewegungen seiner kleinsten Theile ableiten.

5 Diejenige Stelle im Raume, welche ein derartiger Punkt augenblicklich einnimmt, nennt man seinen Ort. Die Verbindungslinie sämmtlicher Orte eines Punktes während seiner Bewegung bildet seine Bahn. Dieselbe kann denkbarer Weise eine gerade oder auch eine krumme Linie sein, und zwar können in dem letztern Falle die verschiedenen Theile der Bahn in ein und derselben Ebene oder auch auf einer krummen Fläche liegen. So bewegen sich sämmtliche Punkte eines frei fal-

lenden Körpers nach geraden parallelen Linien. Ein Punkt am Umfange eines Mühlrades oder des Zeigers einer Uhr beschreibt einen Kreis. Auch die Linse des schwingenden Pendels einer Standuhr beschreibt ein Stück eines Kreisbogens. Ist aber ein Pendel nur an einem Punkte aufgehängt und dadurch nach allen Richtungen beweglich, und ist es in der Art in Bewegung gesetzt, dass es in sich selbst zurücklaufende Schwingungen vollendet, so entspricht die Bahn seiner Linse, allgemein gesprochen einer Curve mit doppelter Krümmung, deren sämmtliche Punkte auf einer Kugeloberfläche liegen, die den Abstand der Linse vom Aufhängepunkte zum Radius hat. Ein Punkt am Umfange eines Wagenrades beschreibt während der Drehung einen Kreis nur mit Beziehung auf die Radaxe als festen Punkt. Rollt aber das Rad der Eisenbahn entlang und wird die Bewegung jenes Punktes auf die Ausgangsstelle bezogen, so zeichnet derselbe eine weit zusammengesetztere Curve, die sogenannte Radlinie (Cykloide), deren verschiedene Punkte nur so lange in einer Ebene enthalten sind, als die Eisenbahn sich geradlinig erstreckt.

Die Natur lässt in den Bewegungserscheinungen, die der Beobachtung zugänglich sind, eine ausserordentlich grosse Mannichfaltigkeit der Formen erkennen; eine unendlich grössere Zahl noch könnte man sich als möglich denken.

6 Die scharfe Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume, sowie die seiner Bewegungsbahn ist wesentlich eine Aufgabe der Geometrie, deren Kenntniss schon aus diesem Grunde eine unentbehrliche Grundlage für mechanische Studien und Forschungen bildet.

Zweiter Abschnitt.

Bewegung im Raume und in der Zeit.

7 Der Begriff einer Bewegung im Raume ist aufs Innigste verwebt mit dem der Dauer. Wohl giebt es Bewegungen von äusserst geringer Dauer, wie die des Blitzes oder wie die der Kugel im Laufe einer Büchse; indessen eine Bewegung ohne Dauer ist völlig unfassbar für unsere Begriffe, weil ausserhalb der Gränzen unserer Erfahrungen liegend. Bedürfen doch selbst unsere Gedanken der Zeit, um sich durch ihre Leiter, die Nerven, in Handlungen zu verkörpern. Die Zeit ist das Maass für die Dauer einer Bewegung. Man sagt daher: Bewegungen gehen im Raume und in der Zeit vor sich. In dem einen wie in der andern zeigen sie ein stetiges Fortschreiten.

8 Das lineare Fortschreiten eines Punktes oder die Länge seiner Bahn wird durch das Längenmaass bestimmt, als dessen Einheit wir für dieses Buch vorzugsweise das Meter oder auch dessen Grundlage, den alten französischen Fuss, gewählt haben. Als Einheit der Zeit nehmen wir in der Regel die Secunde oder den 86 400sten Theil eines mittlern Sonnentags, d. h. des bürgerlichen Tags. Das Meter = 10 Decimeter = 100 Centimeter = 1000 Millimeter hat seine richtige Länge bei der Temperatur von 0^0. Bei jeder höhern Temperatur hat es eine grössere Länge. Die richtige Abmessung kann aber immer leicht mittelst der Formel

$$x = l\,(1 + \alpha t)$$

bestimmt werden, in welcher l die gefundene scheinbare Länge, t die Temperatur und α den Ausdehnungscoefficient des Stoffs, aus welchem das Maass geformt worden, bezogen auf die Temperatur von 0^0, vorstellt. Feine Maassstäbe, bei welchen eine Reduction auf die Temperatur nothwendig werden kann, werden aus Platin, Silber, Messing und Eisen verfertigt. Die Ausdehnungen der Längeneinheit dieser Stoffe für je 1^0 und bezogen auf das hunderttheilige Thermometer sind, für

Platin	0,00000857
Silber	0,00001909
Messing	0,00001890
Eisen	0,00001235

Der Pariser Fuss = 12 Zoll = 144 Linien hat seine richtige Länge bei 13^0 R. oder bei $16{,}25^0$ C.

Da ausser dem Meter und dem Pariser Fuss insbesondere noch der preussische und englische Fuss in zahlreichen wissenschaftlichen Schriften benutzt wird, so ist es unumgänglich, die Beziehungen dieser Maasse zu einander zu kennen. Sie finden sich in bequemer Weise in der folgenden kleinen Tabelle zusammengestellt:

Meter	Pariser Fuss	Preussische Fuss	Englische Fuss
1	3,078444 (0,4883313)	3,186199 (0,5032730)	3,280899 (0,5159930)
0,3248394 (0,5116687 — 1)	1	1,035003 (0,0149420)	1,065765 (0,0276620)
0,3138535 (0,4967270 — 1)	0,9661806 (0,9850583 — 1)	1	1,029722 (0,0127200)
0,3047945 (0,4840071 — 1)	0,9382928 (0,9723384 — 1)	0,9711361 (0,9872801 — 1)	1

Die eingeklammerten Zahlen sind die Logarithmen der darüber befindlichen Maasswerthe.

Der preussische und englische Fuss haben gleich dem Pariser Fusse ihre richtige Länge bei 16,25° C.

Der preussische Fuss zerfällt in 12 Zoll und 144 Linien; der englische Fuss in 12 Zoll und jeder Zoll in Zehntheile.

Für den Fall von Messungen mit kleineren Maassabtheilungen können noch die folgenden Beziehungen von Nutzen sein:

Eine Pariser Linie = 2,25583 Millimeter
(0,3533064).

Ein Millimeter = 0,443296 Pariser Linie
(0,6466938 — 1).

9 Es sei s das Maass der Wegeslänge, t dasjenige des zugehörenden Zeitabschnittes (in Secunden). Zwischen s und t sind unendlich viele Beziehungen denkbar; aber immer lassen sie sich unter eine der folgenden drei Abtheilungen bringen.

1) Raum und Zeit behaupten während ihres Fortschreitens ein beständiges Verhältniss.
2) Die Wegeslänge nimmt schneller zu als die Zeit.
3) Die Wegeslänge vermindert sich in gleichen auf einander folgenden Zeiträumen.

Die erste dieser Bewegungsarten nennt man die gleichförmige, die zweite die beschleunigte, die dritte die verzögerte Bewegung.

10 Bei der gleichförmigen Bewegung ist das Verhältniss von s zu t unabhängig von der wirklichen Grösse dieser Werthe. Den Quotienten dieses Verhältnisses $\frac{s}{t} = v$ nennt man die Geschwindigkeit.

Die Geschwindigkeit bei gleichförmiger Bewegung bezeichnet den in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg. Ihre Grösse ist dasjenige, was verschiedene gleichförmige Bewegungen unterscheidet.

11 Der Begriff der Geschwindigkeit, als der in der Secunde bei gleichförmiger Bewegung beschriebene Weg behauptet seine Geltung in unverändertem Umfange selbst dann noch, wenn die betreffende Bewegung nur einen kleinen Bruchtheil einer Secunde gedauert haben oder betrachtet worden sein sollte. Man kann dann sagen: Die Geschwindigkeit ist derjenige Weg, welcher in der Zeiteinheit zurückgelegt werden müsste, wenn die Bewegung in der festgestellten Weise wenigstens eine Secunde hindurch gleichförmig fortdauern würde. In diesem Sinne kann man beispielsweise von der Geschwindigkeit einer Büchsenkugel sprechen, sollte dieselbe auch lange nicht die Zeit einer Secunde unterwegs geblieben sein.

12 Gleichförmige Bewegungen kommen in der Natur wirklich vor. Dahin gehört die Umdrehung der Erde um ihre Axe. Man findet die in

beliebiger Breite herrschende Geschwindigkeit, indem man den Umfang des betreffenden Parallelkreises durch die Zeit eines Sternentages, diese in Secunden ausgedrückt, dividirt. Der Sternentag ist der Zeitraum zwischen zweien oberen Durchgängen eines Fixsternes durch den Mittagskreis des Beobachtungsortes; oder auch die Zeit eines wirklichen Umlaufs der Erde um ihre Axe. Der Sternentag ist im Mittel 4 Minuten kürzer als der bürgerliche oder Sonnentag, dessen nicht genau gleich bleibende Länge durch die Zeit von einem Mittage zum andern bestimmt ist. Wird die Breite des Ortes auf der Erdoberfläche, dessen Geschwindigkeit gesucht werden soll, mit β bezeichnet; erinnert man sich zugleich, dass der Umfang der Erde am Aequator 5400 geographische Meilen beträgt; eine Meile = 22 843 Pariser Fuss; dass ferner die Dauer eines Sternentages = 86 164 Secunden, so findet man

$$v = \frac{5400 \; . \; 22\,843 \cos\beta}{86\,164}.$$

Z. B. die Geschwindigkeit eines Punktes am Aequator, für welchen $\beta = 0$; $\cos\beta = 1$, ist $v = 1431{,}7$ Fuss. Unter dem 60sten Breitegrade, wo $\cos 60^0 = {}^1/_2$, ist sie nur halb so gross u. s. w.

Die Fortpflanzung der Lichteindrücke durch den Weltraum, und im Allgemeinen durch jedes ganz gleichartige Mittel ist ebenfalls eine gleichförmige Bewegung. Aus der scheinbaren Verzögerung des Eintritts eines Jupitertrabanten in den Schatten seines Planeten, je nachdem diese Erscheinung aus dem nächsten und dann aus einem der weitesten Abstände des Jupiters von der Erde beobachtet wird, hat man berechnet, dass das Licht 993,5 Secunden braucht, um den Durchmesser der Erdbahn, d. h. eine Wegesstrecke von 41 226 000 Meilen zu durcheilen. Die Geschwindigkeit des Lichtes ist hiernach

$$v = \frac{41\,226\,000}{993{,}5} = 41\,918 \text{ Meilen.}$$

Auch die Bewegung des Zeigers einer Uhr ist gleichförmig, wenn letztere richtig geht.

13 Viele Bewegungserscheinungen, welche streng genommen nicht zu den gleichförmigen Bewegungen gehören, können doch annähernd als solche betrachtet werden. Den Quotienten des zurückgelegten Weges dividirt durch die Zeit nennt man in solchen Fällen die mittlere Geschwindigkeit. Sie drückt diejenige Geschwindigkeit aus, welche bei genau gleichförmiger Bewegung stattfinden müsste, damit dieselbe Wegesstrecke in derselben Zeit wie vorher würde zurückgelegt werden können. Nur in diesem Sinne kann man von der Geschwindigkeit der Erde sprechen, bezüglich ihrer Umwälzung um die Sonne, von der des Wassers in einem Flusse, von der eines Mühlrades, eines Zuges auf der Eisenbahn, des Schwungrades einer Dampfmaschine, des Militärschrittes und selbst des Windes.

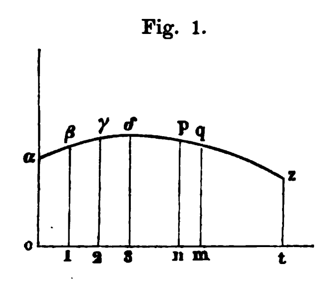
Der Schritt eines Fussgängers, im Einzelnen betrachtet, ist nicht einmal annähernd gleichförmig, sondern aus einer beschleunigten und einer verzögerten Bewegung zusammengesetzt. Die Gleichförmigkeit bezieht sich nur auf die Länge und Dauer der Schritte. Derartige Bewegungen, bei welchen eine gewisse Ordnung des Vorgangs sich gleichförmig wiederholt, werden häufig periodisch gleichförmige Bewegungen genannt. Dahin gehört auch die Bewegung des Kolbens einer Dampfmaschine, die drehende Bewegung des Krumzapfens, die der Erde um die Sonne, des Mondes um die Erde u. a. m.

14 Die mittlere Geschwindigkeit einer thatsächlich ungleichförmigen Bewegung nähert sich dem wirklichen Vorgange um so mehr, je kürzer die Wegesstrecke s und der Zeitabschnitt t, worauf man sie bezieht. Man kann sich eine Wegeslänge denken von solcher Kleinheit, dass die auf derselben etwa eintretenden Aenderungen in der Art der Bewegung sich der Wahrnehmung und Messung völlig entziehen. Die Bewegung innerhalb solcher Gränzen darf stets als genau gleichförmig angesehen werden, und das Verhältniss $\frac{s}{t} = v$ giebt dann einen bestimmten Ausdruck für die Geschwindigkeit an dieser Stelle der Bewegungsbahn. In ähnlicher Weise lässt sich der Begriff der Geschwindigkeit bei jedem anderen Punkte der Bahn eines Körperatoms einführen, indem man an den betreffenden Stellen das Verhältniss eines unmessbar kleinen Bruchtheils derselben, das eines Bahnelementes, zu dem zugehörigen Zeitelemente aufsucht.

Ungleichförmige Bewegungen unterscheiden sich hiernach von den gleichförmigen wesentlich dadurch, dass sie Bewegungen mit veränderlicher Geschwindigkeit sind.

Die jedesmalige Art dieser Aenderungen lässt sich in sehr anschaulicher Weise geometrisch darstellen. Auf einer geraden, wagerechten Linie ot (Fig. 1) werden die während der Dauer einer in Betracht gezogenen Bewegung verfliessenden gleichen Zeitabschnitte (z. B. Secunden) in eben so vielen gleichen Längenabtheilungen aufgetragen, dann die jedem dieser Zeitpunkte zugehörende Geschwindigkeit, ebenfalls als gerade Linie, von dem bezeichneten Punkte aus, im wirklichen Grössenverhältnisse senkrecht erhoben. So giebt die Linie 0α die Geschwindigkeit am Ausgangspunkte der Bewegung, 1β die relative Grösse der nach dem ersten Zeitabschnitte veränderten Geschwindigkeit u. s. w. Liegen die Höhenpunkte α, β, γ, δ u. s. f. hinlänglich nahe bei einander, so bildet ihre Verbindungslinie $\alpha p z$ eine Curve, welche den Gang der Ge-

Fig. 1.



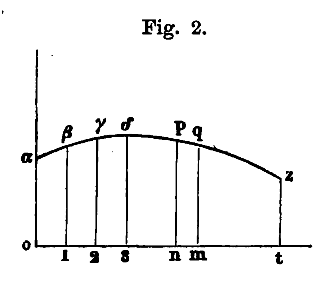
schwindigkeitsänderungen treu wiedergiebt und denselben mit einem Blicke übersehen lässt. Zieht man von einem ganz beliebigen Punkte n der Zeitlinie die Senkrechte np, so giebt diese das Grössenverhältniss der zu diesem Zeitpunkte erreichten Geschwindigkeit. Die krumme Linie $\alpha p z$ heisst die Geschwindigkeitscurve.

15 Der Mathematiker bezeichnet ein Element der ganzen Wegeslänge s mit ds, wobei jedoch ausdrücklich vorbehalten ist, dass dieser Werth ds veränderlich sei, d. h. eine zwar immer sehr kleine, aber doch in gleichen auf einander folgenden Zeitelementen ungleiche Länge bedeuten könne. Jedes der kleinen, die ganze Zeit t zusammensetzenden und als gleich gross vorausgesetzten Zeittheilchen oder Zeitelemente wird mit dt ausgedrückt. Da nun, wie vorher gezeigt worden, das Verhältniss $\frac{ds}{dt} = v$, so folgt auch, dass $ds = v \cdot dt$.

Man bestimmt also ds, d. h. irgend einen sehr kleinen Bruchtheil des Weges s, indem man die einem beliebigen Zeitpunkte angehörende Geschwindigkeit mit dem Zeitelemente multiplicirt.

Zwischen zweien beliebig gewählten Zeitpunkten n und m (Fig. 2) können zahllose Zeitelemente liegen, entsprechend eben so vielen Geschwindigkeiten, in stetigem Uebergange von np zu mq. Indessen jede derselben, mit dem Zeitelemente multiplicirt, liefert das zugehörige Wegeselement, und die Summe aller dieser Wegeselemente den ganzen zwischen den Zeitpunkten n und m eingeschlossenen Weg; und zwar dies um so genauer, je kleiner man sich, nach freier Wahl, die Zeitelemente gedacht hat. Dieselbe Summe giebt aber auch den Flächeninhalt der Figur $npqmn$.

Fig. 2.

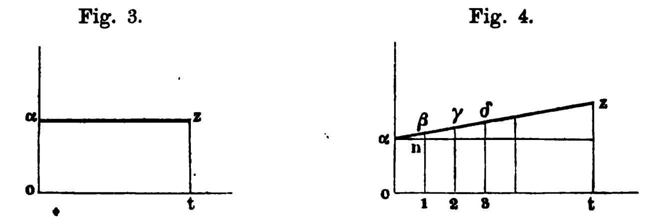


Dieser Flächeninhalt ist folglich ein Ausdruck für die Grösse der zwischen den Zeitpunkten n und m liegenden Wegesstrecke. Aus demselben Grunde wird die Länge des ganzen Weges s durch Bestimmung des Flächeninhaltes der Figur $o\alpha z t o$ gefunden.

16 Die Geschwindigkeitscurve der gleichförmigen Bewegung αz (Fig. 3) ist eine Gerade, gleichlaufend mit der Zeitlinie, indem die Geschwindigkeit bei dieser Bewegungsart unverändert bleibt. Der Flächeninhalt des Parallelogrammes $o\alpha \times ot = V.t = S$ bestimmt den bei gleichförmiger Bewegung beschriebenen Weg.

17 Wenn man sich die Geschwindigkeitslinie zwar auch als eine Gerade, aber geneigt gegen die Zeitlinie vorstellt, z. B. wie in Fig. 4 den Winkel $z\alpha n$ damit bildend, so drückt dies eine Bewegungsart aus, bei der die

Geschwindigkeit in geradem Verhältnisse zur Zeit zunimmt. Angenommen, diese Zunahme von Secunde zu Secunde betrage $n\beta = c$, die An-



fangsgeschwindigkeit sei aber $o\alpha = v$, so ist die Geschwindigkeit nach t Secunden

$$tz = V = v + ct \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Man nennt diese Bewegungsart die gleichförmig (proportional mit der Zeit) beschleunigte. Die derselben entsprechende Figur (Fig. 4) ist ein Paralleltrapez, dessen Höhe ot durch die verflossene Zeit t, und dessen gleichlaufende Seiten $o\alpha$ und tz durch die zu Anfang und zu Ende der Beobachtungszeit herrschenden Geschwindigkeiten v und V bestimmt sind. Der Flächeninhalt dieser Figur:

$$\frac{o\alpha + tz}{2} \cdot ot = \frac{v + V}{2} t = s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

stellt den Weg dar, der mit gleichförmiger Beschleunigung in der Zeit t zurückgelegt worden ist.

Aus den beiden Grundgleichungen der gleichförmig beschleunigten Bewegung lassen sich noch, indem man für V oder t in (2) deren Werthe aus (1) setzt, die folgenden ableiten:

$$s = \frac{v + v + ct}{2} t = vt + \frac{c}{2} t^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$s = \frac{V + v}{2} \times \frac{V - v}{c} = \frac{V^2 - v^2}{2c} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

und endlich durch Umsetzung von (4):

$$V = \sqrt{2cs + v^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Wenn $v = 0$ wird, d. h. wenn die Bewegung aus relativer Ruhe beginnt, so verwandeln sich diese fünf Gleichungen in die folgenden: 18

$$V = ct \quad \text{oder} \quad t = \frac{V}{c};$$

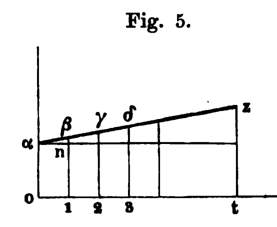
$$s = \frac{V}{2} t = \frac{c}{2} t^2 = \frac{V^2}{2c}; \quad t = \sqrt{\frac{2s}{c}};$$

$$V = \sqrt{2cs};$$

welche sämmtlich in der Mechanik wichtige Anwendungen finden.

19 Man kann sich auch vorstellen, dass eine Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit eine stetige Verzögerung erfahre, die mit jeder Secunde bis zu einem Werthe c anwachse. Die Betrachtung ist ganz dieselbe wie vorher, nur dass die Geschwindigkeitslinie, welche im vorhergehenden Falle aufwärts stieg, jetzt sich senkt. Man könnte, um sich auf Fig. 5 zu beziehen, annehmen, dass während der Beobachtungszeit t, die Berechnung bei der Geschwindigkeit $tz = V$ begänne und bis zur Geschwindigkeit $o\alpha = v$ fortgesetzt werde. Man hat dann nur c in negativem Sinne in Rechnung zu bringen. So entstehen die Gleichungen:

Fig. 5.



$$v = V - ct \quad \text{oder} \quad t = \frac{V - v}{c} \quad \ldots \ldots (1)$$

$$s = \frac{V + v}{2} t \quad \ldots \ldots (2)$$

$$s = Vt - \frac{c}{2} t^2 \quad \ldots \ldots (3)$$

$$s = \frac{V^2 - v^2}{2c} \quad \ldots \ldots (4)$$

und

$$v = \sqrt{V^2 - 2cs} \quad \ldots \ldots (5)$$

Die Bewegungsart führt den Namen der gleichförmig verzögerten Bewegung.

20 Der freie lothrechte Fall der Körper nähert sich einer gleichförmig beschleunigten, das lothrechte Aufsteigen geworfener Körper einer gleichförmig verzögerten Bewegung. Da der freie Fall eine geradlinige Bewegung ist, an der sich die grössten fallenden Körper, wie die kleinsten Bruchtheile derselben in ganz gleicher Weise betheiligen müssen, so gilt, was bei dieser Bewegungserscheinung für irgend einen Punkt eines Körpers ermittelt ist, sogleich auch für das Ganze. Hier ist es daher unnöthig, die Betrachtung zunächst nur auf das Verhalten physikalischer Punkte einzuschränken.

Die Geschwindigkeitszunahme c eines frei fallenden Körpers von Secunde zu Secunde lässt sich nur durch Versuche bestimmen. So fand Dechalles, indem er die Fallzeiten mittelst eines Pendels beobachtete, das ungefähr halbe Secunden schlug, und die Fallhöhen in Pariser Fussen maass, folgende Zahlen:

$\frac{t}{2}$	1	2	3	4	5	6
s	4,25	16,5	36	60	90	123
c	34	33	32	30	28,8	27,3.

Die Werthe c, die man nicht direct messen kann, lassen sich mittelst der Gleichung $s = \frac{c}{2} t^2$ ableiten, indem man für s und t die zusammengehörigen, gemessenen Zahlen setzt. So ergab sich allerdings, dass c eine bei zunehmender Fallhöhe abnehmende Grösse ist. Bei geringen Fallhöhen ist indessen diese Veränderlichkeit von c nur wenig bemerkbar, und bleibt deshalb in den Rechnungen gewöhnlich unberücksichtigt. Nach den zuverlässigsten Bestimmungen setzt man gegenwärtig im mittlern Europa

$$\begin{aligned} c &= 9{,}8088 \text{ Meter}, \\ &= 30{,}1958 \text{ Pariser Fuss}, \\ &= 31{,}2528 \text{ preussische Fuss}, \\ &= 32{,}1816 \text{ englische Fuss}. \end{aligned}$$

Man nennt c gewöhnlich die Beschleunigung (*acceleratio*) und bezeichnet, zur Abkürzung, die Beschleunigung frei fallender Körper insbesondere mit dem Buchstaben g.

Gestützt auf diese Zahl findet man z. B., dass ein Stein aus der Höhe von 1 Meter in 0,452 Secunden herabfällt, und dass er dabei die bedeutende Geschwindigkeit von 4,429 Meter gewinnt. Hatte dieser Körper in der Höhe von 1 Meter anlangend bereits die Geschwindigkeit von 2,32 Meter, so zeigt sich (Formel 5, Nro. 17), dass er durch den weitern Fall von 1 Meter herab, im Ganzen 5 Meter Geschwindigkeit erhält.

Die Geschwindigkeitsabnahme oder die Verzögerung senkrecht aufsteigender Körper ist an Grösse genau gleich ihrer Fallbeschleunigung. Hieraus folgt, dass die Zeit des Aufsteigens gefunden wird, indem man die Geschwindigkeit durch g dividirt, und dass beim Falle durch die Steighöhe dieselbe Geschwindigkeit wieder gewonnen wird, die beim Aufsteigen verloren worden war. Will man also wissen, welche Geschwindigkeit z. B. ein Gummiball hatte, der bis zu 12 Fuss in die Höhe sprang, so hat man nur zu berechnen, welche Geschwindigkeit ein Körper erlangt, der von dieser Höhe herabfällt.

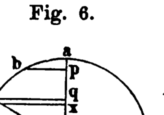
21 Die gleichförmige und gleichförmig beschleunigte oder verzögerte Bewegung sind die einzigen Bewegungsarten, deren Geschwindigkeitscurven in der graphischen Darstellung nach geraden Linien verlaufen. Als Beispiel einer Bewegungsart, deren Geschwindigkeitsänderungen sich nur nach dem Gesetze einer krummen Linie darstellen lassen, wollen wir die Bewegung des Kolbens einer Dampfmaschine mit Schwungrad betrachten, einer Maschine, deren äussere Einrichtung man gegenwärtig bei Jedermann als bekannt voraussetzen darf.

Wir wollen annehmen, dass das Schwungrad mit dem Dampfkolben in der Art verbunden sei, dass es sich für je eine Hin- und Herbewegung des letztern einmal herumdrehe, sowie z. B. das Treibrad einer Locomotive

zeigt. Es sei $2r$ der Spielraum für die Bewegung des Kolbens. Ein Punkt des Schwungrades im Abstande r von seiner Axe beschreibt mit gleichförmiger oder fast gleichförmiger Bewegung in irgend einer Zeit t einen Kreis $2\pi r$; ein Punkt des Kolbens dagegen in derselben Zeit eine gerade Linie $2r$, einmal hin und einmal wieder zurück. Die Bewegung des Kolbens kann nicht gleichförmig sein, denn sie beginnt für jeden Gang aus der Ruhe, endigt vor dem Wechsel der Richtung mit einem Ruhepunkt und hat in der Mitte des Dampfcylinders die grösste Geschwindigkeit.

Beide Bewegungen, die drehende und die geradlinige, sind so verknüpft, dass wenn ein Punkt a (Fig. 6) der Kreisbewegung in gleichen auf einander folgenden Zeitabschnitten die gleichen Bogenlängen ab, bc, cd u. s. w. beschreibt, ein Punkt a des Kolbens, von derselben Ausgangsstelle ab, in denselben Zeitabschnitten, geradlinig, die Wege ap, pq, qo zurücklegen muss. Es sei v die Geschwindigkeit des im Abstande r vom Mittelpunkte o rotirenden Punktes und $r\varphi$ die von diesem Punkte von a aus bis zu einem beliebigen Punkte c beschriebene Bogenlänge, so lässt sich ganz allgemein darthun, dass ein ebenfalls von a aus unterdessen bei q angekommener Kolbenpunkt die Geschwindigkeit $cq = v \sin\varphi$ gewonnen haben muss*). D. h. die Geschwindigkeit des Kolbens zu irgend welcher Periode seiner Bewegung verhält sich wie der Sinus des Bogens, welchen von gleichem Ausgangspunkte der Bewegung an unterdessen das Schwungrad beschrieben hat. Z. B. für $\varphi = 0$ und $\varphi = 180^0$ wird $\sin\varphi = 0$, folglich die Geschwindigkeit des Kolbens $u = 0$. Dies sind die Gränzen der Kolbenbewegung. Für $\varphi = 90^0$ wird $\sin\varphi = 1$. Also in der Mitte des Spielraums $2r$ der Bewegung erreicht die Geschwindigkeit des Kolbens diejenige des im Abstande r rotirenden Punktes. Dasselbe Maximum der Kolbengeschwindigkeit wird bei einer Bogenlänge von 3×90 Graden von dem zurückkehrenden Kolben abermals erreicht, denn $\sin 270^0 = -1$.

Fig. 6.



*) Da nämlich $ac = r\varphi$ die Bogenlänge ist, und v die in der Kreisbahn und folglich auch am Punkte c herrschende Geschwindigkeit, so ergiebt sich der nächstfolgende kleine Weg des rotirenden Punktes oder das Bogenelement $cm = r\partial\varphi = v\partial t$; also das Zeitelement

$$\partial t = \frac{r\partial\varphi}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

In demselben Zeittheilchen wurde mit unbekannter Geschwindigkeit u von einem Punkte des Kolbens der Weg qx beschrieben. Setzt man $qo = x = r\cos\varphi$, so ist: $qx = -\partial x = -r\sin\varphi\,\partial\varphi$. (Das negative Vorzeichen von ∂x bedeutet einen Abzug von x.)

Es ist aber auch $\partial x = u\partial t$, folglich $r\sin\varphi\,\partial\varphi = u\partial t$, und indem man für ∂t dessen Werth aus (1) setzt:

$$r\sin\varphi\,\partial\varphi = u \cdot \frac{r\partial\varphi}{v}.$$

Hieraus folgt $u = v\sin\varphi$.

Da die Kreisbewegung gleichförmig, also mit der Zeit proportional fortschreitet, so kann die Bogengrösse als Zeitmaass gelten. Man denke sich die Zeitlänge t für eine Umdrehung als Kreisumfang aufgetragen, und setze die Bewegungszeit des Kolbens von a bis $q = z$, so ist $2\pi : t = \varphi : z$, also $\varphi = \frac{2\pi}{t} z$, und die Geschwindigkeit des Kolbens bei der Ankunft am Punkte q, $u = v \sin \frac{2\pi}{t} z$. Die Geschwindigkeit verhält sich wie der Sinus der seit dem Beginn der Bewegung verflossenen Zeit, diese Zeit als Kreisbogen ausgedrückt. Der in der Zeit z zurückgelegte Weg ist $aq = ao - qo = r(1 - \cos\varphi)$. Man kann daher sagen: der Weg des Kolbens während einer beliebigen Zeit des Fortschreitens verhält sich wie der Cosinus des Zeitbogens, abgezogen von der Einheit.

Um die Geschwindigkeitscurve dieser sehr bemerkenswerthen Bewegungsform zu verzeichnen, denken wir uns den Kreisumfang $2\pi r$ als eine gerade Linie at (Fig. 7) ausgespannt. Diese Linie, die Zeitlinie,

Fig. 7.

wird in n gleiche Abtheilungen oder Zeittheile gebracht. Die über den Punkten a, b, c, d u. s. w. errichteten Lothe sind die den Zeitbögen ab, ac, ad u. s. w. entsprechenden Sinusse, nämlich die Linien bp, cq, do u. s. w. aus Fig. 6 entnommen. Für den Hingang des Kolbens erheben sich diese Lothe über der Zeitlinie, für den Rückgang, um das Entgegengesetzte in der Richtung auszudrücken, senken sie sich unter dieselbe.

Dritter Abschnitt.

Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen.

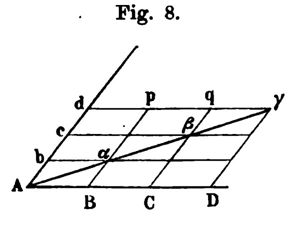
22 Die Bahn eines physikalischen Punktes, was immer für Einflüsse seine Bewegung beherrschen mögen, wird in allen Fällen nur eine einzige, zusammenhängende gerade oder krumme Linie bilden. Gleichwohl können Grösse, Richtung und Gestalt derselben, wie dies schon früher (in Nro. 2), lediglich als Ergebniss der Erfahrung, hervorgehoben wurde, je nach dem Ausgangspunkte der Beziehungen sich sehr verschieden zeigen.

Eine Kugel auf dem Verdecke eines Schiffes liegend, bewegt sich mit diesem, wenn sie auch für einen Beobachter auf dem Schiffe ruhend erscheint. Rollt sie in der Richtung der Fahrt des Schiffes, so ist das unmittelbare Urtheil über die Beschaffenheit ihrer Bewegung, je nach dem Standpunkte des Beobachters (auf dem Schiffe oder auf festem Grunde) wieder ein ganz verschiedenes. Ihre wirkliche Geschwindigkeit ist aus ihrer eigenen Bewegung auf dem Schiffe und derjenigen des letztern zusammengesetzt, und zwar gleich der Summe oder dem Unterschiede beider Geschwindigkeiten, je nachdem sie sich, mit Beziehung auf den Gang des Schiffes, vorwärts oder rückwärts bewegt.

23 Bildet ihre Bahn auf dem Schiffe mit der des letztern einen Winkel, so kann ihre wirkliche Bewegungsrichtung weder mit der einen noch mit der andern dieser Bahnen zusammenfallen, wenn sie auch ersichtlich von keiner derselben abweicht. Die nähere Betrachtung dieses Vorganges eignet sich in vorzüglicher Weise, um die Zusammensetzung der gleichzeitigen Bewegung eines Körperpunktes nach zwei verschiedenen Richtungen in eine einzige zur Anschauung zu bringen.

Es sei AD (Fig. 8) die Bahn des Schiffes, Ad diejenige eines über das Verdeck rollenden Körpers, der gleichförmig und in gleichen Zeittheilen die Strecken Ab, bc und cd. zurücklegt. Es leuchtet nun sogleich ein, dass, während der Punkt A des Schiffes bei gleichförmiger Bewegung in gleichen auf einander folgenden Zeittheilen nach B, C, D gelangt, die vorgezeichnete Bahnstrecke Ad nicht ruhen bleibt, sondern mit sich selbst parallel fortschreitend, stufenweise in die Lagen Bp, Cq, $D\gamma$ einrückt. So kommt es, dass der rollende Körper nach Verlauf des ersten Zeittheils nicht in b, sondern in α, nach Verlauf des zweiten nicht in c, sondern in β und endlich bei gleichförmiger Fortdauer beider Bewegungen nicht in d, son-

Fig. 8.



dern in γ ankommt. Die wirkliche Richtung der Bewegung ist also nicht von A nach d und auch nicht von A nach D, sondern von A nach γ, und zwar in gerader Linie, denn es ist das Verhältniss der Linien

$$\frac{AB}{B\alpha} = \frac{AC}{C\beta} = \frac{AD}{D\gamma}.$$

Die Linie $A\gamma$ bezeichnet aber nicht nur die Richtung, sondern zugleich die wirkliche Grösse des Weges, welchen der Punkt A zurücklegt, während derselbe auf der Bahn AD scheinbar von A nach D und auf der Bahn Ad scheinbar von A nach d gelangt. Da die Bewegungen als gleichförmig angenommen sind, so müssen sich die Wege $AD : Ad : A\gamma$ wie die Geschwindigkeiten nach diesen drei Richtungen verhalten. Nun sind die Linien AD und $d\gamma$ und ebenso Ad und $D\gamma$ gleichlaufend. Es ist daher $A\gamma$ die wirkliche Richtung und Geschwindigkeit, die Diagonale eines Parallelogrammes, ergänzt auf dem Grössenverhältnisse der beiden scheinbaren Richtungen und Geschwindigkeiten des Punktes A.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich immer geltend machen und führen zu ähnlichen Ergebnissen, so oft ein Körper gleichzeitig von zwei Geschwindigkeiten nach verschiedenen Richtungen getrieben erscheint.

Man nennt die Linien AD und Ad die Seitengeschwindigkeiten, die Linie $A\gamma$ die mittlere, oder auch die resultirende Geschwindigkeit; den Lehrsatz selbst, zu dem wir soeben gekommen sind: das Gesetz des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten. Die Richtigkeit dieses Gesetzes ist übrigens nur durch die Erfahrung erkannt, gleichwie die demselben zu Grunde liegende Thatsache, dass die Körper verschiedenen gleichzeitig eintretenden Bewegungen mit gleicher Sicherheit und Leichtigkeit gehorchen (Nro. 2).

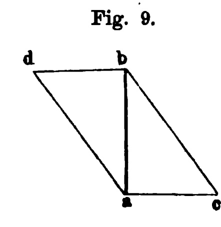
24 Da die drei Grössen, mit denen dieser Lehrsatz sich befasst, im Verhältniss der zwei Seiten zu der Diagonale eines Parallelogrammes, oder was dasselbe ausdrückt, im Verhältniss der drei Seiten eines Dreiecks zu einander stehen, so ist es einleuchtend, dass Alles, was bei der Berechnung der Seiten und Winkel eines Dreiecks zur Geltung kommt, auch hier Anwendung findet. So erklärt es sich, dass alle Bestimmungen, bei denen es sich darum handelt, zwei Geschwindigkeiten nach verschiedenen Richtungen, welchen ein Körper zu gleicher Zeit unterworfen ist, zu ihrer Mittlern zusammenzusetzen, oder auch aus der Kenntniss der letztern, sowie der Winkel, welchen sie mit den Seitengeschwindigkeiten bildet, die Grösse von diesen abzuleiten, sich als mehr oder weniger einfache Aufgaben der Geometrie herausstellen.

25 Einige Beispiele mögen zur Erläuterung derartiger Rechnungen dienen:

α) Von dem Punkte a eines Schiffes, das in der Richtung ac, Fig. 9 (a. f. S.), mit der Geschwindigkeit u treibt, soll eine Kugel gegen einen Punkt b der Küste geworfen werden. Es sei $ab = l$ und Winkel

$bac = 90^\circ$. Wollte man der Kugel die Richtung ab geben, so würde sie an dem Ziele vorübergehen, weil ihr die von der Bewegung des Schiffes abhängige Geschwindigkeit in der Richtung von a nach c bleibt.

Fig. 9.

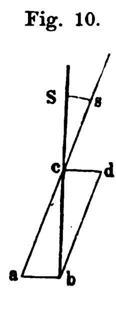


Die Kugel muss daher nach einer Richtung ad geworfen werden, so dass ihre beiden Bewegungen, nach ac und nach ad sich zu der Mittlern nach ab zusammensetzen. Nennen wir v die Wurfgeschwindigkeit der Kugel, und Winkel $dab = \varphi$, so ist $\sin\varphi = \frac{u}{v}$. Aus der Kenntniss von u und v lässt sich also der Winkel φ ableiten, den die Kugel einhalten muss, um in demselben Augenblicke in b eintreffen zu können, in welchem der Punkt a die Stelle c erreicht. Ihre wirkliche Geschwindigkeit nach ab ist $x = \sqrt{v^2 - u^2}$, und die Dauer der Bewegung

$$t = \frac{l}{x} = \frac{l}{\sqrt{v^2 - u^2}}.$$

β) Obschon das Licht in jeder Secunde einen Weg von mehr als 41 000 Meilen zurücklegt, so ist doch gegen diese ungeheure Geschwindigkeit diejenige der Erde bei ihrer Umdrehung um die Sonne, wiewohl sie nur 4,14 Meilen beträgt, nicht ganz verschwindend. Hierauf beruht eine unter dem Namen: Abirrung des Lichtes (Aberration) bekannte scheinbare Bewegung der Fixsterne in elliptischen Bahnen von 20,25 Gradsecunden grösstem Halbmesser um ihre wahren Standorte am Himmel. Die Abirrung entsteht dadurch, dass während der Bewegung eines Lichtstrahles durch das Auge, oder vielleicht übersichtlicher, durch das Fernrohr des Beobachters, auch die Erde ihre Stelle verändert. Während z. B. ein Lichtstrahl den Weg cb (Fig. 10) zurücklegt, gelangt ein Punkt a der Erde nach b. Soll also das Bild des Sterns stets in der

Fig. 10.



Axe des Fernrohrs bleiben und von dem Auge in a wahrgenommen werden, so muss dem Fernrohr die geneigte Lage ac gegeben werden, so dass es in demselben Augenblicke die Stellung bd einnimmt, da das durch die Linie cb fortschreitende Licht auf den Punkt b trifft. Da wir nun die Stellung eines Sterns nach der Richtung der verlängerten Axe des Fernrohrs (d. h. aus dem scheinbaren Wege des Lichtes, der aus seinem wirklichen und dem gleichzeitigen der Erde zusammengesetzt ist), beurtheilen, so folgt, dass wir dieselbe um den Abirrungswinkel $acb = Scs$ unrichtig bestimmen, d. h. den Stern in s vermuthen, während sich derselbe in S befindet.

Die dadurch gebildeten elliptischen Bahnen, deren Erzeugungszeit je mit der einer vollen Umdrehung der Erde um die Sonne zusammenfällt, verwandeln sich in Kreise bei solchen Sternen, die im Zenith stehen,

und gehen bei solchen, deren Standort sich in der Nähe des Horizontes befindet, in gerade Linien über.

Wenn der Bogen Ss bezogen auf c als Mittelpunkt den grössten Abirrungsbogen von 20,25 Secunden vorstellen soll, so bedeutet Sc den Radius $= 1$ der Himmelskugel. Dieser Winkel ist aber auch durch das Verhältniss der Linien $ab : cb$ gegeben, welches dasselbe ist, wie das der Geschwindigkeit der Erde zu derjenigen des Lichtes. Man kann daher setzen

$$v : 4{,}14 = 1 : Ss,$$

woraus folgt: die Geschwindigkeit $v = \frac{4{,}14}{Ss}$.

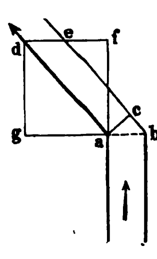
Um den Bogen Ss für die Rechnung in Theilen des Halbmessers 1 ausdrücken zu können, hat man sich zu erinnern, dass ein Bogen von $180^0 = \pi = 3{,}14$. Es ist daher $60 \,.\, 60 \,.\, 180^0 : 3{,}14 = 20{,}25 : Ss$,

also $$Ss = \frac{3{,}14 \,.\, 20{,}25}{180 \,.\, 60 \,.\, 60} = \frac{1}{10190}$$

und $$v = 4{,}14 \,.\, 10190 = 42170 \text{ Meilen}.$$

γ) Man bemerkt sehr häufig, dass der aus den Schornsteinen aufsteigende Rauch ausserhalb eine schiefe Richtung annimmt. Diese Erscheinung ist, wie man weiss, eine Folge der Einwirkung des Windes. Es sei ab (Fig. 11) die Weite eines Schornsteinrohrs. Die daraus sich erhebende Rauchsäule sei durch die Linien da und eb begränzt; Winkel $dag = \alpha$ bezeichne ihre Neigung gegen die wagerechte Ebene. Wenn $da = V$ die Geschwindigkeit ausdrückt, mit welcher der Rauch in die Luft eindringt, so muss $fa = u$ seine Geschwindigkeit im Innern des Schornsteins, und $ag = v$ diejenige des wagerechten Luftstroms sein. Die Grössen beider Seitengeschwindigkeiten lassen sich aus V und dem bekannten Winkel α ableiten. Man findet $u = V \sin \alpha$ und $v = V \cos \alpha$. Durch den Druck des Windes, bei horizontaler Richtung, wird

Fig. 11.



also die Geschwindigkeit der Rauchsäule vergrössert, denn $V = \frac{u}{\sin \alpha}$ ist grösser als u.

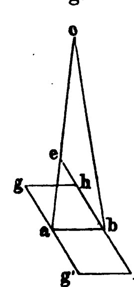
Die Geschwindigkeit des Zugs im Schornstein zieht hiervon gleichwohl keinen unmittelbaren Gewinn; denn durch die Neigung des abziehenden Rauchs wird seine Querschnittsfläche im Verhältnisse $\frac{ac}{ab} = \sin \alpha$, d. h. in demselben Verhältnisse vermindert, als die Geschwindigkeit zunimmt.

Wenn der Luftstrom an sich schon eine Neigung aufwärts hat, kann man sich denselben in einen horizontalen und senkrecht sich erhebenden zerlegt denken, von welchen der letztere allerdings das Entweichen des Rauches begünstigt. Umgekehrt können fallende Winde eine Störung des

Zuges veranlassen. Bekanntlich sucht man diesem Uebelstande durch Ueberdachung des Rauchrohrs zu begegnen.

δ. Die Umwälzung der Erde um ihre Axe ist nicht ganz ohne Einfluss auf die Bewegung der Erdkörper. Denn jeder relativ ruhende Körper theilt die Rotationsgeschwindigkeit seines Standortes und strebt dieselbe beizubehalten, wenn er nach irgend beliebiger Richtung in Bewegung gesetzt wird. Angenommen, diese Bewegung geschehe in gerader, wagerechter Linie und ganz frei von localen Hindernissen. Ein Punkt a (Fig. 12) bezeichne den Ausgangspunkt derselben, und ag ihre Richtung und Geschwindigkeit; ferner b diejenige Stelle des der Breite von a zugehörigen Parallelkreises, welche dieser Punkt in Folge der Erdumwälzung nach einer Secunde einnehmen wird; also ab die Umdrehungsgeschwindigkeit in der Breite von a. Die Tangente des Punktes a an dessen Mittagskreise muss in ihrer Verlängerung die Erdaxe durchschneiden. Es sei ac diese Linie und c ihr Durchschnittspunkt mit der Erdaxe; sie wird eine Secunde später in die Lage bc eingetreten sein. Unterdessen ist der bewegte Körper auf seiner scheinbaren Bahn von a nach g gelangt, und befindet sich, da der Weg ag mit sich selbst parallel in die Stellung $bh = ag$ vorgerückt ist, am Ende der Secunde in h. Es ist Winkel $gae = aeb = acb + ebc$, also Winkel gae grösser als ebc. Dies will sagen: die Bahn des bewegten Körpers macht in Folge der Umdrehung der Erde eine Schwenkung nach rechts. In dem gewählten Beispiele nähert sie sich dem Meridian und wird denselben bei hinlänglicher Dauer der Bewegung sogar überschreiten. Wäre ag' die scheinbare Bahn des bewegten Körpers, so würde derselbe nach Verlauf einer Secunde wirklich in h' angekommen sein, und wieder würde sich mit Beziehung auf den Ausgangspunkt eine Schwenkung nach rechts ergeben. Denn es ist Winkel $cag' = ceb = cbh' - acb$, also cag' kleiner als cbh'. Dieselbe Schwenkung nach rechts tritt ein für jede beliebige andere Richtung der Bewegung, und zwar für gleichen Ausgangspunkt und gleiche Bewegungsdauer um dieselbe Winkelgrösse. Auf der südlichen Erdhälfte treten dieselben Beziehungen ein, nur dreht sich die Bahn des bewegten Körpers nach der linken Seite.

Fig. 12.



Die Grösse des Winkels $acb = \varphi$ (Fig. 12), um welchen sich eine freie geradlinige Bewegungsbahn in jeder Secunde auf der Nordseite des Erdäquators nach rechts, auf der Südseite nach links dreht, kann aus dem Breitebogen $ab = \omega = \frac{2\pi}{86164}$ (86164 Secunden gleich der Zeit eines Sternentags) abgeleitet werden, indem man in Erwägung zieht, dass der kleine Bogen ab, mit Beziehung auf die Linie $ac = bc$ als Kreishalbmesser ebenso dem Winkel φ angehört, wie mit Beziehung auf

den Halbmesser des Breitekreises dem Winkel ω. Es sei nun β die Breite des Punktes a (Fig. 12) und die Kreislinie $ansa$ (Fig. 13) der Meridian desselben Punktes; ferner ac seine Tangente, ad der Halbmesser des zugehörigen Parallelkreises und oq derjenige des Erdäquators. Da nach Annahme der Breitewinkel $qoa = \beta = aco$, so folgt

Fig. 13.

$$\frac{da}{ca} = \sin\beta.$$

Nun ist aber mit Rücksicht auf die Kleinheit des Bogens $\omega = ab$ (Fig. 12):

$$\varphi : \omega = da : ca,$$

d. h. die Anzahl Grade oder Bruchtheile von Graden des Bogens ab, je nachdem man diesen der Linie da oder ca als Radius zurechnet, verhalten sich umgekehrt wie diese Linien. Es ist demnach

$$\varphi = \omega \frac{da}{ca} = \omega \sin\beta = \frac{2\pi \sin\beta}{86164}.$$

Was hier für ein kleines Bogenstück als richtig erkannt ist, gilt auch für eine beliebige Summe solcher Bogenstücke.

Der Winkel $acb = \varphi$ (Fig. 12), welchen die Linie ac in zwei verschiedenen Lagen während des Fortschreitens des Punktes a in seinem Parallelkreise einschliesst, ist folglich gleich dem durch dieselben Linien begränzten Breitebogen, multiplicirt mit dem Sinus der Breite.

Der Winkel ω gilt, wie oben erläutert wurde, für eine Secunde. Für die Zeit von t Secunden ist daher der entsprechende Winkel

$$\varphi = \omega t \sin\beta.$$

Dies ist der Ablenkungsbogen für Kreishalbmesser $= 1$.

Wenn unterdessen ein in freier geradliniger Bewegung fortgetriebener Körper in seiner scheinbaren Richtung den Weg $s = vt$ hatte zurücklegen müssen, so wächst die Bogengrösse verhältnissmässig mit der zunehmenden Wegeslänge s; es beträgt daher die der Ablenkung nach rechts entsprechende Bogenlänge

$$u = s\varphi = \omega s t \sin\beta = \omega v t t \sin\beta.$$

Nehmen wir z. B. an, unter dem 50sten Breitegrade werde eine Büchsenkugel nach irgend beliebiger Richtung mit solcher Geschwindigkeit getrieben, dass sie in zwei Secunden 600 Meter Wegeslänge beschreibt, so beträgt ihre seitliche Ablenkung

$$u = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 600 \cdot 2 \sin 50^0}{86164} = 0{,}067 \text{ Meter.}$$

Da auf eine Entfernung von 600 Metern hin ein Unterschied von 67 Millimetern unter gewöhnlichen Verhältnissen wohl kaum noch wahrzunehmen ist, so lässt sich annehmen, dass die Ablenkung der Büchsen-

kugeln durch die Erdumwälzung auf das richtige Zielen keinen Einfluss hat.

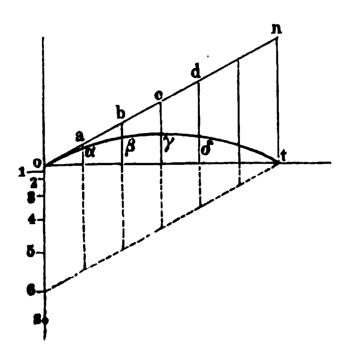
Man könnte in Zweifel sein, ob die obige Formel noch Geltung hat, wenn ein bewegter Körper seine Breite ändert? Die nähere mathematische Auffassung dieser Frage (Nro. 50) hat gelehrt, dass die Ablenkung u in horizontaler Richtung nur von derjenigen Breite abhängig ist, in welcher der betreffende Körper im Augenblicke des Schlusses der Beobachtung anlangt.

26 Nach dem Parallelogrammgesetze können zwar unmittelbar immer nur zwei Geschwindigkeiten eines physikalischen Punktes zu einer dritten zusammengesetzt werden. Es ist aber einleuchtend, dass die so bestimmte dritte sich wieder mit einer vierten verbinden lässt u. s. f., so dass die wahre Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit des Punktes aus einer noch so grossen Anzahl Sonderbewegungen hervorgegangen sein kann, deren jede für sich betrachtet zum vollständigen Austrage kommend anzusehen ist. Die Richtigkeit dieser Betrachtungsweise, als Erfahrungsresultat, tritt unmittelbar aus der Thatsache hervor, dass bewegte Körper auf der Erde, mag nun die Geschwindigkeit, von der sie belebt sind, von einfacherer oder zusammengesetzterer Natur sein, stets mit gleicher Sicherheit und Pünktlichkeit der Umdrehung der Erde um ihre Axe sowohl wie um die Sonne gehorsam sind.

Das Parallelogramm der Geschwindigkeiten ist übrigens nur ein besonderer Fall eines allgemeinern Gesetzes, nämlich desjenigen des Parallelogrammes der Bewegungen. Dieses Gesetz bezieht sich auf je zwei geradlinige Bewegungen mannichfaltigster Art, vorausgesetzt nur dass beide genau gleichartig, z. B. beide gleichförmig beschleunigt oder gleichförmig verzögert sind. Dagegen verliert es seine Anwendbarkeit, so oft ein Körper zweien verschiedenartigen Bewegungen, die nicht in dieselbe gerade Linie fallen, folgen muss. Die wirkliche Bewegungsbahn wird dann in allen Fällen eine krumme Linie.

27

Fig. 14.



Es sei z. B. die Bahn zu bestimmen, welche aus der Verbindung einer gleichförmigen mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung hervorgeht. Beide mögen in dem Punkte o (Fig. 14) beginnen; die gleichförmige mit der Geschwindigkeit $oa = ab = bc$ u. s. f., die gleichförmig beschleunigte nach der Richtung os, so dass der bewegte Punkt, entsprechend dem in Nro. 18 entwickelten Gesetze, in der ersten Secunde von 0 bis 1, in der zweiten von 1 bis 2, in der dritten von 2 bis 3 vorrückt u. s. w. Nun ist der Ab-

stand von 0 bis 1 $= a\alpha$, der Abstand von 0 bis 2 $= b\beta$, der Abstand von 0 bis 3 $= c\gamma$ u. s. w. Denkt man sich daher die Bahn os durch den Trieb der anfänglichen Geschwindigkeit mit sich selbst parallel fortschreitend, so dass der Punkt o in den auf einander folgenden Secunden nach a, b, c u. s. f. gelangt, so wird es einleuchtend, dass der bewegte Punkt nach der ersten Secunde sich in α, nach Verlauf von zwei Secunden sich in β, nach drei Secunden sich in γ u. s. w. befinden, dass aber seine Bahn eine Curve sein muss.

Wurfbewegung. Dem Gesetze dieser Bewegungsform folgen alle geworfenen Körper, insoweit sie keinem andern Einflusse unterliegen, als dem einer eingeprägten Geschwindigkeit und der Fallbeschleunigung. Freilich lässt sich dies mit genügender Strenge nur bei Wurfbewegungen mit geringer Anfangsgeschwindigkeit voraussetzen, wie beim seitlichen Ausfluss des Wassers aus engen Oeffnungen der Behälter, bei der Sprungbewegung u. a. m. 28

Um den Gang einer Wurfbewegung durch Rechnung zu bestimmen, denke man sich die Anfangsgeschwindigkeit v, deren Neigung gegen die Horizontalebene durch den Winkel α gegeben ist, in eine wagerechte und eine lothrechte Seitengeschwindigkeit zerlegt, beide in der durch die Richtung der Geschwindigkeit v bestimmten Verticalebene YoX (Fig. 15) liegend.

Fig. 15.

Die wagerechte Geschwindigkeit $ox = v \cos\alpha$ (weil Winkel $VoX = \alpha$) erzeugt nach t Secunden den Weg

$$x = v \cos\alpha\, t \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Die lothrechte Geschwindigkeit $oy = v \sin\alpha$, combinirt mit der Fallbeschleunigung, erzeugt eine gleichförmig verzögerte Bewegung nach der Linie oY, welcher (Nro. 19) eine Geschwindigkeit

$$u = v \sin\alpha - gt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und ein Weg

$$y = v \sin\alpha\, t - \frac{g}{2} t^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

entspricht.

Mit Hülfe dieser drei Gleichungen lässt sich Alles, was diese Bewegungsform Bemerkenswerthes bietet, vollständig erschliessen. Zunächst erkennt man, dass die Steigegeschwindigkeit u nach und nach abnimmt und nach der Zeit $t_1 = \frac{v \sin\alpha}{g}$ ganz erlischt. In horizontaler Richtung hat der bewegte Körper unterdessen (indem man für t in Gleichung (1) und (3) den eben gefundenen Werth von t' einsetzt) den Weg

$$\frac{v^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

beschrieben, in verticaler Richtung die Höhe

$$y_1 = \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

erreicht, die zugleich die bedeutendste ist, zu welcher der geworfene Körper unter den gegebenen Bedingungen emporsteigen kann.

Nachdem die Steighöhe y' errungen und zugleich die Geschwindigkeit u im positiven Sinne erloschen ist, muss der bewegte Körper, durch die Fallbeschleunigung getrieben, wieder sinken und, nachdem er eben so viel Secunden hindurch gefallen ist als er vorher gestiegen war, die Höhe der Ausgangslinie oX, sowie auch die frühere Geschwindigkeit, jetzt jedoch im negativen Sinne, wieder gewinnen. Alles dies lässt sich aus dem Gesetze der Fallbewegung folgern. Aber man wird auch durch nähere Betrachtung der Gleichung (3) darauf aufmerksam gemacht; denn sie zeigt, dass y für zwei Zeitpunkte den Werth Null annimmt, nämlich für $t = 0$, d. h. den Zeitpunkt des Beginns der Bewegung, und für

$$t = \frac{2v \sin\alpha}{g} = 2t_1.$$

Indem man diesen zweiten Werth von t in Gleichung (2) einsetzt, wird erhalten $u = -v \sin\alpha$. In Gleichung (1) eingesetzt, ergiebt sich $x = \dfrac{2v^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = 2x'$. Die Wegeslänge $2x'$ ist also die weiteste horizontale Entfernung, die der geworfene Körper erreicht.

Das Verhältniss der Steighöhe y' zur Wurfweite $2x'$

$$\frac{y'}{2x'} = \frac{v^2 \sin^2\alpha \,.\, g}{2g \,.\, 2v^2 \sin\alpha \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{4 \cos\alpha} = \frac{tng\,\alpha}{4},$$

ist, wie man sieht, unabhängig von der Wurfgeschwindigkeit v. Bei gegebener Wurfgeschwindigkeit v wird die grösste Wurfweite $2x'$ für $\alpha = 45^0$ erhalten. Denn nach den Regeln der Trigonometrie ist

$$2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha.$$

Ein Sinus kann aber keinen grössern Werth haben als $\sin(2 \,.\, 45^0) = \sin 90^0 = 1$. Für den Wurfwinkel von 45^0 ist $tng\,\alpha = 1$. Es ist also das Verhältniss der Steighöhe zur grössten Wurfweite wie 1 zu 4.

Die Geschwindigkeit V an beliebiger Stelle der Bahn ist aus der daselbst herrschenden verticalen Geschwindigkeit u und der horizontalen Geschwindigkeit $v \cos\alpha$ zusammengesetzt, und da beider Richtungen einen rechten Winkel einschliessen, so ist

$$V = \pm\sqrt{v^2 \cos^2\alpha + u^2} = \sqrt{v^2 \cos^2\alpha + v^2 \sin^2\alpha - 2g\left(v \sin\alpha\, t - \frac{g}{2} t^2\right)},$$

und endlich mit Beziehung auf Gleichung (3),

$$V = \pm\sqrt{v^2 - 2gy} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die Geschwindigkeit V vermindert sich während des Aufsteigens von ihrem grössten Werthe v allmälig bis zu der wagerechten Geschwindigkeit $v \cos \alpha$, die am Scheitelpunkte der Curve herrscht, um dann während des Niedergangs bis zum Werthe v wieder anzuwachsen.

Wenn man den Werth von t aus Gleichung (1) in (3) einsetzt, gelangt man zu einer Gleichung zwischen x und y,

$$y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\, x - \frac{g}{2}\, \frac{x^2}{v^2 \cos^2 \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

welche bei gegebener Geschwindigkeit und Richtung des Wurfs sich vorzugsweise eignet, eine beliebige Anzahl Punkte der Wurfbahn zu bestimmen und danach die Curve zu zeichnen.

Der Werth von x aus dieser Gleichung abgeleitet, ist

$$x = \frac{v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2gy}{v^2 \sin^2 \alpha}}\right),$$

$$= x_1 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{y}{y'}}\right).$$

Dieser Ausdruck zeigt zunächst, was wir schon auf anderm Wege gefunden hatten, dass für $y = 0$ sich die beiden Werthe $x = 0$ und $x = 2x'$ ergeben, sowie dass für $y = y' = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ man $x = x'$ zu setzen hat, dass also der Fusspunkt der grössten Steighöhe in der Mitte der horizontalen Länge der Bahn gelegen ist. Ferner bemerkt man, dass für eine bestimmte Grösse von y sich jedesmal zwei Werthe von x vorfinden, von welchen der eine eben so weit über die Mitte der horizontalen Bahnlänge hinaus sich erstreckt, als der Endpunkt des andern von der Mitte zurückliegt. Die Bahncurve besteht also aus zwei ganz gleichen Aesten, welche sich vom Scheitelpunkte aus nach beiden Seiten senken. Im Scheitelpunkte selbst ist, wie schon bemerkt, die Richtung der Bewegung horizontal.

Setzt man in Gleichung (5), $\alpha = 0$, d. h. nimmt man an, dass die Richtung der beginnenden Bewegung in die Horizontalebene falle, so verschwindet der erste Theilsatz im zweiten Gliede der Gleichung und man erhält

$$y = -\frac{g}{2}\, \frac{x^2}{v^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Das negative Zeichen macht darauf aufmerksam, dass unter der gewählten Voraussetzung nur eine Senkung des geworfenen Körpers möglich ist. Im Uebrigen ist die so gefundene Gleichung die allgemeine bekannte der Parabel, wenn deren Coordinaten von dem Scheitelpunkte aus zählen. Da diese Gleichung in der ihr hier gegebenen Gestalt, gleichsam den einen Ast der Bahn eines geworfenen Körpers darstellt, beide Aeste aber einander gleich sind, so folgt, dass geworfene Körper bei ganz freier Beweglichkeit parabolische Bahnen annehmen.

29 Der aus einem Wasserbehälter ausfliessende Strahl, wenn die Anordnung so getroffen ist, dass die Richtung des Ausflusses beliebige Aenderungen gestattet, giebt ein ziemlich treues Bild der Wurfbahnen, und bietet zugleich mannichfaltige Beispiele zu Berechnungen. Es sei z. B. bei wagerechtem Ausflusse auf eine Senkung $y = -h$ des Strahls, dessen horizontale Sprungweite zu $x = l$ Meter gemessen worden, so folgt aus Gleichung (6) die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers

$$v = l\sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

Bildet aber die Richtung des Ausflusses mit der Horizontalebene einen Winkel α, und bedeutet wie vorher $-h$ die Senkung des Aufschlagepunktes unter die Höhe der Oeffnung, so findet man nach Gleichung (5)

$$v = l\sqrt{\frac{g}{2\cos\alpha\,(l\sin\alpha + h\cos\alpha)}}.$$

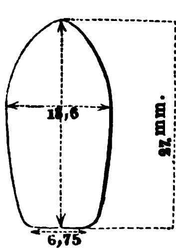
Konnte die horizontale Sprungweite $x = l$, sowie die Sprunghöhe $y = h$ gemessen werden, so lässt sich hieraus die Neigung des Strahls ableiten, weil $\frac{h}{l} = \frac{tng\,\alpha}{4}$, und dann kann man wieder die Ausflussgeschwindigkeit, etwa mittelst der Gleichung $h = \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g}$, berechnen.

Für den Fall grosser Geschwindigkeiten, wie die der Büchsen- und Kanonenkugeln, sind die in Nro. 28 entwickelten Gleichungen nicht mehr genau anwendbar, weil der Widerstand der Luft eine genaue Entfaltung der parabolischen Bahn stört, und besonders die Länge des zweiten Astes derselben in auffallender Weise abkürzt. Am genauesten noch lässt sich der lothrechte Theil des Weges bestimmen, wenn, wie gewöhnlich, die lothrechte Seitengeschwindigkeit die weithin geringere ist. So z. B. kann die Annahme, dass eine Kugel, die mit 500 Metern mittlerer Geschwindigkeit wagerecht in Bewegung gesetzt worden, nach Verlauf von $^1/_5$ Secunde, oder einer Flugstrecke von ungefähr 100 Metern sich bereits um $s = \frac{g}{2}t^2 = \frac{9{,}81}{2}(^1/_5)^2 = {}^1/_5$ Meter gesenkt haben müsse, nur wenig von der Wahrheit abweichen. Beginnt die Kugel ihre Bewegung mit einem geringen Neigungswinkel α aufwärts oder abwärts zur Wagerechten, so lässt sich ihr Höhenstand y nach Verlauf eines Zeittheiles t mit Hülfe der Gleichung (3) bestimmen. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass wenn Winkel α unterhalb der Horizontalen liegt, im Sinne der genannten Formel $\sin\alpha$ negativ gesetzt werden muss.

30 Das Geschoss des Zündnadelgewehrs ist theils wegen seiner eigenthümlichen Gestalt (Fig. 16), theils wegen einer raschen Rotation um seine Längenaxe (Nro. 48) während des Flugs ungemein geeignet, den Luftwiderstand zu überwinden. Seine Flugbahn nähert sich daher mehr,

als es bei vielen anderen mit grosser Geschwindigkeit geworfenen Körpern der Fall ist, der Parabel. Es ist gelungen, dieselbe dadurch sichtbar darzustellen, dass man Stationsscheiben aus dünnem Papier an Pfählen in der Art befestigte, dass die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte möglichst mit der durch Vorversuche bestimmten Bahnlinie zusammenfiel. Bei einem correcten Schuss musste dann die Kugel sämmtliche Scheiben durchschlagen und durch die gebildeten Oeffnungen die beschriebene Bahn genau bezeichnen. So müssen z. B. für die Schussweite von 600 Schritt (ein Schritt = 2,4 preuss. Fuss) die Mittelpunkte der in gleichen Abständen auf einander folgenden Stationsscheiben in nachfolgenden Höhen über derjenigen horizontalen Linie angebracht sein, welche die Anschlagshöhe des Schützen angiebt *).

Fig. 16.



Schritte	Steighöhe in preuss. Zollen beobachtet	Berechnete Zeit in Secunden	Unterschiede
0	0	0	0
100	72	0,268	0,268
200	114	0,511	0,243 (*)
300	135	0,794	0,283
400	126	1,077	0,283
500	78	1,405	0,328
600	0	1,701	0,296

Die dieser Flugbahn entsprechende Curve ist sehr flach. Um die Ungleichheit ihrer beiden Aeste deutlicher sichtbar zu machen, ist die Curve (Fig. 17) construirt worden, in welcher bei unverhältnissmässiger

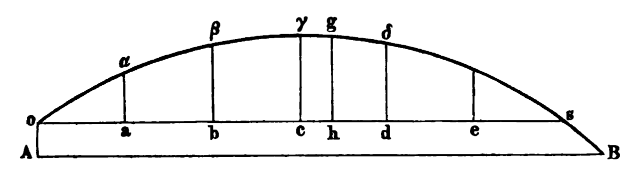
Fig. 17.

Verkürzung der Wurfweite die relativen Ordinaten der Bahn, d. h. die relativen lothrechten Erhebungen ihrer Punkte über der wagerechten Ziel-

*) Heerwesen und Infanteriedienst der königl. preuss. Armee, von A. v. Witzleben. 10. Aufl. S. 185.

linie os genau eingehalten sind. Man erkennt leicht, dass die grösste Erhebung über die Mitte der Bahn hinaus liegt, und dass in Folge davon der zweite Ast der Curve etwas stärker abfällt, als der erste ansteigt. Es ist hiernach selbstverständlich, dass die horizontale Geschwindigkeit $v \cos \alpha$ des Geschosses allmälig abnimmt, dass folglich die gleichen Wegesstrecken oa, ob u. s. w. stufenweise zunehmender Bewegungszeiten bedürfen. Diese

Fig. 18.



Aenderungen, an und für sich nur gering, sind ohne merklichen Einfluss auf die Dauer und Höhe des senkrechten Ansteigens und des darauf folgenden Niedergangs der Kugel. Zur Bestimmung der Dauer der Bewegung würde daher die Gleichung [Nro. 28 (3)] unmittelbar Anwendung finden, wenn die grösste Steighöhe $\frac{v^2 \sin^2 \alpha}{g}$ genau bekannt wäre. Da dieselbe die Höhe von 135 Zoll (bei 300 Schritt Entfernung) augenscheinlich nur wenig überschreiten kann, so wollen wir, um ihren Werth genauer festzustellen, vorläufig annehmen, dass die auf einander folgenden gleichen Wegesstrecken oa, ab, bc in gleichen Zeitabschnitten durchschritten werden, dass also die Wege $oa = x$, $ob = 2x$, $oc = 3x$ u. s. w. den Zeiten t, $2t$, $3t$ u. s. w. bis nt entsprechen. Unter dieser Bedingung lässt sich durch Combination der Gleichungen

$$y = v \sin \alpha \,.\, t - \frac{g}{2} t^2 \quad \text{und}$$

$$y' = v \sin \alpha \,.\, nt - \frac{g}{2} n^2 t^2$$

der Ausdruck $t = \sqrt{\frac{2\,(ny - y')}{g\,(n^2 - n)}}$ herleiten, mit dessen Hülfe aus den bekannten Erfahrungsresultaten die Grösse von t (d. h. des Zeitabschnittes, während dessen Verlauf das Geschoss wagerecht den Raum oa durchschritten, oder senkrecht sich von a bis α erhoben hat) sich berechnen lässt. Setzt man z. B. nach Angabe der zweiten Spalte vorstehender Tabelle, $y = 6$ Fuss, $y' = 11{,}25$ Fuss, folglich $n = 3$; so findet man $t = 0{,}2683$ Secunden. Aus dem Mittel von dreien derartigen Zahlenwerthen ergab sich

$$t = 0{,}268.$$

Diese Zahl als die der Wahrheit am nächsten kommende vorausgesetzt, findet man die senkrechte Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses [Nro. 28 (3)]:

$$v \sin \alpha = \frac{y + \frac{g}{2} t^2}{t} = 26{,}57 \text{ preuss. Fuss};$$

folglich die grösste Steighöhe

$$H = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 11{,}30 \text{ Fuss},$$

indem man sich erinnert, dass nach preussischem Maasse die Beschleunigung

$$g = 31{,}25 \text{ Fuss (Nro. 20).}$$

Die Zeit, welche das Geschoss nöthig hat, um den höchsten Punkt seiner Bahn zu erreichen, ist

$$\frac{T}{2} = \frac{v \sin \alpha}{g} = 0{,}850 \text{ Secunden.}$$

Dieselbe Zeit braucht es wieder, um zur Höhe des Ausgangspunktes zurückzusinken. Die ganze Bewegungszeit ist also

$$T = 1{,}70 \text{ Secunden,}$$

und die mittlere Geschwindigkeit in der Horizontalen, da 1 Schritt gleich 2,4 Fuss,

$$v \cos \alpha = \frac{600 \cdot 2{,}4}{1{,}70} = 847 \text{ Fuss.}$$

Die Kenntniss der grössten Steighöhe leitet aber nicht nur unmittelbar zu derjenigen der Bewegungszeit des Geschosses, sondern auch der Zeitpunkt lässt sich daraus ableiten, in welchem ein irgend beliebiger Punkt der Bahn erreicht wird, sobald nur die Höhe dieses Punktes über der Visirlinie (d. i. seine Ordinate) bekannt ist. Denn die Zeit des senkrechten Aufsteigens, ebenso wie die des freien Falls eines Körpers ist, wie wir wissen, unabhängig von einer gleichzeitigen horizontalen Bewegung.

Nun folgt aus Gleichung [Nro. 28 (3)]

$$y = v \sin \alpha\, t - \frac{g}{2} t^2,$$

dass der Werth von

$$t = \frac{v \sin \alpha}{g} \mp \sqrt{\frac{2\, v^2 \sin^2 \alpha}{2\, g\, g} - \frac{2\, y}{g}}$$

$$= \frac{T}{2} \mp \sqrt{\frac{2\,(H - y)}{g}}.$$

In diesem Ausdrucke ist $T = 1{,}70$ und $H = 11{,}30$ bekannt, indem man daher für y den Werth irgend einer der Ordinaten der Curve einsetzt, lässt sich die Zeit berechnen, welche das Geschoss braucht, um den dieser Ordinate entsprechenden Punkt der Bahn zu erreichen, und zwar bei Anwendung des negativen Zeichens, wenn y dem vordern Aste der Curve angehört, des positiven Zeichens, wenn y sich auf den hintern Ast bezieht.

Die Zahlen der dritten Spalte der Tabelle sind auf diesem Wege bestimmt worden. Wenn auch ihre Genauigkeit durch geringe Beobachtungsfehler in etwas beeinträchtigt erscheint*), so lassen doch ihre Unterschiede eine allmälige Zunahme der für gleiche horizontale Wegesstrecken erforderlichen Bewegungszeit deutlich erkennen.

Die ersten hundert Schritte sind in der Zeit von 0,268 Secunden zurückgelegt worden. Hiernach begann die Bewegung mit einer horizontalen Anfangsgeschwindigkeit von ungefähr

$$\frac{100 \cdot 2{,}4}{0{,}268} = 896 \text{ Fuss.}$$

Die ganze Geschwindigkeit v beträgt bei der geringen Neigung der Bahn nur wenig mehr.

Um diese Neigung zu bestimmen, hat man zu beachten, wie vorher gezeigt wurde, dass

$$v \sin \alpha = g \cdot \frac{T}{2} = 31{,}25 \cdot 0{,}850$$

und

$$v \cos \alpha = \frac{x}{t} = \frac{240}{0{,}268}.$$

Es ist daher

$$tng\, \alpha = \frac{31{,}25 \cdot 0{,}850 \cdot 0{,}268}{240} = tng\, 1^0\, 42'.$$

Endlich kann es noch von Interesse sein, die Abscisse x_1 des höchsten Punktes der Flugbahn kennen zu lernen. Nun wird der Raum zwischen 300 und 400 Schritt in 0,283 Secunden zurückgelegt; auf den Weg von 300 bis zu x_1 Schritt kommen aber nur 0,056 Secunden. Da nämlich für $x = 300$; $y = 11{,}25$ Fuss; für $x = x_1$; $y = 11{,}30$ Fuss, so folgt (Nro. 18), dass die Zeit, während der der Weg von 300 bis x_1 Schritt zurückgelegt wird,

$$t = \sqrt{\frac{2\,(11{,}30 - 11{,}25)}{31{,}25}} = 0{,}056.$$

Hiernach findet sich $x_1 = 320$ Schritt. Der aufsteigende Ast der Bahn hat also eine horizontale Länge von 320 Schritt, der niedergehende Ast nur von 280 Schritt.

---

*) Die mit (*) bezeichnete Abweichung von dem allgemeinen Verhalten wage ich jedoch nicht kurzer Hand einem Beobachtungsfehler beizumessen. Dieselbe zeigt sich während der Bewegung von 100 zu 200 Schritt als eine nicht unbedeutende Verminderung der Bewegungszeit und deutet also auf eine Zunahme der Geschwindigkeit, welche das Geschoss noch ausserhalb des Rohrs erfährt. Eine solche Zunahme erscheint aber keineswegs unmöglich, wenn man bedenkt, dass die durch Entzündung des Pulvers gebildeten Gase in dem Augenblicke, da die Kugel das Rohr verlässt, noch einen sehr grossen Theil ihrer Spannung und treibenden Kraft besitzen.

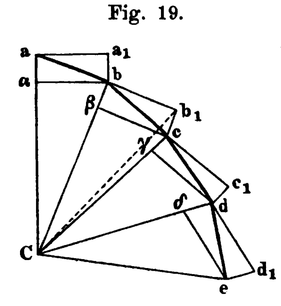
Centralbewegung. Die Richtung des Falles, die Lothlinie, geht bekanntlich in ihrer Verlängerung durch die Mitte der Erde. Die lothrechte Seitenbewegung eines geworfenen Körpers ist daher von allen Punkten seiner Bahn aus streng genommen gegen einen allen gemeinschaftlichen Punkt gerichtet. Bei der Wurfbewegung nimmt man gleichwohl keine Rücksicht auf dieses Verhalten, weil die Abweichungen der Lothlinien verschiedener Punkte einer Wurfbahn vom Parallelismus von keiner bemerkbaren Grösse sind.

Bei den verwandten Bewegungen der Planeten und ihrer Trabanten, sowie der Kometen, welche sämmtlich gegen die Sonne gravitiren, d. h. ein dem Falle der Erdkörper ähnliches Streben besitzen, gegen die Sonne zu fallen, wird aber jene Abweichung vom Parallelismus so auffallend, dass sie eine veränderte Bewegungsform bedingt, die Centralbewegung, oder die stets nach demselben Punkte, dem Centralpunkte hin abgelenkte Bewegung.

Eine jede gerade Linie, welche man von einem Punkte der Bahn eines derartig bewegten Körpers gegen den Centralpunkt zieht, heisst ein Leitstrahl (*radius vector*). Alle Centralbewegungen besitzen die Eigenschaft, dass die von einem Leitstrahl in gleichen Zeiten beschriebenen Räume, d. h. Ausschnitte, die von zwei Leitstrahlen und einem Bogenstück der Bahn begränzt sind, gleiche Flächeninhalte besitzen.

Es sei a (Fig. 19) der bewegte Punkt, v seine Geschwindigkeit in dem in Betracht gezogenen Augenblicke. Vermöge derselben würde er in der nächsten Zeit t den Weg $vt = aa'$ zurücklegen. Allein dieser Punkt a ist gleichzeitig einer beschleunigten Bewegung in der Richtung des Leitstrahls und gegen den Punkt C unterworfen, durch welche er in dem Augenblicke seiner Ankunft in a gegen C hin die Geschwindigkeit u gewonnen hatte. Denkt man sich t als ein Zeitelement, so wird u während dessen Verlaufs keine merkliche Aenderung erfahren, man wird die entsprechende Bewegung gegen C als gleichförmig betrachten und $= ut$ setzen dürfen.

Fig. 19.

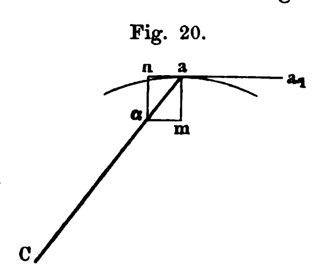


Es sei $a\alpha$ dieser Weg, so werden sich die beiden Seitenbewegungen aa' und $a\alpha$ zu der Mittleren ab ergänzen, und es ist das Dreieck aCb der in der Zeit t durch den Leitstrahl beschriebene Raum. In der folgenden gleichen Zeit t würde der bewegte Punkt den Weg $bb' = ab = v't$ beschreiben müssen, wenn er nicht unterdessen (durch Beschleunigung in der Zeit t) die Geschwindigkeit u' nach C erlangt hätte und vermöge derselben durch den Weg $u't = b\beta$ getrieben würde. So setzen sich die Bewegungen bb' und $b\beta$ wieder zu der Mittlern bc zusammen, und der durch den Leitstrahl beschriebene Raum ist bCc. Es ist aber $bCc = aCb$. Denn Dreieck $bCc = bCb'$ als Dreieck von gleicher Grundlinie

und Höhe, und $bCb' = aCb$, weil $ab = bb'$. In ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass in allen folgenden gleichen Zeiträumen t gleiche Flächenräume beschrieben werden müssen; dass also ganz allgemein der vom Leitstrahl gebildete Ausschnitt einen der Zeit proportionalen Flächeninhalt besitzt.

Durch die beschleunigte Bewegung gegen C kann die anfängliche Geschwindigkeit v vergrössert oder auch vermindert werden. Ob das eine oder das andere geschieht, ist abhängig von der Grösse des Winkels $\varphi = \alpha a a'$ (Fig. 20), welchen an irgend einem Punkte a der Bahn dessen Tangente, d. h. die Richtung der Geschwindigkeit v mit dem Leitstrahl einschliesst. Denn man denke sich die veränderte Geschwindigkeit u an dieser Stelle in ihre Seitengeschwindigkeiten $an = u\cos\varphi$ nach aa' und $am = u\sin\varphi$, senkrecht auf aa' zerlegt, so wird $u\cos\varphi$ einen positiven oder einen negativen Werth annehmen, je nachdem φ kleiner oder grösser als 90^0, also die Geschwindigkeit v in dem einen Falle vergrössern, in dem andern verringern; während $u\sin\varphi$ nur eine Verschiebung des Bogenelementes aa' senkrecht gegen seine Richtung veranlassen kann. Wird Winkel $\varphi = 90^0$, so ist $u\cos\varphi = 0$ und v bleibt unverändert.

Fig. 20.



Der Geschwindigkeitsunterschied $v - v'$ an zweien beliebig gewählten Punkten a und b (Fig. 19) der Bahn, deren ungleiche Abstände von dem Centralpunkte durch die Leitstrahlen l und l' gegeben sind, ist genau gleich der Geschwindigkeitszunahme oder der Einbusse, welche der bewegte Körper hätte erfahren müssen, wenn er, mit der Geschwindigkeit v (die er am Punkte a bereits besass) beginnend, sich in gerader Linie gegen den Centralpunkt hin durch die Wegesstrecke $l - l'$ bewegt hätte. Um einzusehen, dass dieser Satz nur ein besonderer Fall des allgemein geltenden Erfahrungssatzes ist, dass ein physikalischer Punkt verschiedenen gleichzeitigen Bewegungen genau so gehorcht, wie wenn er der einen nach der andern zu folgen hätte, wollen wir den Gang der Bewegung zunächst nur auf die Länge eines Bahnelementes verfolgen. Auf einer so kurzen Strecke können sämmtliche Leitstrahlen als parallel angesehen werden. Ein entlang derselben beschleunigter Körper verhält sich also ähnlich einem fallenden oder gegen die Richtung des Falls aufsteigenden Körper, und muss demgemäss seine Anfangsgeschwindigkeit ändern. Dasselbe geschieht für das nächste Bahnelement und für alle folgenden zwischen den Punkten a und b. Da sich alle diese Aenderungen addiren, so bildet sich schliesslich der Geschwindigkeitsunterschied $v - v'$ aus, welcher dem Unterschiede der Leitstrahlen $l - l'$ in dem oben angedeuteten Sinne entspricht. Nehmen wir z. B. an, die Bewegung gegen den Centralpunkt gehorche dem Fall-

gesetze, so wäre $v_1 = \sqrt{v^2 + 2g(l - l_1)}$ [Nro. 28 (4)]. Es ist nun einleuchtend, dass eine Geschwindigkeitszunahme durch Annäherung an den Centralpunkt wieder aufgehoben werden muss, wenn während des Fortgangs der Bewegung der frühere Abstand wieder erreicht wird; dass folglich bei der Kreisbewegung, bei welcher die Entfernung des rotirenden Punktes vom Centralpunkte sich nicht ändert, auch die Geschwindigkeit (unter dem Einflusse der centralen Beschleunigung) keine Aenderung erleiden kann.

Gestützt auf eine sehr grosse Anzahl zuverlässiger Beobachtungen hat bekanntlich Kepler den Beweis geführt, dass die Bahnen der Planeten Ellipsen sind, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet. Alle diese Himmelskörper müssen folglich an verschiedenen Punkten ihrer Bahnen ungleiche Geschwindigkeiten annehmen, und zwar jeder derselben in seiner Sonnennähe die grösste, bei der grössten Entfernung von der Sonne die geringste.

Die vorher erörterten, auf die Centralbewegung sich beziehenden Lehrsätze gelten allgemein für jedes denkbare Gesetz einer zwischen dem Centralpunkte und dem bewegten Punkte stattfindenden beschleunigenden Ursache. Indem Newton noch ausserdem die Bedingung einführte, dass die Grösse der Beschleunigung dem Quadrate des Abstandes vom Centrum umgekehrt proportional sein solle, gelang es ihm darzuthun, dass in diesem Falle die Bahn des bewegten Punktes zu den Kegelschnitten gehören müsse, also beispielsweise eine Ellipse oder ein Kreis sein könne.

Vierter Abschnitt.

Von den bewegenden Kräften und von der Körpermasse.

Nachdem man sich überzeugt hat, dass Bewegung der natürliche Zustand aller Körper ist, lässt es sich verstehen, dass ein bewegter Körper in diesem Zustande unveränderlich verharren kann; dass z. B. die Erde in ewiger Gleichförmigkeit sich Tag für Tag in der Zeit von 86 164 Secunden um ihre Axe dreht. 32

Allein solche Beispiele unveränderter Fortdauer einmal vorhandener Geschwindigkeit sind, wie wir aus den vorhergehenden Abschnitten erkannt haben, das verhältnissmässig seltnere Vorkommen. Fast alle Bewegungserscheinungen, die einer genaueren Forschung zugänglich waren,

zumal alle auf der Erde vorkommenden sind veränderlich. Indem wir uns zu der Beantwortung der Frage wenden, worauf diese Veränderungen beruhen, wollen wir zunächst hervorheben, dass der Vorgang der beschleunigten oder der verzögerten Bewegung eines Körpers nicht in einem selbstständigen oder innern, d. h. von der Aussenwelt unabhängigen Vermögen desselben gesucht werden darf; denn die Annahme eines solchen Vermögens ist unverträglich mit der durch die Thatsachen gerechtfertigten Vorstellung eines allgemeinen Bewegungszustandes der Körperwelt.

Die Anhänger der Aristotelischen Schule neigten gleichwohl zu jener Annahme. Nur im Einklange mit derselben konnte die Erde mit ihren Bewohnern als bevorzugter Theil des Weltalls, als ruhende Mitte desselben, gleichsam als letzter Zweck der Schöpfung gelten. Diesem Zwecke nach seinen mannichfaltigen Richtungen zu genügen, sollte sich die ganze übrige Natur um die Erde reihen. Ihre Elemente, als besondere Formen körperlicher Beschaffenheit, sollten nicht nur mit besonderen, sie unterscheidenden Merkmalen ausgestattet sein, sondern folgerichtig war jedem derselben ursprünglich sein Raum angewiesen, den es, wenn daraus entfernt, aus innerm Drange in möglichst geradliniger Bewegung wieder aufsuchte. Um den Mittelpunkt der Welt suchte sich zunächst das Element, E r d e, zu lagern, dann folgten W a s s e r, L u f t, F e u e r, und endlich weit erhaben über Allen der A e t h e r. Diese Elemente können sich unter einander verbinden. Hierdurch mehr oder weniger aus ihren natürlichen Lagen entfernt, suchen sie in dieselben zurückzutreten. Daher der Fall der Steine, vorzugsweise dem Elemente E r d e angehörend, in der Luft, ihr Untersinken im Wasser; daher das Aufsteigen der Luft im Wasser, des Feuers in der Luft; lediglich in Folge eines innern Strebens, eines Bedürfnisses, den von der Natur ursprünglich angewiesenen Raum wieder zu gewinnen.

Solche Vorstellungen, hervorgegangen aus oberflächlich beobachteten und darum unrichtig aufgefassten Thatsachen, so lange man daran festhielt, waren ein Hemmschuh gegen das Fortschreiten wirklicher Erkenntnisse. Sie mussten, wenn auch widerstrebend und unter lange fortdauernder Einsprache, hauptsächlich religiöser Vorurtheile, allmälig aufgegeben werden, seitdem selbst die befangensten Geister das Auge nicht mehr gegen die Thatsache verschliessen konnten, dass die Erde sich bewegt, dass sie nur ein winziger Theil unseres Sonnensystems, geschweige denn des Weltalls ist; dass aber ihre Bevorzugung in irgend welchem Sinne schon aus dem Grunde gar nicht in Frage kommen kann, weil uns bis jetzt jeder Anhalt entgeht, uns von den Vorgängen auf anderen Weltkörpern und von ihrer Beschaffenheit als Aufenthaltsstätte organischer und geistig begabter Wesen einen Begriff zu bilden.

33 Jene früheren Ideen von einem selbstständigen Vermögen der Körper, ihre Zustände wenn nicht ganz zu beherrschen, doch nach gewissen

Richtungen zu verändern, sind um so weniger zeitgemäss geblieben und haben um so vollständiger ihre Stützen verloren, je mehr und je allgemeiner man erkannt hat, dass alle Aenderungen in der Natur auf wechselseitigen Einwirkungen der Körper beruhen.

In zahlreichen Fällen tritt diese Erkenntniss aus der unmittelbaren Betrachtung der Vorgänge unzweideutig hervor; häufig aber auch ist sie nur Folgerung aus einer Reihe logisch geordneter, verständiger Erwägungen, der Ausspruch wohlbegründeter, wenn auch zuerst nur hypothetischer Anschauungen. Doch in keinem Falle ist jemals eine Aenderung an einem Körper oder an Theilen desselben beobachtet worden, deren Eintritt in unzweifelhafter Weise als unabhängig von dem Einflusse anderer Körper oder anderer Körpertheile hätte anerkannt werden müssen.

Kraft. Einwirkungen jeglicher Art, welche ein Körper auf andere Körper, oder auch Theile eines Körpers auf andere Theile desselben ausüben, nennt der Physiker Kraftäusserungen und ihre Ursachen Kräfte. 34

So beruhen die Bewegungen durch den Wurf, durch das Drücken, Ziehen, Stossen augenscheinlich auf Einwirkungen, die von Aussen kommen. Immer kommen dabei wenigstens zwei Körper in Betracht, die in eine Wechselwirkung treten. Eine ähnliche Bewandtniss hat es mit den durch das strömende Wasser und den Wind eingeleiteten Bewegungen. Dies ist so einleuchtend, dass Niemand einen Anstand nimmt, z. B. von dem Drucke des Windes gegen ein Segel zu sprechen. Fast ebenso leicht lässt sich die Bewegung eines Schiffes durch das Ruder, ungeachtet dieses gleichsam einen Bestandtheil von jenem bildet, auf einen von Aussen kommenden Einfluss zurückführen. In der That besteht die Arbeit des Ruders, in so weit sie zur Bewegung des Schiffes dient, in einer mittelbaren Erzeugung des fehlenden Stroms. Denn das ruhende Wasser muss gegen eine darin bewegte Fläche genau so wirken, wie das strömende Wasser gegen eine darin eingetauchte ruhende Fläche. Wer je ein Ruder in der Hand führte, weiss, dass das Wasser auf dasselbe drückt; aber er hat auch erfahren, dass dieser Druck im engsten Zusammenhange steht mit einem von der Hand durch Vermittlung des Ruders gegen das Wasser ausgeübten Druck. In der Art, dass die Zunahme des letztern sogleich auch die des erstern nach sich zieht, und dass das Aufhören des einen die des andern zur Folge hat.

Druck und Gegendruck. In ähnlicher Weise wie hier äussert sich eine jede Kraft, vermöge der ein Körper einen andern zu bewegen strebt, so lange sie wirksam ist, als Druck nach entgegengesetzten Seiten. Von diesem Erfahrungssatze kennt man keine Ausnahme, und er gilt auch für Theile ein und desselben Körpers, wenn bewegende Kräfte zwischen ihnen zur Thätigkeit kommen. Druck ruft aber nicht nur Gegendruck hervor, sondern es sind auch beide stets gleich an Grösse. Bekanntlich zeigen die Körper gegen den Druck eine gewisse 35

Nachgiebigkeit; sie werden, je nach der Stärke desselben, mehr oder weniger zusammengedrückt, oder auch gedehnt; d. h. sie erleiden eine Formveränderung, mit deren Grösse auch der Gegendruck zunimmt, und deren Gränze erreicht ist, wenn der Gegendruck der grösstmöglichen Stärke des Druckes gleich geworden ist. Sehr deutlich zeigt dieses Verhalten eine mit Gewichten belastete Stahlfeder, deren Gegendruck, wenn sie gespannt ist, die Grösse der Belastung aufs Genaueste wiedergiebt; so dass man eine durch Druck oder Zug gespannte Feder mit bestem Erfolg zur Maassbestimmung der für die Spannung erforderten Kraft benutzen kann.

Der Gegendruck des federnden Bogens einer gespannten Armbrust dient nach Wegnahme der spannenden Kraft als Triebkraft. Jedermann weiss aber, dass letztere der erstern gleich ist. Hätte man ein Bedenken gegen diese Annahme, es müsste der Thatsache weichen, dass bei der geringsten Verminderung der spannenden Kraft alsbald der Gegendruck zu überwiegen beginnt.

Es ist einleuchtend, dass ein Stein, auf den Tisch gelegt, mit der ganzen Grösse seines Gewichtes auf diesen drückt. In Folge einer hierdurch bewirkten, zwar meistens sehr geringen, aber gleichwohl stets eintretenden Einbiegung der Tischplatte, und daraus wieder hervorgehenden elastischen Gegenkraft, empfängt der Stein genau den Druck, den er selbst ausübte, wieder zurück. Wäre es nicht der Fall, was sollte den Stein hindern, tiefer zu sinken, die Einbiegung zu vergrössern?

Wer denselben Körper auf der Hand trüge, würde den entsprechenden Gegendruck durch die Muskelkraft ausüben. Wenn durch rasche Bewegung der Hand der Druck gegen den Stein vergrössert und dieser endlich fortgeschleudert worden wäre, so würde nach dem Urtheil des Gefühls auch der Gegendruck des Steins, so lange er noch mit der Handfläche in Berührung blieb, eine sein Gewicht übersteigende Grösse angenommen haben. Der dann durch die Luft fliegende Stein drückt auf diese, verdichtet sie und schiebt sie zur Seite; aber denselben Druck giebt die Luft, eben in Folge ihrer zunehmenden Dichtigkeit, zurück und entzieht dadurch dem Stein allmälig seine Bewegung.

Zwei Schiffe in offnem Wasser können nicht von einander abgestossen, oder durch ein Tau verbunden, zu einander gezogen werden, ohne dass nicht beide durch entgegengesetzt gleichen Druck gleichzeitig bewegt werden. Die Nothwendigkeit dieses Verhaltens tritt überzeugend hervor, wenn wir in Erwägung ziehen, dass das Tau, der Leiter der Kraft, nach beiden Seiten hin gleiche Spannung annehmen muss.

Das Abwägen der Kräfte ist nur eine Anwendung des Satzes der Gleichheit von Druck und Gegendruck. Denn die Grösse einer Kraft, eines Drucks, ist gefunden, sobald es mittelst irgend einer Vorrichtung gelungen ist, die Stärke des Gegendrucks, den sie hervorbringeu kann, zu bestimmen. Doch ist zur Erreichung dieses Zwecks, je nach der Richtung und Grösse einer Kraft, nicht jede Maassgeräthschaft, welcher

der Name **Wage** zukommt, gleich gut geeignet. Die bekannteste und am häufigsten benutzte Form der Wage, die **Gleichwage**, dient vorzugsweise zur Bestimmung des Gewichtes der Körper, indessen kann sie, mit geringen Abänderungen und ohne Aenderung des Princips auch zum Messen anderer Kräfte verwerthet werden.

Was man Spannung oder Spannkraft eines Gases nennt, ist, auf die Flächeneinheit bezogen, der Druck gasartiger Theile gegen einander, von je zweien derselben, die sich berühren, mit gleicher Stärke, aber in entgegengesetztem Sinne ausgeübt, und nach allen Richtungen bis zu den Behälterwänden fortgepflanzt. So bildet sich durch die Entzündung des Pulvers ein Gas, welches, etwa in dem Rohr einer Kanone gespannt, vorwärts das Geschoss und rückwärts den Körper der Kanone zu treiben sucht.

36 **Innere Kräfte.** Kräfte dieser und ähnlicher Art, wenn sie zwischen zusammengehörigen oder auch nur als zusammengehörig betrachteten Theilen eines Ganzen wirksam sind, pflegt man innere Kräfte zu nennen. Ihre Thätigkeit, wo immer man sie vorgefunden hat, beschränkte sich auf Bewegungen nach entgegengesetzten Richtungen unter entgegengesetzt gleichen Drucken, so jedoch, dass ein gewisser Punkt des betreffenden Körpersystems, welchen man **Schwerpunkt** nennt, unverrückt blieb.

Die Drehung der Räder einer Locomotive lässt sich als durch innere Kräfte hervorgebracht ansehen. In der That könnte die Locomotive als Ganzes dadurch allein nicht in Bewegung gesetzt, d. h. der Vereinigungspunkt ihres Gewichtes, ihr Schwerpunkt, auch nicht um die kleinste Strecke dadurch verrückt werden. Die Möglichkeit einer fortschreitenden Bewegung verdankt sie einem äussern Einflusse, der Reibung auf den Schienen. Die Reibung äussert sich bekanntlich als ein Hinderniss gegen das Gleiten der Räder. Sie vermittelt dadurch eine Wechselwirkung, nämlich Druck und Gegendruck, zwischen dem festen Boden und der Locomotive, eine Wechselwirkung verwandt mit der Arbeit des Ruders im Wasser. Was wir Reibung nennen, hat also ganz die Bedeutung einer Kraft, eines Drucks, der hier von den Schienen ausgeht. Man spricht vom Widerstande der Reibung, weil die Richtung dieser Kraft derjenigen der Bewegung immer entgegengesetzt ist. Die Grösse dieses Widerstandes ist jedoch begränzt. Ihre Gränze ist von der Beschaffenheit des Bodens und vom Gewichte der Locomotive abhängig. Hat man die Gränze überschritten, z. B. durch eine zu grosse Anzahl angehängter Wagen, so gleiten die Räder der Maschine und diese bleibt stehen, wie gross immerhin die Kraft des Dampfes sei, wodurch die Räder gedreht werden.

Auch durch Pferdekraft allein würde ein Wagen nicht fortgezogen werden können, wenn nicht des Pferdes eignes Fortschreiten durch die Reibung seiner Füsse auf dem Boden, im Sinne eines entgegengesetzt gleichen Drucks vermittelt würde. Darum schärft man die Eisen der

Pferde, wenn auf glatter Schnee- oder Eisbahn ein Ausgleiten der Füsse (gleichbedeutend mit verminderter Zugkraft) zu befürchten steht.

Die lebenden Geschöpfe sind mit inneren Kräften ausgestattet, vermöge deren sie eine bis zu einem gewissen Grade freie Beweglichkeit ihrer Glieder, jedoch ausschliesslich nur in dem oben bezeichneten Sinne besitzen. Wie für alle thierischen Organismen, so gilt dies auch für den menschlichen Körper. Zu den Bestandtheilen desselben gehören zahlreiche Vorrichtungen und Hülfsmittel, zum Theil von überraschender Aehnlichkeit mit solchen, die man bei Maschinen von Menschenhand angebracht sieht. Sie dienen, um gewisse Einwirkungen, welche von einem Theile des Körpers ausgehen, auf andere Theile fortzuleiten und dort denselben die geeigneten Angriffspunkte zu verschaffen. So mannichfaltig die Bewegungen sind, welche dadurch den einzelnen Gliedern eingeprägt werden können; eine Bewegung des menschlichen Körpers, als Ganzes betrachtet, eine Veränderung seines Orts mit Beziehung zur Aussenwelt, mit einem Worte: Verrückung seines Schwerpunktes, kann durch die in ihm thätigen inneren Kräfte nicht herbeigeführt werden. Dazu gehört als nothwendige Vorbedingung eine Einwirkung von Aussen; so beim Fortschreiten die Festigkeit des Bodens und die Reibung.

So steht bei allen lebenden Geschöpfen die Ortsveränderung in vollständiger und unbedingter Abhängigkeit von äusseren Einflüssen. Unsere Bewegungen erlangen nur dadurch den Anschein der Freiheit und Selbstständigkeit, dass wir gelernt haben, manche äussere Kräfte zu beherrschen und für unsere Zwecke zu leiten.

37 Jeder Theil eines Körpers ist wieder ein Körper und Einwirkungen von Aussen zugänglich. Bekanntlich können selbst die kleinsten Körper und Körpertheile, einander hinlänglich nahe gebracht, die Eigenschaft annehmen, sich anzuziehen oder auch diejenige sich abzustossen. Man bezeichnet diese zwischen allen Körpertheilen im Augenblicke der Berührung zur Wirksamkeit gelangenden anziehenden und abstossenden Kräfte mit den Namen Cohäsionskraft und Expansionskraft, und ertheilt ihnen auch den gemeinschaftlichen Namen: Molekularkräfte.

In irgend welchem Zustande, indem sich ein Körper ohne gleichzeitiges, äusseres Zuthun befindet, zeigen sich diese seine Aggregatform beherrschenden Kräfte nach allen Richtungen hin entgegengesetzt gleich und sind unfähig, einseitige Bewegungen des Ganzen zu bewirken. Wohl können unter dem Einflusse der Molekularkräfte Bewegungen vorkommen, z. B. Ausdehnung durch Erwärmung oder Verdichtung bei eintretender Abkühlung. Aber solche Aenderungen finden nach verschiedenen Richtungen statt, und ohne Verschiebung des Schwerpunktes.

Nur durch äussere Kräfte können die Theile eines Körpers gezwungen werden, ihre gegenseitigen Stellungen so zu verschieben, dass daraus eine wirkliche Aenderung in der Lage des Ganzen hervorgeht. So lange derartige Aenderungen gewisse Gränzen, die Elasticitätsgränzen, nicht

überschritten haben, treten die Körpertheile nach Entfernung der äussern Einwirkung in den frühern Gleichgewichtszustand der Molekularkräfte zurück. Die Gewalt, womit es geschieht, nennt man elastische Kraft. Es ist schon früher erörtert worden, warum dieselbe dem von Aussen kommenden Drucke gleich, in der Richtung entgegengesetzt sein muss. Das Vermögen, elastischen Widerstand gegen Verschiebung der Theile, wie gegen Biegung, Drehung u. s. w., zu äussern, besitzen die festen Körper. Elasticität gegen verdichtende und ausdehnende Kräfte kommt allen Körpern zu.

Wenn die Theile verschiedenartiger Körper in Berührung kommen, so können allein schon in Folge ihrer wechselseitigen Einwirkung, doch häufiger unter begünstigenden äusseren Einflüssen, Erscheinungen von der Art eintreten, welche man chemische Vorgänge nennt. Sie charakterisiren sich wesentlich dadurch, dass in ihren Endresultaten, aus verschiedenartigen Theilen ein von diesen wieder verschiedenes Ganze, eine Verbindung gebildet wird, oder umgekehrt, dass aus einer Verbindung verschiedenartige Bestandtheile hervortreten. Als letzte Ursache solcher Vorgänge bezeichnet man die chemisch anziehende Kraft oder chemische Verwandtschaft (Affinität), während der Ausdruck Cohäsionskraft vorzugsweise auf die Wirkungen der wechselseitigen Anziehung gleichartiger Theile, z. B. die Bildung eines grössern Krystalls durch Nebeneinanderlagerung krystallinischer Theilchen bezogen wird.

Die Körper und ihre Theile treten nicht nur dann in Wechselwirkung, wenn sie sich berühren. Es ist längst dargethan, dass sie auch auf Abstand und selbst auf die weitesten Entfernungen hin in einem ununterbrochenen und lebhaften Verkehr stehen. 38

Die Annahme von wechselseitigen und entgegengesetzt gleichen Anziehungen und Abstossungen auf die Ferne ist von den Naturforschern nicht willkürlich gemacht worden. Sie ergab sich als der einfachste Ausdruck zur Bezeichnung der Ursache gewisser Erscheinungen, und zugleich als der den Bedingungen ihres Auftretens und ihrer Wiederkehr am meisten entsprechende. So bei der wechselseitigen Anziehung der Weltkörper, der Gravitation, ebenso bei den von der irdischen Schwere abhängigen Vorgängen, bei den magnetischen und elektrischen Erscheinungen.

Auch die Wärme- und Lichtwirkungen bieten uns zahlreiche Belege von Einflüssen, deren wahre Quelle in der Ferne liegt.

Durch Thatsachen, wie die hier angedeuteten, gelangte man schliesslich zur Erkenntniss eines durch die ganze irdische und ausserirdische Körperwelt vorhandenen innigen Zusammenhangs, einer Zusammengehörigkeit, in der jedes Glied seine wesentliche Bedeutung hat, und den seiner Grösse entsprechenden Einfluss übt, in der Nähe wie auf die weiteste Ferne hin.

Noch keinem Naturforscher ist es bis jetzt gelungen, von seinem Standpunkte aus, d. h. durch logische Folgerung aus den Thatsachen,

Einwirkungen auf einen Körper, deren nachweisbare Quelle nicht wieder ein Körper gewesen wäre, mit Sicherheit zu erkennen oder auch nur wahrscheinlicch zu machen.

Es giebt gegenwärtig in der Naturwissenschaft keine wohl begründetere, durch die Erfahrung mehr gerechtfertigte Vorstellung, als die des Begriffes Kraft, als einer wechselseitigen Einwirkung der Körper, die, wo immer sie zwischen zweien Körpern stattfinden mag, sich als ein entgegengesetzt gleicher Druck äussert.

39 Der Begriff Naturkräfte, welchen wir in dem Vorhergehenden festgestellt haben, fällt im Wesentlichen mit dem von Körpereigenschaften zusammen. Denn was wir Eigenschaften eines Körpers nennen, sind nichts Anderes, als seine zu unserer Erkenntniss gekommenen Einwirkungen auf andere Körper, z. B. auf den des Beobachters. Fehlten diese, d. h. besässen wir keine Mittel, die Eigenschaften eines Körpers wahrzunehmen, so würden wir auch nichts von denselben wissen können.

Insofern hat der Ausspruch: dass die Kräfte, welche einen Körper oder Theile desselben beherrschen, ausserhalb des von diesem Körper oder diesen Körpertheilen erfüllten Raumes liegen, seine volle Berechtigung. Nur bei unrichtiger Auffassung konnte er zu der naturwidrigen, weil durch keine Erfahrung begründeten Vorstellung führen, dass Naturkräfte etwas in der Natur für sich selbst Bestehendes, von den Körpern, nicht bloss durch Abstraction, sondern in Wirklichkeit Trennbares und nach der Trennung noch Vorhandenes sein könnten.

Obgleich also Kraft nie anders als im Begriffe etwas für sich selbst Bestehendes bezeichnet, so bleibt es doch immer gestattet, die Stärke der wechselseitigen Einwirkung zweier Körper, wenn sie bekannt ist, als besondere Grösse, als Zahl aufzufassen; und diese Betrachtungsweise ist dadurch um so mehr gerechtfertigt, ja geboten, dass überall da, wo Kräfte Bewegungen der Körper erzeugen oder zu erzeugen streben, die Maassbestimmung ihrer Grösse als Druck nicht nur denkbar, sondern in zahlreichen Fällen, wie bereits (Nro. 35) hervorgehoben wurde, mit grosser Schärfe ausführbar ist.

40 **Materie.** Obschon die Kräfte als Körpereigenschaften von dem Begriffe des Körperlichen nicht zu trennen sind, so fallen doch beide Begriffe nicht als identisch zusammen. Denn es ist Thatsache, dass verschiedene Körper sehr verschiedene Eigenschaften besitzen können, ja, dass die Eigenschaften ein und desselben Körpers mannichfachen Veränderungen unterworfen sind.

In jedem Körper muss folglich eine Unterlage gegeben sein, welche diese Aenderungen erfährt und von der aus die Kräfte sich äussern. Diese Unterlage, durch Abstraction von ihren Eigenschaften entkleidet, ist das, was der Physiker die Materie nennt.

Materie erfüllt den ganzen Weltraum. Sie ist theilbar. Jeder Körper als Individuum enthält davon einen mehr oder weniger grossen Antheil.

Die ganze Summe materieller Theile, welche in dem Raume eines Körpers eingeschlossen sind, bildet seine Masse. Die Masse muss also gleich dem Körper, dessen Grundlage sie darstellt, Erstreckung im Raume haben.

Die Materie in dem obigen abstracten Sinne bietet nichts Greifbares, überhaupt nichts sinnlich Wahrnehmbares und kann insofern kein Gegenstand physikalischer Forschung sein. Die Beantwortung der Frage, ob sie in ihrer Isolirtheit existirt oder existiren könnte, ist daher auch keine Aufgabe für die experimentelle Naturforschung. Sie würde für diese überdies ohne praktisches Interesse sein, indem der Versuch ihrer Lösung, wie scharfsinnig immerhin begonnen und ausgeführt, seine Rechtfertigung in der Erfahrung nicht finden könnte.

Diejenige Materie, mit welcher einzig und allein der Naturforscher als solcher sich beschäftigen kann, ist die durch Eigenschaften belebte Materie, der Stoff.

Jedem Körper liegt eine gewisse Menge eines mit Eigenschaften begabten Stoffs zu Grunde, durch welchen eben er sich als dieser besondere Körper zu erkennen giebt.

Die Erkenungsmittel sind Einwirkungen auf unsere Sinne, mögen diese nun unmittelbar oder auch nur mittelbar stattfinden. Man kann daher sagen: Stoff ist alles sinnlich Wahrnehmbare.

Ob alles Körperliche auf einen einzigen Grundstoff zurückführbar sei, oder ob die Natur in dieser Beziehung eine grössere Mannichfaltigkeit biete, ist von der Naturforschung bis jetzt als offene Frage gelassen. Nur vorläufig, als mit den bisherigen Erfahrungen am besten übereinstimmend, hat die Chemie dahin entschieden, dass es eine ziemlich grosse Anzahl Grundstoffe gäbe (es sind deren 63 bekannt), d. h. Stoffe, deren jeder sich durch gewisse Eigenschaften vor allen anderen unterscheidet, durch Eigenschaften also, welche ihm ausschliesslich angehören, und die man (im Sinne der Annahme) gleich wie die Stoffe selbst als unzerstörbar betrachtet.

Trägheit. Da die Naturkräfte das Bindemittel sind, welches die Körper unter einander, d. h. jeden einzelnen mit seiner Aussenwelt verknüpft, so ist es selbstverständlich, dass der einzelne Körper von dieser Aussenwelt getrennt oder von derselben unabhängig gemacht, mit einem Worte, dass die Körpermasse ihren Zustand nicht ändern, sich Bewegung weder geben noch nehmen und überhaupt keine Eigenschaften zeigen kann. Dies ist der Sinn des allgemein bekannten, für das Studium der Bewegungslehre so bedeutungsvollen Ausdrucks: Die Körpermasse ist träge. **41**

Nur Missverständniss oder Mangel an logischer Schärfe konnte die Trägheit als Beharrungsvermögen (*vis inertiae*), d. h. als eine Eigenschaft der Masse bezeichnen. Der sogenannte Widerstand (Kraft) der trägen Masse lässt sich immer auf Eigenthümlichkeiten des Stoffs, gewöhnlich auf Aeusserungen der in Anspruch genommenen Elasticität zurückführen. So z. B. der Gegendruck einer beliebigen Unterlage gegen ein darauf ruhendes Gewicht; so auch der Widerstand und die Uebertragung von Bewegung beim Zusammenstossen zweier Körper.

Es ist früher (Nro. 2) als ganz allgemein geltende Erfahrung festgestellt worden, dass die Körper befähigt sind, verschiedene Bewegungsrichtungen gleichzeitig, einer jeden mit voller Freiheit zu folgen. Mit Beziehung auf die Trägheit lässt sich dieser Erfahrungssatz nun in folgender Weise aussprechen: Die träge Masse gehorcht einem jeden äussern Eindrucke und auch mehreren gleichzeitigen und verschieden gerichteten Einwirkungen vollständig. Darum ist es gestattet, einen jeden Körper, wie vielen gleichzeitigen äusseren Einflüssen er bereits unterworfen sein mag, bezüglich einer neu hinzutretenden Kraft als träge Masse, d. h. ganz so zu behandeln, als ob andere thätige Kräfte gar nicht vorhanden wären. Man nennt den so ausgesprochenen Erfahrungssatz häufig das Trägheitsgesetz. Er bildet zugleich mit dem weiter oben entwickelten Begriffe der Kraft als eines von einem Körper zum andern sich äussernden, entgegengesetzt gleichen Drucks, die wichtigste Erfahrungsgrundlage der Mechanik.

Eine jede Kraft also, wie gering auch an Grösse, die von Aussen her gegen einen Körper zur Wirksamkeit gelangt, hat in ihrer Richtung eine Aenderung von dessen Bewegungszustand zur Folge, beschleunigend oder verzögernd, je nach dem sie sich als bewegende Kraft oder als Widerstand äussert. Verschwindet die Kraft, so verschwindet mit ihr der Anlass zu einer Veränderung der Bewegung in der betrachteten Richtung. Die Geschwindigkeit, wie sie in diesem Augenblicke und in dieser Richtung sich zeigt, wird ebenso in der Folgezeit bleiben, so lange nicht von Neuem eine Kraft zum Angriffe kommt. Insofern darf man behaupten: die Bewegung mit unveränderter Geschwindigkeit, die gleichförmige Bewegung ist diejenige der trägen Masse.

42 Da wir jede Masse als eine Summe materieller Theile betrachten, so kann von grösseren und kleineren Summen der Art die Rede sein. Auch besitzen wir ein scharfes Mittel, solche Unterschiede zu messen.

Es liegt schon in dem Begriffe der trägen Masse, dass Massen von gleicher Grösse gleicher Druckkräfte bedürfen, z. B. die zweifache Masse der doppelten Kraft, wenn sie, von der Ruhe beginnend, unter dem Einflusse dieser Kräfte in gleicher Zeit gleiche Wegesstrecken zurücklegen sollen.

Nun sind alle Körper ohne Ausnahme der Schwere unterworfen. Sie bedürfen der Stütze, um nicht zu fallen. Lässt man eine Anzahl ver-

schiedenartiger Körper in einem leeren Raume, aus gleicher Höhe gleichzeitig und senkrecht herabfallen, so erreichen alle zugleich den Boden. Alle haben demnach in gleicher Zeit gleiche Wegesstrecken beschrieben. Bei allen stand also der Druck, welcher sie in der Richtung des Lothes in Bewegung setzte, in geradem Verhältnisse zu ihren Massen. Diesen Druck, den Trieb der Schwere, kann man durch die Wage messen. Er ist nichts Anderes als das *Gewicht*.

Die Massen der Körper verhalten sich wie ihre Gewichte. Dieses Verhältniss gilt überall auf der Erde, denn die Erfahrung, von der wir ausgegangen sind, lässt sich allenthalben bewähren. In jeder Breite, auf hohen Bergen, an den Gestaden der Meere, in tiefen Schachten, überall wohin Menschen gelangen können. In Wirklichkeit ist zwar das Gewicht eines Körpers, oder richtiger sein Trieb zu fallen, der Druck auf seine Unterlage nicht überall gleich, denn er mindert sich bei zunehmender Höhe des Standortes, und vergrössert sich mit der zunehmenden Breite. Allein man findet, dass diese Aenderungen alle Körper gleichmässig treffen, die zu wägenden Lasten ebenso wie die Gewichtsteine, so dass das Gewicht eines Körpers, wo es immer sei, genau bestimmt, an jedem andern Orte in demselben Verhältnisse zur Gewichtseinheit bleibt.

Das Abwägen auf der gewöhnlichen Wage und mit Gewichtsteinen ist folglich ein eben so einfaches als untrügliches Mittel, die Grössen beliebiger Körpermassen zu vergleichen.

Wir werden in diesem Buche die Grösse einer Masse immer durch ihr Gewicht in Pfunden oder Grammen ausdrücken, ohne dabei, wo nicht eine besondere Rücksicht es erheischen sollte, zugleich den Nebenbegriff des Drucks, den diese Masse auf ihre Unterlage ausübt, ins Auge zu fassen. Also *Masseneinheit in diesem Sinne ist die Gewichtseinheit.*

43

Aus dem Trägheitsgesetze ergiebt sich als eine unmittelbare Folge, dass eine gegebene Masse p die ihr eingeflösste Geschwindigkeit so lange unverändert beibehält, bis irgend eine Kraft einen Einfluss auf den betreffenden Körper in der Richtung seiner Bewegung gewinnt. Gesetzt diese Kraft sei eine beschleunigende, so vermehrt sich die Geschwindigkeit der Masse p, und zwar genau um so viel, als sie sich unter dem Eindruck derselben Kraft und in derselben Wirkungszeit vermehrt haben würde, wenn die Bewegung von der Ruhe aus begonnen hätte. Jedes andere Resultat würde eine selbstständige Thätigkeit der Masse p erheischen, also mit dem Trägheitsgesetze im Widerspruche stehen.

Wirkt die Kraft mehrere Secunden hindurch mit unveränderter Stärke, so muss sie in jeder Secunde immer dieselbe Geschwindigkeit von Neuem erzeugen. Es ist daher nach der Zeit t, die gewonnene Geschwindigkeit, von der Ruhe aus betrachtet:

$$V = ct \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wenn man unter c die Geschwindigkeitszunahme von Secunde zu Secunde versteht.

Aus denselben Gründen würde unter der Einwirkung eines gleichförmig fortdauernden Widerstandes eine anfängliche Geschwindigkeit v in der Zeit t um ct vermindert werden.

Denkt man sich für den Fall der beschleunigten Bewegung die Zeit t in n gleiche Unterabtheilungen gebracht, so entspricht einer jeden derselben die Geschwindigkeitsvermehrung $\frac{V}{n}$. Zu den auf einander folgenden Zeittheilen

$$0, \quad \frac{1}{n}t, \quad \frac{2}{n}t, \quad \frac{3}{n}t \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n}{n}t,$$

gehören daher, von der Ruhe beginnend, die Geschwindigkeiten

$$0, \quad \frac{V}{n}, \quad \frac{2V}{n}, \quad \frac{3V}{n} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{nV}{n}.$$

Wäre die einem jeden Zeittheilchen entsprechende Geschwindigkeit während dessen Verlauf unveränderlich, so würde der ganze in der Zeit t beschriebene Weg sein:

$$s = \frac{1}{n}t\left(0 + \frac{V}{n} + 2\frac{V}{n} + 3\frac{V}{n} + \cdots + n\frac{V}{n}\right)$$

$$= \frac{Vt}{n^2}(0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \frac{Vt}{n^2}(0 + n)\frac{n+1}{2}$$

$$= \frac{Vt}{2}\frac{n^2 + n}{n^2} = \frac{Vt}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Da man in der Bestimmung des Werthes von n ganz freie Wahl hat, ist es auch gestattet, n von unbegränzter Grösse anzunehmen, d. h. die Zeitabschnitte $\frac{1}{n}t$, für welche die ihnen zugehörende Geschwindigkeit als unveränderlich anzusehen, verschwindend klein zu setzen. In diesem Falle, einer stetig zunehmenden Geschwindigkeit, wird $\frac{1}{n} = 0$ und

$$s = \frac{Vt}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Der unter dem Impulse einer unveränderlichen Kraft P in der Zeit t zurückgelegte Weg s ist halb so gross als er hätte sein müssen, wenn die bewegte Masse während derselben Zeit sich mit der Endgeschwindigkeit V gleichförmig bewegt hätte.

Diese Gleichung stimmt genau mit der in Nro. 18 für die gleichförmig beschleunigte Bewegung auf geometrischem Wege entwickelten überein. Ausgehend von dem Trägheitsgesetze und von der Annahme einer in der Masse p mit unveränderlicher Stärke einwirkenden Kraft gelangt man also zu der gleichförmig beschleunigten Bewegungsform. Die Schwere, wie sich hieraus ergiebt, äussert sich gegen sämmtliche

Massentheile der Erde, nicht nur während der Ruhe, sondern auch innerhalb der Gränze geringer Fallräume als ein gleichförmig fortdauernder Druck.

Aber auch jede andere Kraft, welcher eine Masse p unterworfen würde, müsste derselben bei gleichförmiger Fortdauer eine gleichförmig beschleunigte Bewegung einprägen. Zahllose Bewegungen der Art, die man sich denken kann, unterscheiden sich nur durch den Werth der Beschleunigung, d. h. durch die Geschwindigkeitszunahme c von Secunde zu Secunde.

Es ist klar, dass in ähnlicher Weise bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit aus dem Einflusse eines gleichförmig fortdauernden Widerstandes die gleichförmig verzögerte Bewegung hervorgehen muss, sowie dass verschiedene Bewegungen der Art sich nur durch den Werth der Verzögerung oder negativen Beschleunigung c unterscheiden.

44 Die Beschleunigung wächst (es ist dies eine unmittelbare Anforderung des Trägheitsgesetzes) im geraden Verhältnisse zur Grösse der Kraft und im umgekehrten zur Massengrösse. Die Einheit der Masse ist die Gewichtseinheit (Nro. 42). Aber auch die Kräfte pflegt man durch Abwägen zu messen, oder doch auf den Druck eines Gewichtes zurückzuführen. Es sei P dieser Druck und p die bewegte Masse. Die Kenntniss dieser Zahlen allein genügt jedoch nicht zur Bestimmung der Beschleunigung in Fussen oder in Metern.

Wir bedürfen noch ausserdem eines Erfahrungscoefficienten; d. h. wir müssen wissen, welche Geschwindigkeit die Krafteinheit der Masseneinheit in der Zeiteinheit mittheilt. Auskunft hierüber erhalten wir durch die Fallbeschleunigung g, durch deren Maass uns gesagt wird, dass der Druck p der Masse p in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit g einflösst. Es ist daher

$$p : P = g : c, \quad \text{also } c = g\,\frac{P}{p}.$$

Als Krafteinheit wird von den meisten Mechanikern die Gewichtseinheit selbst genommen, also derjenige Druck, welcher der Masseneinheit in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit g ertheilt. Diese Wahl ist jedoch deshalb nicht passend, weil die Gewichtseinheit (ein Pfund, ein Gramm) zwar an allen Punkten der Erde durch denselben Körper repräsentirt sein kann, gleichwohl aber der Druck, den sie ausübt, und die davon abhängige Beschleunigung der Schwere unter verschiedenen Breiten verschieden ist. Als präcis definirte Krafteinheit würde daher nur die Gewichtseinheit unter einem bestimmten Breitegrade gelten können. Man vermeidet alle hieraus entspringenden Verwicklungen, indem man nach dem Vorgange von Gauss (dem Begriffe einer Einheit gewiss am meisten entsprechend) als Krafteinheit den Druck wählt, welcher der Masseneinheit in der Zeiteinheit eine Beschleunigung gleich der Längeneinheit einprägt.

Die Einheit des Gewichtes bedeutet dann überall g Krafteinheiten, und hinsichtlich der Bedeutung des Gewichtes P als bewegende Kraft kann man nie irren, wenn man dasselbe als $gP = K$ Krafteinheiten in Rechnung bringt.

Die Anwendung der Formel $c = g\,\frac{P}{p}$ in den Rechnungen bleibt von diesen theoretischen Betrachtungen glücklicher Weise unberührt. Doch hat man streng genommen in jeder Breite für g den dieser Breite entsprechenden Werth zu setzen. Man findet denselben, wenn β die Breite bedeutet, mit Hülfe der aus einer Reihe directer Beobachtungen abgeleiteten Interpolationsformel:

$$g = 9{,}8054\,(1 - 0{,}00259\cos 2\beta);$$

wenn g in Metern ausgedrückt werden soll, oder

$$g = 30{,}1854\,(1 - 0{,}00259\cos 2\beta),$$

wenn g in Pariser Fussen zu bestimmen ist.

45 Indem man den Ausdruck $c = g\,\frac{P}{p}$ in die Gleichungen der gleichförmig beschleunigten Bewegung (Nro. 18) einschaltet, erhalten dieselben die folgende Gestalt:

$$V = g\,\frac{Pt}{p}; \qquad t = \frac{Vp}{gP} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$s = \frac{V}{2}\,t = \frac{g}{2}\cdot\frac{P}{p}\,t^2 = \frac{V^2 p}{2gP} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$V = \sqrt{\frac{2g}{p}\,Ps} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Diese Formeln lassen nun leicht und in einem Blick übersehen, dass alle Veränderungen bei dieser Bewegungsart, mögen sie sich auf die gewonnene Geschwindigkeit, auf die erforderliche Dauer der Bewegung oder die zurückgelegte Strecke beziehen, von dem Verhältnisse $\frac{P}{p}$ abhängig sind. Durch richtige Wahl dieses Verhältnisses hat man es z. B. ganz in der Hand, eine Bewegung so zu leiten, dass dieselbe durch eine gegebene Wegeslänge s eine bestimmt verlangte Anzahl von Secunden dauert. Die Atwoot'sche Fallmaschine zur Verlangsamung der Fallbewegung, sowie die verminderte Schwere auf der schiefen Ebene Gallilei's sind Anwendungen hiervon.

Die Bewegung eines Wagenzuges auf der Eisenbahn hört bekanntlich nach Unterbrechung des Dampfdrucks nicht sogleich auf; sie wird vielmehr nur nach und nach hauptsächlich durch den Widerstand der Reibung erschöpft. Angenommen, auf einer wagerechten Bahnstrecke sei die Erfahrung gemacht worden, dass ein beladener Waggon, der von einem Zuge während der Bewegung plötzlich ausgehängt wurde, noch

1320 Meter weiterlief und dazu 264 Secunden brauchte; so ersieht man zunächst aus Gleichung (2), dass die Anfangsgeschwindigkeit des frei laufenden Waggons $V = \frac{2 \,.\, 1320}{264} = 10$ Meter betrug. Dann folgt aus Gleichung (1) das Verhältniss $\frac{P}{p} = \frac{V}{g\,t} = \frac{10}{9{,}808 \,.\, 264} = \frac{1}{260}$. Dies will sagen: Insoweit der Widerstand bei abnehmender Geschwindigkeit als ein gleichförmig verzögernder angenommen werden durfte, und bei verschiedenen Ladungen deren Grösse proportional blieb, betrug derselbe 1 Pfund Druck auf je 260 Pfund der Masse des Wagens.

Unter denselben Voraussetzungen muss derselbe Gegendruck schon gleich beim Beginn der Bewegung eines Wagenzuges fühlbar werden und einen verhältnissmässigen Theil des Dampfdrucks in Anspruch nehmen. Soll daher dem ruhenden Zuge eine gewisse Geschwindigkeit eingeflösst werden, so ist dazu ein grösserer Dampfdruck erforderlich, als 1 zu 260. Betrüge derselbe z. B. 2 Pfund auf je 260 Pfund Masse, so würde die Geschwindigkeit von 10 Meter nach einem Zeitraume von 264 Secunden erreicht werden: der Zug würde unterdessen auf der Bahn 1320 Meter weit fortgelaufen sein. Ist endlich die verlangte Geschwindigkeit von V Metern errungen, so würde der Zug zur gleichförmigen Fortbewegung auf wagerechter Strecke nur noch der Triebkraft von 1 Pfund auf 260 Pfund Masse bedürfen.

In den beiden Grundgleichungen der gleichförmig beschleunigten oder verzögerten Bewegung (Nro. 17) zeigen sich die vier bestimmenden Grössen s, V, t und c. Von diesen müssen also wenigstens zwei bekannt sein, um die anderen durch Rechnung finden zu können. Ist auch eine dritte gegeben, kennt man z. B. bei dem auf der Eisenbahn frei laufenden Waggon die Anfangsgeschwindigkeit, so lässt sich bestimmen, wie weit die betreffende Bewegungsart der Annahme gleichförmiger Veränderlichkeit entspricht. Bezüglich des Widerstandes auf der Eisenbahn hat sich aus einer derartigen Prüfung ergeben, dass derselbe nur bei ganz geringen Geschwindigkeiten als gleichförmig angesehen werden darf. Der Grund liegt darin, dass der im Ganzen ziemlich gleichförmige Widerstand der Reibung mit dem bei zunehmender Geschwindigkeit wachsenden der Luft zusammenfällt.

46 In allen Fällen, mag eine Bewegung gleichförmig oder ungleichförmig veränderlich sein, ist die Endgeschwindigkeit gleich der Summe sämmtlicher in gleichen auf einander folgenden Zeittheilen errungenen Geschwindigkeiten. Denkt man sich ein jedes dieser Zeittheile $\frac{1}{n}t$ sehr klein, oder n als eine sehr grosse Zahl, so darf die während eines Zeittheilchens thätige Beschleunigung als gleichförmig betrachtet werden, und man kann setzen:

$$V = (\gamma' + \gamma'' + \gamma''' + \cdots + \gamma_n)\left(\frac{t}{n}\right),$$

wenn γ', γ'' u. s. w. die veränderlichen Beschleunigungen vorstellen. Es sei c die mittlere Proportionale dieser Werthe, so ist

$$\gamma' + \gamma'' + \gamma''' + \cdots + \gamma_n = nc,$$

folglich
$$V = ct = g\,\frac{P}{p}\,t.$$

Man nennt c die mittlere Beschleunigung und P die mittlere Kraft. Sie würde bei gleichförmiger Thätigkeit in der Zeit t dieselbe Geschwindigkeit zu erzeugen vermögen, welche in derselben Zeit durch die veränderliche Kraft entwickelt worden ist. Aufschluss über die Grösse des im letztern Falle zurückgelegten Weges erhält man durch die Kenntniss der mittlern Beschleunigung c nur in sehr unvollkommner Weise. Denn die Länge dieses Weges, immer gleiche Endegeschwindigkeit und Bewegungszeit vorausgesetzt, kann je nach der Art der Veränderlichkeit der Beschleunigung sehr verschieden ausfallen.

47 Wenn ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit v gleichförmig beschleunigt durch den Raum $s_,$ getrieben wird, so ergiebt sich die Endgeschwindigkeit $V = \sqrt{v^2 + 2cs_,}$ [Nro. 17 (5)]. Nun bedeutet $v_, = \sqrt{2cs_,}$ eine Geschwindigkeit, welche derselbe Körper bei gleichförmiger Beschleunigung aus der Ruhe durch den Raum $s_,$ annehmen würde. Man kann daher sagen: D a s Q u a d r a t d e r E n d g e s c h w i n d i g k e i t e i n e s K ö r p e r s, d e r s i c h d u r c h d e n R a u m $s_,$ m i t d e r A n f a n g s g e s c h w i n d i g k e i t v g l e i c h f ö r m i g b e s c h l e u n i g t b e w e g t, i s t g l e i c h d e r S u m m e d e r Q u a d r a t e d e r A n f a n g s g e s c h w i n d i g k e i t v u n d d e r j e n i g e n G e s c h w i n d i g k e i t $v_,$, w e l c h e e r i n F o l g e d e r B e w e g u n g d u r c h d e n R a u m $s_,$ b e i g l e i c h f ö r m i g e r B e s c h l e u n i g u n g a u s d e r R u h e a n n e h m e n w ü r d e; oder es ist

$$V^2 = v^2 + v_,^2.$$

Indem man V wieder als Anfangsgeschwindigkeit ansieht, lässt sich dieser Satz auch weiter ausdehnen, und so gelangt man zu dem ganz allgemeinen Ausdrucke

$$V^2 = v^2 + v_,^2 + v_{,,}^2 + \cdots,$$

wo $v^2 = 2cs$; $v_,^2 = 2cs_,$; $v_{,,}^2 = 2cs_{,,}$ u. s. w.; und $s + s_, + s_{,,} + \cdots = S$; d. h. gleich dem ganzen mit gleichförmiger Beschleunigung zurückgelegten Wege.

Bewegt sich ein Körper ungleichförmig beschleunigt, doch so, dass seinen Bewegungen durch die Räume s, s', s'' u. s. w. die Beschleunigungen c, c', c'' u. s. w. je unverändert zugehören, so ist die Bewegung durch den Raum s' mit der Anfangsgeschwindigkeit v offenbar unabhängig von der Beschaffenheit der Beschleunigung, welcher der Körper vorher

unterworfen war und durch die er die Geschwindigkeit v gewonnen hatte. Dasselbe lässt sich bei der Bewegung durch die Räume s'', s''' u. s. w. behaupten. Es ist daher ganz allgemein, für jede beschleunigte Bewegung die Endgeschwindigkeit

$$V = \sqrt{v^2 + v_{,}^2 + v_{,,}^2 + \cdots},$$

oder was dasselbe ausdrückt:

$$V = \sqrt{2cs + 2c's' + 2c''s'' + \cdots}.$$

Einen Werth C von der Beschaffenheit, dass

$$V^2 = 2C(s + s' + s'' + s''' + \cdots)$$

nennt man die mittlere Beschleunigung für die Wegesstrecke

$$S = s + s' + s'' + \cdots$$

Da die Grössen s, s' u. s. w. nicht im Einzelnen, sondern nur bezüglich ihrer Summe fest bestimmt sind, so kann man (innerhalb dieser Gränze) denselben unbeschadet der Richtigkeit der gezogenen Schlüsse beliebige Werthe beilegen, vorausgesetzt nur, dass in den Ausdrücken von der Form $v^2 = 2cs$ jedes s mit dem ihm zugehörenden c verbunden ist. Man darf also auch alle einander gleich und gleich $\frac{S}{n}$ setzen, wo n eine sehr grosse Zahl vorstellt. Es ist dann

$$V^2 = 2\frac{S}{n}(c + c' + c'' + \cdots) = 2\frac{S}{n} \cdot nC = 2CS.$$

Bei stetig veränderlichen Bewegungen ist also die mittlere Beschleunigung die arithmetische Mittlere sämmtlicher veränderlicher Beschleunigungen, und folglich auch die dieser Beschleunigung entsprechende Kraft P die arithmetische Mittlere sämmtlicher veränderlicher Kräfte, welche die Masse p bei ihrer Bewegung durch den Raum S getrieben haben.

Die durch eine Wegesstrecke S wirksame mittlere Kraft P darf nicht mit derjenigen mittlern Kraft (Nro. 46) verwechselt werden, die während einer Bewegungszeit t die Geschwindigkeit V zu erzeugen vermöchte. Beide Werthe fallen jedoch bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung einer Masse p zusammen.

48 Beispielsweise wollen wir jetzt die Kraft zu bestimmen suchen, welche die Pulverladung (4,8 bis 4,9 Gramme) des Zündnadelgewehrs durch die Entzündung und Umwandlung in den Gaszustand ausübt. Der gezogene Theil der Büchse hat eine Länge von 80 Centimeter. Dies ist der Weg, welchen das Geschoss durchlaufen muss, während seine Geschwindigkeit durch den Druck der sich expandirenden Gase stufenweise bis zu V Meter gesteigert wird. Es sei $V = 300$ Meter, und das Gewicht der Kugel 31 Gramm.

Indem wir uns nun erinnern, dass die mittlere Beschleunigung $C = g\frac{P}{p}$ und $V^2 = 2\,C\,S$, finden wir

$$P = \frac{V^2 p}{2\,g\,S} = \frac{90000\,.\,31}{2\,.\,9{,}8088\,.\,0{,}80} = 177774 \text{ Gramm,}$$

d. h. auf jedes Gramm des Geschosses wirkt ein Druck von 5734 Gramm, während die Schwere auf dieselbe Masse nur einen Druck von 1 Gramm ausübt.

Dieses Resultat ist unter den gegebenen Voraussetzungen richtig und giebt einen Maassstab für die Wirksamkeit der verwendeten Pulvermenge, wie weit auch die Bewegung der Kugel im Laufe von dem Gesetze der gleichförmigen Beschleunigung abweichen mag. Wahrscheinlich kommt sie indessen dieser Bewegungsart ziemlich nahe. Wäre es genau so, würde sich mittelst der Formel $s = \frac{V}{2}t$ (Nro. 18) auch die Bewegungszeit bestimmen lassen, und man fände $t = \frac{2\,.\,0{,}80}{300} = 0{,}00533$ Secunden für die Zeit, während deren Verlauf das Geschoss in dem Rohre verweilt und einem mittlern Druck von 5734 Gramm auf 1 Gramm Masse ausgesetzt ist. Dieser Zeitraum kann nicht länger, vielleicht aber noch etwas geringer sein.

Die wirkliche Treibkraft der Pulverladung ist eigentlich etwas grösser, als der vorher dafür berechnete Werth. Denn einestheils geht ein Theil davon durch Reibung im Innern des Rohrs verloren, anderntheils beträgt die Masse p etwas mehr als 31 Gramm, weil das Geschoss bis zur Mündung des Rohrs vom Stopfen (dem sogenannten Spiegel von nahe 3 Gramm Gewicht) begleitet ist.

Indem der Rand des letztern durch den Druck der Pulvergase in die Züge gepresst wird, muss er dem Gang derselben folgen und erhält dadurch eine rotirende Bewegung um die Axe des Rohrs. An dieser Bewegung muss aber auch das Geschoss Theil nehmen, dessen hinterer Theil von dem Spiegel umfasst ist. Die Züge bilden Schraubenlinien von je 73,2 Centimeter Länge eines Umgangs. Auf die ganze Länge des gezogenen Theils des Rohrs kommen daher $\frac{80}{73{,}2} = 1{,}09$ Umgänge, welchen das Geschoss während der Zeit von 0,00533 Secunden folgen muss. Diese Bewegung, in strenger Abhängigkeit von dem geradlinigten Fortschreiten, gehorcht nothwendig auch demselben Gesetze. War also der Weg im Innern des Rohrs 1,09 Umgänge, so wird die bis zur Ausmündung gewonnene Rotationsgeschwindigkeit die Grösse erreicht haben, um in der folgenden Zeit von 0,00533 Secunden gleichförmig den doppelten Weg, d. h. 2 . 1,09 Umdrehungen beschreiben zu können. Dies entspricht 409 Umdrehungen auf die Secunde.

Diese Berechnung kann jedoch gleich wie die vorher gegangene Zeitbestimmung nur als eine Annäherung gelten, weil das Bewegungsgesetz der Kugel im Laufe eines Gewehrs nicht genau bekannt ist, und wahrscheinlich nur näherungsweise dem der gleichförmig beschleunigten Bewegung entspricht.

Um bei ungleichförmig beschleunigten Bewegungen die Beziehungen zwischen V, s und t genau bestimmen zu können, ist die Kenntniss des Gesetzes, dem die Aenderungen der Beschleunigung gehorchen müssen, unumgänglich. Aber auch wenn dieses Gesetz bekannt ist, führt die Lösung der Aufgabe gewöhnlich zu sehr zusammengesetzten, mit den Hülfsmitteln der Elementarmathematik unausführbaren Rechnungen. Wir beschränken uns hier auf die Erläuterung von zweien physikalisch interessanten Beispielen.

Erste Aufgabe. Die Fallbewegung durch weite Räume mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Schwere. **49** Die Kraft, welche einen Körper, dessen Masse $= p$ gegen die Erde zieht, deren Masse $= E$, verhält sich nach dem Gravitationsgesetze wie das Product beider Massen und umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung des Körpers vom Mittelpunkte der Erde. Setzt man demnach für den Abstand r vom Mittelpunkte die Beschleunigung $= g$, so wird sich dieselbe für einen um s vergrösserten Abstand in $c = g \frac{r^2}{(r + s)^2}$ verändern. Angenommen, der Körper sei aus seiner äussersten Entfernung $r + s = R$ in der Richtung gegen den Mittelpunkt der Erde bereits um die Wegesstrecke x gefallen und habe dadurch in dem Abstande $r + s - x$ die Geschwindigkeit v errungen, so ist aus bekannten Gründen (Nro. 15)

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Andererseits ist $$dv = c \, . \, dt.$$

Denn da für den Fall gleichförmiger Beschleunigung ganz allgemein $v = ct$ oder $c = \frac{v}{t}$, so muss ebenso bei ungleichförmigen Bewegungen, für jeden kleinen Abschnitt derselben von verschwindend geringer Dauer $c = \frac{dv}{dt}$ sein; d. h. die Geschwindigkeitszunahme dv während des kleinen Zeitraumes dt, innerhalb dessen Verlaufs die Bewegung als gleichförmig angesehen werden darf, dividirt durch das betreffende Zeitelement, giebt die zugehörende Beschleunigung. Es ist folglich auch $dv = c \, . \, dt$. Wenn diese Gleichung mit $v = \frac{dx}{dt}$, Glied mit Glied multiplicirt wird, erhält man

$$vdv = c \, . \, dx = g \frac{r^2 dx}{(r + s - x)^2}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Integration, und indem man berücksichtigt, dass für $x = 0$ der Körper noch nicht gefallen ist, folglich auch noch keine Geschwindigkeit angenommen haben kann,

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g r^2 x}{(r+s)(r+s-x)},$$

also die mittlere Beschleunigung (Nro. 47)

$$\frac{v^2}{2x} = \frac{g r^2}{(r+s)(r+s-x)},$$

und die Endgeschwindigkeit für den Fallraum $x = s$,

$$v = \sqrt{2gs\frac{r}{r+s}}.$$

Die Fallzeit lässt sich mit Hülfe der Gleichung $dt = \frac{dx}{v}$ bestimmen, indem man für v den vorher berechneten allgemeinen Ausdruck

$$v = \sqrt{\frac{2gr^2x}{(r+s)(r+s-x)}}$$

einsetzt, und die Gleichung

$$dt = \sqrt{\frac{r+s}{2gr^2}} \times dx \sqrt{\frac{r+s-x}{x}}$$

zwischen den Gränzen $x = 0$ bis $x = s$ integrirt. Man findet

$$t = \sqrt{\frac{r+s)^2x-(r+s)x^2}{2gr^2}} + \frac{r+s}{2r}\sqrt{\frac{r+s}{2g}}\, arc\left(sin = \frac{2\sqrt{(r+s)x-x^2}}{r+s}\right),$$

und wenn $x = s$ gesetzt wird, die ganze Fallzeit

$$t = \sqrt{\frac{(r+s)s}{2gr}} + \frac{(r+s)\sqrt{r+s}}{2r\sqrt{2g}}\, arc\left(sin = \frac{2\sqrt{rs}}{r+s}\right).$$

Wenn s so klein ist, dass die Grösse des Sinus mit der seines Bogens zusammenfällt, kann man setzen:

$$t = \sqrt{\frac{(r+s)s}{2gr}} + \sqrt{\frac{(r+s)s}{2gr}} = \sqrt{\frac{2s}{g}\frac{r+s}{r}}.$$

Diese Gleichungen beziehen sich übrigens nicht bloss auf den Fall eines Körpers aus grosser Entfernung gegen die Erdoberfläche, sie gelten mit gleichem Recht für alle ähnlichen Bewegungen, z. B. beim Falle eines Aerolithen gegen die Sonne, vorausgesetzt nur, dass für g jedesmal der entsprechende Werth eingesetzt wird.

50 Zweite Aufgabe. Ein Punkt, der sich in der geraden Linie cb (Fig. 21) zu bewegen beginnt, werde winkelrecht gegen diese Bahn durch eine Kraft abgelenkt, welche ihm eine

Fig. 21.

c x b

mit der zurückgelegten Wegesstrecke proportional zunehmende Geschwindigkeit einflösst. Angenommen, diese seitlich ablenkende Kraft sei von der Grösse, dass wenn sie in dem Punkte x bei unverändertem Abstande ($cx = x$) von dem Ausgangspunkte der Bewegung eine ganze Secunde hindurch gleichförmig beschleunigend fortwirken könnte, der bewegte Punkt an dieser Stelle winkelrecht auf seine Hauptrichtung einen Weg αx zurücklegen müsste, so würde die dadurch gewonnene Geschwindigkeit $2\alpha x$ [Nro. 43 (2)] betragen. In dem folgenden Zeitelemente würde also der Weg $ds = 2\alpha x dt$ zurückgelegt werden. Die ganze seitliche Ablenkung zwischen den Gränzen $t = 0$ bis zu der ganzen Bewegungszeit ist daher gegeben durch den Ausdruck

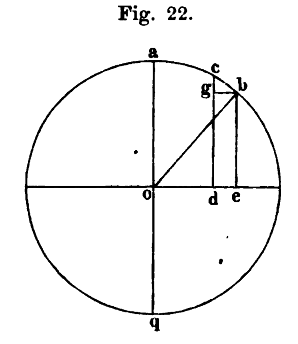
$$s = 2\alpha \int x dt.$$

Die vollständige Auflösung dieser Gleichung erfordert nähere Kenntniss der Bewegungsart nach der Linie cb. Z. B. für den Fall einer gleichförmigen Bewegung ist $x = vt$, daher

$$s = 2\alpha \int vt dt = \alpha v t^2.$$

Nach dieser Gleichung berechnet sich die Ablenkung, welche ein Körper über der Oberfläche der Erde, bei freier gleichförmiger Bewegung aus einer Breite in die andere durch die Erdrotation erfährt. Der Kreis abq (Fig. 22) mag einen Erdmeridian vorstellen, $ao = r$ einen Radius des Aequators, ferner $be = r\cos\beta$ den Radius eines Breitegrades in der Breite $ab = \beta$. Ein Körper bewege sich entlang des Meridians durch die Wegesstrecke $cb = l$, d. h. aus der Breite ac zur Breite ab. Es ist $cd = cg + be$ und $cg = l\sin\beta$; daher $cd = l\sin\beta + r\cos\beta$.

Fig. 22.



Die Rotationsgeschwindigkeit des Punktes a sei $= \omega r$, also die des Punktes $b = \omega r\cos\beta$, und die des Punktes $c = \omega\ (l\sin\beta + r\cos\beta)$. Der Unterschied der Rotationsgeschwindigkeiten der Punkte c und b ist demnach

$$= \omega l \sin\beta,$$

d. h. dieser Unterschied ist dem Wege proportional, den der Körper bis zu seiner Ankunft in b noch zurückzulegen hat. Dieser Körper soll sich nach Annahme in der Richtung des Meridians gleichförmig von c nach b, in der Zeit t und mit der Geschwindigkeit v bewegen. Im Augenblicke seines Abgangs von c besitzt er gerade die erforderliche Rotationsgeschwindigkeit, um die geographische Länge seines Ausgangsortes behaupten zu können. Nachdem er aber bei x ($cx = x$, Fig. 21) angekommen, würde er dazu nur noch der Rotationsgeschwindigkeit $\omega \sin\beta\ (s - x)$ bedürfen. Er wird folglich mit dem Geschwindigkeitsüberschusse $\omega \sin\beta\, x$ von seiner geradlinigten Bahn rechts (in unserm

Falle östlich) abgetrieben. Es bedeutet hiernach $\omega \sin\beta x$ den Weg, der von dem Punkte x aus winkelrecht auf cb in einer Secunde beschrieben werden könnte, und welcher an die Stelle von αx in die oben aufgestellte Differentialgleichung einzuschalten ist. Man findet dann durch Integrirung zwischen den Gränzen $x = 0$ bis $x = l$,

$$s = \omega \sin\beta\, v t^2;$$

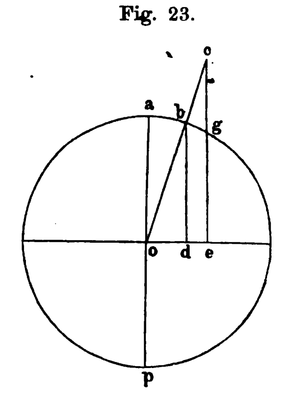
oder auch, indem man die Wegesstrecke $cb = vt = l$ setzt,

$$s = \omega \sin\beta\, l t.$$

Dieser Ausdruck lehrt, dass die Ablenkung, welche die Erdkörper, z. B. Wasser und Luft bei ungehemmter Bewegung durch verschiedene Breiten erfahren, nur von derjenigen Breite abhängig ist, in der sie gerade angekommen sind. Im Uebrigen ist sie dem Producte der zurückgelegten Wegeslänge in die Bewegungszeit proportional (Nro. 25 δ).

Freifallende Körper erfahren durch die Erdrotation eine Ablenkung vom Lothe und zwar stets in östlicher Richtung. Es bezeichne wieder abq (Fig. 23) einen Erdmeridian; $cb = h$ die senkrechte Höhe, von welcher der Körper herabfällt. Der Unterschied der Rotationsgeschwindigkeit der beiden Punkte c und b ist $= \omega \cos\beta\, h$, wenn β die Breite ab bedeutet. Dieser Unterschied verhält sich also einfach wie die Fallhöhe. Für die Fallhöhe x beträgt derselbe $\omega \cos\beta\, x$. Dies ist die seitliche Ablenkung, welche vom Punkte x aus (Fig. 21) bei unverändertem Höhenstande in einer Secunde würde eintreten können; also der an die Stelle von αx in unsere Differentialgleichung einzuschaltende Werth. Nun ist aber beim freien Fall

Fig. 23.



$x = \frac{g}{2} t^2$, folglich

$$s = 2\omega \cos\beta \int \frac{g}{2} t^2 dt = {}^1/_3\, \omega \cos\beta\, g t^3.$$

Wenn für x die ganze Fallhöhe h genommen wird, so ist auch

$$s = {}^2/_3\, \omega \cos\beta\, h t.$$

Es sei beispielsweise β der 50. Breitegrad, $h = 500$ Pariser Fuss, t die entsprechende Fallzeit. Nun bedeutet ω den Drehungsbogen eines Punktes der Erdoberfläche für die Zeiteinheit, also $\omega = \frac{2\pi}{86164}$, da die Umdrehungszeit der Erde dem zwischen zweien oberen Durchgängen eines Sternes durch den Meridian des Beobachtungsortes verfliessenden Zeitraume gleich ist, und dieser Zeitraum, d. i. ein Sternentag $= 86164$ Secunden. Diese verschiedenen Zahlen in die Gleichung eingesetzt, findet man $s = 13$ Pariser Linien. Eine Kugel, die aus 500 Fuss Höhe unter

dem 50. Breitegrade durch einen luftleeren Raum fiele, würde 13 Linien östlich vom Lothe des Ausgangspunktes aufschlagen.

Beim Falle durch die Luft dürfte diese östliche Ablenkung, gänzliche Abwesenheit seitlicher Einflüsse vorausgesetzt, wohl noch etwas grösser werden, weil durch den Luftwiderstand die Fallzeit verlängert wird.

Directe Versuche von Benzenberg (in den Jahren 1802 und 1804) und späterhin von Reich (1832) haben die Abweichung frei fallender Körper aus der Lothlinie bestätigt.

Fünfter Abschnitt.

Von der mechanischen Arbeit und dem Maasse derselben.

51 Jede Aenderung des Zustandes eines Körpers, sei es der Gestalt oder Beschaffenheit, sei es der Art seiner Bewegung, nennt der Mechaniker: Arbeit. Die mechanische Arbeit wird durch die Thätigkeit einer Kraft eingeleitet und erzeugt. So z. B. erfordert es der Einwirkung einer Kraft, um Geschwindigkeit eines Körpers nach bestimmter Richtung hervorzurufen, oder auch nur diese zu vergrössern oder zu verringern. Die hierdurch eingetretene Aenderung im einen wie im andern Falle ist eine Arbeit.

Man hat lange Zeit geglaubt, die Grösse einer Arbeit verhalte sich allgemein wie die Grösse der wirkenden Kraft; und in der That hatte diese Ansicht bei oberflächlicher Betrachtung den Schein der Wahrheit für sich. Es ist richtig, dass eine Körpermasse p um so mehr beschleunigt wird, je grösser die Kraft ist, deren Einwirkung man sie unterwirft. Die Gleichung

$$v = g \frac{P}{p} t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

deren Richtigkeit wir früher (Nro. 45) begründet haben, giebt hierüber eine ganz unzweideutige Auskunft. Auch belehrt sie uns noch weiter, dass die Grösse der hervorgerufenen Geschwindigkeit im geraden Verhältnisse steht zur Wirkungszeit der Kraft P; in der Art, dass das End-Ergebniss sich ganz gleich bleibt, ob die einfache Kraft die n fache Zeit, oder umgekehrt die n fache Kraft nur die einfache Zeit hindurch in Thätigkeit war. Man kann daher das Product Pt geradezu als Maass der thätigen Kraft, oder als diejenige Kraft bezeichnen, welche in der Zeiteinheit einer Masse p dieselbe Geschwindigkeit zu ertheilen vermöchte,

die durch eine Kraft P in der Zeit t wirklich hervorgerufen wird; und man darf behaupten, dass verschiedene Kräfte, deren Kraftmaass gleich ist, d. h. welche, je mit der Zeit ihrer Wirksamkeit multiplicirt, gleiche Producte bilden, in der Masse p gleiche Geschwindigkeiten erzeugen werden.

Sind die Massen ungleich, so werden durch gleiche Kraftmaasse allerdings ungleiche Geschwindigkeiten in ihnen entwickelt, allein dies geschieht, wie uns die Gleichung lehrt, im umgekehrten Verhältnisse der Massen, so dass, so lange das Product $P.t$ sich nicht ändert, auch das Product $v.p$, der Geschwindigkeit multiplicirt mit der Masse, die sogenannte Bewegungsgrösse unverändert bleibt. Da man nun die Bewegungsgrösse $v.p$ als Wirkung der Kraft ansah, so gelangte man folgerichtig zu der Annahme, die Wirkung verhalte sich wie die Grösse ihrer Ursache, oder bestimmter gesprochen wie das Kraftmaass $P.t$.

Dieser Vorstellung begegnet jedoch ein erhebliches Bedenken schon in dem Umstande, dass für die Wirksamkeit einer Kraft nicht die Thatsache ihres Vorhandenseins genügt. Ein Stein kann beliebig lange Zeit auf erhöhtem Standorte dem Eindrucke der Schwere unterworfen sein, ohne darum Geschwindigkeit zu gewinnen. Soll er durch sein Gewicht beschleunigt werden, so muss er sinken, d. h. die Kraft, deren Träger er ist, muss in ihrer Richtung (hier in der Richtung des Lothes) einen Weg zurücklegen. Also nicht so lange er der Schwere unterworfen ist, denn dies bleibt er immer, sondern nur so lange er fällt, gewinnt er an Geschwindigkeit. Ein Druck, der auf seiner Unterlage ruht, arbeitet nicht, er ist wirkungslos, wenn nicht nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche, der die Begriffe von Druck und Wirkung häufig verwechselt, so doch nach der schärfern Auffassungsweise der Wissenschaft. Aber auch Bewegung allein genügt nicht, als Bedingung zur Hervorbringung mechanischer Arbeit; denn Bewegung ist ja, wie wir wissen, der unabhängig von jedem äussern Einfluss vorhandene, natürliche Zustand aller Körper. Eine Bewegung winkelrecht zur Richtung der Kraft liefert keinen Beitrag zur Grösse ihrer Arbeit. Eine Kugel z. B., durch welche Ursache immerhin getrieben und über eine wagerechte Ebene fortrollend, erringt durch diese Bewegung keine Arbeit, bei welcher die Schwere einen Antheil hat, denn während dieses Vorganges nähert sie (die Kugel) sich weder dem Mittelpunkte der Erde, noch entfernt sie sich von demselben.

Ein Körper, der durch seine Lage verhindert ist, tiefer zu sinken, hat eben dadurch sein Vermögen verloren, durch sein Gewicht zu arbeiten. Seine Arbeitskraft ist erschöpft. Um sie im frühern Umfang wieder zu gewinnen, muss er wieder an den frühern, höhern Standort gebracht werden. Erhebung eines Körpers zu einer Höhe h ist daher gleichbedeutend mit Ansammlung seiner Arbeitskraft. Er verwendet dieselbe, wenn er von der Höhe h wieder herabfällt und sich dadurch die Geschwindigkeit v einprägt. Mit eben dieser Geschwindigkeit senkrecht aufwärts geschleudert, erreicht er bekanntlich den frühern Höhenstand

wieder, jedoch nur nach vollständiger Einbusse seiner Geschwindigkeit. Die Arbeit seines Gewichtes während des Aufsteigens bestand in der Zernichtung der frühern Wirkung und der Herstellung des frühern Verhältnisses. Da in beiden Fällen gleiche Kräfte arbeiteten (das Gewicht des Körpers) und auch in gleichen Zeiten gleiche Wege beschrieben, so müssen beide einander entgegengesetzte Arbeiten an Grösse gleich sein. Es ist dieselbe Arbeit nöthig, Geschwindigkeit zu zernichten, welche erfordert wurde sie hervorzubringen. Die Richtigkeit dieses Satzes tritt vielleicht um so anschaulicher hervor, wenn man bedenkt, dass Aufheben einer Geschwindigkeit eigentlich nichts Anderes ist als Erzeugung derselben Geschwindigkeit in derselben Richtung, aber in entgegengesetztem Sinne.

Es ist eine ganz allgemeine Erfahrung, dass das Heben eines Gewichtes P zur Höhe h eine gewisse Anstrengung, eine Arbeit erfordert. Diese Arbeit verdoppelt sich durch die Wiederholung. Nun ist aber unbestreitbar ganz dieselbe Grösse der Arbeit erforderlich, ob ein Gewicht $2P$ zur Höhe h oder das Gewicht P zur Höhe $2h$ gehoben wird. Beide, Druck und Weg in der Richtung des Drucks, haben also ganz gleiche Bedeutung für die Grösse der Arbeit. Zur vollständigen Bezeichnung der letztern, zur Feststellung ihres Maasses hat man also die Grösse der Kraft mit der Grösse des Weges zu multipliciren.

Je nach der Art der verwendeten Längen- und Gewichtsmaasse pflegt man die Grösse des Arbeitsmaasses durch die Worte: Fuss-Pfunde oder Meter-Kilogramme u. s. w. auszudrücken.

52 Die Atwood'sche Fallmaschine, über deren Einrichtung man in jedem Werke der Physik die nöthige Erläuterung findet, bietet die Mittel zu zahlreichen belehrenden Versuchen zur Bestimmung und Vergleichung von Arbeitswerthen.

Hat man z. B. das bewegliche System dieser Maschine so ausgeglichen, dass durch Auflegung eines Uebergewichtes von 2 Gramme eine Beschleunigung von 2 Pariser Zoll entsteht, so wird in 6 Secunden eine Geschwindigkeit von 12 Zoll erzeugt. Der entsprechende Fallraum ist 36 Zoll, also das Product der Kraft in den Weg $= 2.36 = 72$.

Durch Auflegen von 4 Gramm wird dieselbe Geschwindigkeit bereits in 3 Secunden hervorgebracht, während nur ein Weg von 18 Zoll zurückgelegt wurde. Die Arbeit ist $4.18 = 72$, also gerade so gross als vorher.

Lässt man den niedergehenden Teller unter demselben Druck von 4 Gramm, 6 Secunden hindurch in Bewegung, so wird ein Weg von $s = \frac{4}{2}(6)^2 = 72$ Zoll beschrieben; die Geschwindigkeit wird 24 Zoll und das Arbeitsmaass $Ps = 4.72 = 288$.

Das Maass der thätigen Kraft Pt (Nro. 51), welches vorher durch $4.3 = 12$ ausgedrückt war, hat sich jetzt bis zu $4.6 = 24$ erhoben. Diesem Verhältnisse entspricht auch das der erzielten Geschwindigkeiten.

Dass aber die in beiden Fällen erforderlichen Arbeiten nicht in demselben Verhältnisse stehen können, leuchtet sogleich ein, wenn man berücksichtigt, dass das gesunkene Gewicht von 4 Gramm im ersten Fall nur um 18 Zoll, im zweiten aber um die vierfache Höhe gehoben werden musste, um seine anfängliche Lage wieder herzustellen. Beide Arbeiten verhalten sich daher wie 1 zu 4. Es ist das Verhältniss der Quadrate der Geschwindigkeiten.

Wenn man die bewegliche, träge Masse der Fallmaschine um 360 Gramm vermehrt, d. h. wenn man auf jedem der beiden Teller 180 Gramm zulegt, so sind anstatt 2 Gramm Uebergewicht nunmehr 4 Gramm erforderlich, um eine Beschleunigung von 2 Zoll, oder wenn man will, binnen 6 Secunden Zeit und bei 36 Zoll Wegeslänge eine Geschwindigkeit von 12 Zoll hervorzubringen. Die Kraft war bei diesem Versuche verdoppelt worden; da gleichwohl Bewegungszeit, Wegeslänge und Geschwindigkeit dieselben geblieben sind, so muss auch die Masse verdoppelt worden sein; d. h. sämmtliche unter dem Einfluss des Uebergewichtes bewegten Theile der Maschine, mit Ausnahme der zuletzt zugelegten 360 Gramm müssen sich gegen beschleunigende Kräfte gleich einer trägen Masse von 360 Gramm verhalten.

Ein Druck von 4 Gramm hatte der auf dem angedeuteten Wege bestimmten Masse von 360 Gramm in 6 Secunden eine Geschwindigkeit von 24 Zoll ertheilt; die entsprechende Arbeit betrug $4 . 72 = 288$.

Der doppelten Masse war durch denselben Druck und in derselben Zeit eine Geschwindigkeit von 12 Zoll eingeflösst worden. Die Arbeit war jetzt $= 4 . 36 = 144$, also nur halb so gross als vorher.

Da sich die Geschwindigkeiten wie 2 zu 1 verhalten, so ist das Verhältniss ihrer Quadrate wie 4 zu 1. Aber die kleinere Geschwindigkeit von 12 Zoll gehörte der doppelten Masse an. Multiplicirt man die Quadrate der Geschwindigkeiten mit den zugehörigen Massen, so ergeben sich Zahlen, die sich wie die Arbeitswerthe verhalten.

53 Die Ergebnisse dieser und ähnlicher Versuche sind leicht vorauszusehen, als Folgerungen aus der Gleichung

$$v^2 = 2g \frac{P}{p} s,$$

deren Begründung schon früher (Nro. 45) gegeben worden ist. Diese Gleichung in der Form

$$\frac{v^2 p}{2g} = Ps \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

sagt uns, dass das **Arbeitsmaass gleich ist dem Producte der Masse in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit, dividirt durch doppelte Beschleunigung der Schwere.**

Man nennt den Ausdruck $v^2 p$ die **lebendige Kraft** einer Masse p und darf somit aussprechen: **Die lebendige Kraft ist dem zugehörigen Arbeitsmaass proportional.**

Wenn man beispielsweise ein Gewicht von 2 Gramm aus 36 Zoll Höhe frei herabfallen lässt, so ist die hierdurch verwerthete Arbeit ($P.s = 2.36 = 72$) genau derjenigen gleich, welche dasselbe Gewicht hervorbringt, indem es als Uebergewicht das bewegliche System einer Fallmaschine, dessen träge Masse vorher (Nro. 52) zu 360 Gramm bestimmt wurde, auf 36 Zoll Weg begleitet und ihm dadurch eine Geschwindigkeit von 12 Zoll ertheilt. Aus der Gleichheit der Arbeiten folgt die der lebendigen Kräfte. Es ist folglich $2 . v^2 = 360\ (12)^2$ und $v = 12 \sqrt{180}$. Zu demselben Resultate führt die bekannte Gleichung $v = \sqrt{2 g s}$, wenn man den zunächst in Pariser Fussen gefundenen Werth durch Multiplication mit 12 in Zolle verwandelt, also in runder Zahl $g = 12.30 = 360$ setzt.

Der Begriff sowie das Maass der Arbeit sind nicht aus theoretischen Voraussetzungen hervorgegangen; sie sind ganz aus der Erfahrung geschöpft. Der Theorie blieb bei dieser gleichwie bei anderen Errungenschaften der Physik kein anderer Vorwurf als der, die Thatsachen unter gemeinschaftlichen Gesichtspunkten zu sammeln und in Form eines Gesetzes auszusprechen. Der Ausdruck dieses Gesetzes, des Arbeitsgesetzes, ist in der obigen Formel niedergelegt.

54 Das Arbeitsprincip ist ausserordentlich fruchtbar in seinen Anwendungen. Wir wollen dasselbe zunächst zur Lösung einiger einfacher aber allgemein interessanter Aufgaben aus der praktischen Mechanik verwerthen.

α) Einer Masse p ist die Geschwindigkeit v zu ertheilen. Man fragt nach der hierzu erforderlichen mechanischen Arbeit. Die Antwort findet sich unmittelbar durch Auflösung der Gleichung (2).

Nehmen wir an, $p = 100\,000$ Kilogramm sei die Gesammtmasse eines Dampfwagenzuges, und $v = 10$ Meter die verlangte Geschwindigkeit. Da in diesem Falle $g = 9{,}8088$ Meter, so ergiebt sich

$$Ps = 509\,745 \text{ Meter-Kilogramm.}$$

Die Theilung dieser Zahl in ihre beiden Hauptfactoren ist nicht ganz willkürlich und jedenfalls durch die verfügbare Kraft der Locomotive begränzt. Setzen wir den zur Ueberwindung der Reibung (Nro. 45) erforderlichen Dampfdruck $= \frac{p}{264} = 380$ Kilogramm. Diese Kraft wird ununterbrochen verwendet, so lange die Bewegung dauert, und durch die geringste Steigung der Eisenbahn sogleich bedeutend vermehrt, so dass, wenn auch nur Steigungen bis zu $\frac{1}{100}$ vorkommen, der Dampfdruck erfahrungsmässig eine Steigerung wenigstens bis zum 4- oder 5fachen der für die Reibung berechneten Grösse gestatten muss. Setzen wir beispielsweise 1600 Kilogramm als Gränze.

Diese normale Kraft von 1600 Kilogramm kann beim Beginne der Fahrt und bei langsamer Bewegung des Zugs durch geeignete Leitung des Feuers hervorgebracht sein, allein sie hält ebenfalls erfahrungsmässig, trotz unveränderter Fortdauer der Dampferzeugung, nicht stand, sondern vermindert sich stufenweise bei zunehmender Geschwindigkeit des Wagenzugs, bis schliesslich nur noch die zur Ueberwindung der Bewegungshindernisse durchaus unentbehrliche Kraft übrig bleibt. Aus den hier angedeuteten Gründen, die erst später ihre Erklärung finden können, bleibt zur Entfaltung von Geschwindigkeit bei weitem nicht die ganze scheinbar vorhandene Kraft einer Locomotive auch wirklich verwendbar, selbst wenn der Zug nur auf horizontaler Ebene forteilte. Wäre in unserm Beispiele der Mittelwerth von $P = 300$ Kilogramm, so würde zur Erreichung der verlangten Geschwindigkeit von 10 Meter eine Fahrstrecke von 1700 Meter, d. h. von nahe dem vierten Theil einer deutschen Meile erfordert werden.

β) Nach einem vor mehreren Jahren veröffentlichten Berichte soll die Armstrong-Kanone ein Hohlgeschoss von 460 Zollpfund Gewicht mit einer Geschwindigkeit von 1280 preussischen Fuss schleudern. Die Arbeit der entzündeten Pulverladung würde hiernach den ungeheuren Betrag von $\frac{(1280)^2\,460}{62{,}5} = 12060000$ Fuss-Pfunden erreicht haben. Im Rohr der Kanone hatte das Geschoss einen Weg von 12 Fuss zurückzulegen, während dessen es dem Drucke der gespannten Pulvergase ausgesetzt war. Die mittlere Grösse dieses Druckes betrug demnach über eine Million Pfund. Die unter einem so gewaltigen Drucke wirksame mittlere Beschleunigung, d. h. diejenige Geschwindigkeit $c = g\,\frac{P}{p}$, welche nach einer Secunde unveränderter Wirksamkeit sich hätte erzeugen müssen, erhebt sich bis zur Grösse von 68000 Fuss.

Da das Geschoss, so lange es im Rohr der Kanone verweilt, unter dem Einflusse der gespannten Gase steht, so ist es einleuchtend, dass die Länge der Kanone einen sehr bedeutenden Einfluss auf die zu erzielende Geschwindigkeit haben kann. Wirklich hat man in früherer Zeit, so lange das Pulver den Grad der Schnellentzündlichkeit nicht besass, den man ihm jetzt zu verleihen versteht, eine hinreichend grosse Wurfgeschwindigkeit der Kugel durch längere Röhren, sowohl bei den Flinten wie bei den Kanonen zu erreichen gesucht.

γ) Ein Körper, der sich hebt oder senkt, übt eine Arbeit aus, deren Grösse, wie wir wissen, gleich ist seinem Gewichte multiplicirt mit dem erreichten Höhenunterschiede. Dieser Multiplicationsausdruck, als Ganzes in Fuss-Pfunden, sagt jedoch nichts über die unmittelbare Kraftäusserung P; bei lebenden Geschöpfen z. B. über die Grösse der Muskelanstrengung. Um den eigenen Körper, dessen Gewichtsmasse 150 Pfund betragen mag, 2 Fuss hoch zu heben, ist (weil das Gewicht hier zugleich

als Widerstand wirkt) eine Arbeit von 2 . 150 = 300 Fuss-Pfunden erforderlich. Wir nennen diese Arbeit eine leichte, wenn sie durch Erheben auf einer sanft ansteigenden Treppe während des Verlaufs einer oder mehrerer Secunden ausgeführt wird. Viel anstrengender aber erscheint uns das Springen auf dieselbe Höhe, obgleich die wirkliche Arbeit dabei dieselbe bleibt.

Der Vorgang des Springens besteht aus der Verbindung zweier wesentlich verschiedener Bewegungsarten. Zuerst hebt sich der Körper durch die Thätigkeit seiner Muskeln und gestützt durch eine Unterlage mit rasch zunehmender Geschwindigkeit; dann trennen sich die Füsse von der Unterlage und er steigt weiter mit verzögerter Bewegung, so lange bis die durch den ersten Vorgang gewonnene Geschwindigkeit in Folge der Gegenwirkung der Schwere völlig erschöpft worden.

Der erste Theil dieser Bewegung ist durch die Dimensionen der Glieder des menschlichen Körpers auf einen nur mässigen Spielraum des Erhebens beschränkt. Setzen wir vielleicht als äusserste Gränze, $^1/_2$ Fuss. Auf diesem Wege muss sich die ganze Schnellkraft der Muskeln entwicklen, die dann den Körper befähigt noch $1^1/_2$ Fuss weiter empor zu fliegen. Es ist daher die ganze während des ersten Theils der Bewegung durch Muskelkraft ausgeführte Arbeit $= {}^1/_2\, P = 300$, folglich $P = 600$ Pfund.

Die Geschwindigkeit, welche durch diese bedeutende Kraftäusserung unter den gegebenen Voraussetzungen dem Körper ertheilt wird, und vermöge deren er gleich einem geworfenen Körper, noch weitere $1^1/_2$ Fuss (im Ganzen also 2 Fuss) sich erhebt, beträgt $v = \sqrt{2 \,.\, 30 \,.\, 1{,}5} = 9{,}5$ Pariser Fuss; diese Arbeit wird in der Zeit von ungefähr $^2/_{19}$ Secunde ausgeführt.

Durch Anwendung eines Schwungbretts kann der Weg s für den Spielraum der Muskelthätigkeit vergrössert, folglich für dasselbe Arbeitsmaass die Kraft P verringert werden.

δ) Dem menschlichen Arme ist bekanntlich bei seinen Bewegungen ein ziemlich grosser Spielraum des Wegs gestattet, der bei erwachsenen Personen die Gränze von 4 Pariser Fuss erreicht und bei vielen sogar überschreitet. Diese Eigenthümlichkeit, von grosser Bedeutung bei vielen Handarbeiten, äussert ihren Einfluss ganz besonders auch bei der Operation des Werfens, indem sie es möglich macht, den zum Werfen geeigneten mit der Hand erfassten Körper (etwa einen Stein), durch eine grosse Wegesstrecke mit beschleunigter Bewegung zu führen. Da während dieser Bewegung die Hand auf den Stein drückt, um dessen Geschwindigkeit mehr und mehr zu vergrössern, so muss sie an letzterer Theil nehmen, bis zur Geschwindigkeit v, mit der endlich der geworfene Körper sich selbst überlassen wird. Die betreffende Arbeit ist aus dem Wege der Hand und dem Mittelwerth des dabei ausgeübten Muskeldrucks zusammengesetzt. Hiernach lässt es sich leicht durch Zahlen erläutern, warum die Fertigkeit, leichte Steine auf weite Entfernungen hin zu schleudern,

weniger eine bedeutende Körperkraft als ausgebildete Elasticität der Muskeln und Uebung, den zu werfenden Gegenstand durch eine recht grosse Wegesstrecke mit der Hand zu leiten, in Anspruch nimmt. Soll z. B. ein Stein mit möglichst geringer Anstrengung auf 60 Pariser Fuss Entfernung geworfen werden, so hat man zunächst zu bedenken, dass die grösste Wurfweite einem Wurfwinkel von ungefähr 45^0 entspricht. Diesen Winkel vorausgesetzt, ist die halbe Wurfweite (Nro. 28)

$$x' = \frac{v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{2g} = \frac{v^2 \sin 90^0}{2g} = \frac{v^2}{2g}.$$

Die der grössten Wurfweite entsprechende Geschwindigkeitshöhe ist also $= x'$, d. h. gleich der Hälfte der grössten Wurfweite. Die Geschwindigkeit selbst folglich in unserm Beispiele, da nach Annahme $x' = 30$,

$$v = \sqrt{2g \,.\, 30} = 42 \text{ Fuss}.$$

Es ist dies die geringste Geschwindigkeit, entsprechend der kleinsten Arbeit, durch welche der Aufgabe genügt werden kann. Die Arbeitsgrösse beträgt $Ps = \frac{v^2 p}{2g} = 30 \,.\, p$. Wäre z. B. $s = 4$ Fuss und $p = 1/8$ Pfund Masse, so würde der Druck P im Mittel noch nicht die Grösse von 1 Pfund erreichen.

Durch den Gebrauch der Schleuder kann der Spielraum für die Muskelthätigkeit, der Weg s bedeutend vergrössert und dadurch die Wurfgeschwindigkeit mit geringerer, weil auf einen grössern Zeitraum vertheilter Arbeitskraft ausserordentlich vermehrt werden.

55 Das Arbeitsmaass ist der einfachste und natürlichste vergleichbare Ausdruck für den Arbeitswerth der verschiedenen Naturkräfte, die wir zur Erwerbung der mannichfaltigen Bedürfnisse des menschlichen Lebens in Angriff zu setzen und zu leiten suchen. Wir erhalten z. B. alsbald eine feste Grundlage zur Beurtheilung des Grades der Brauchbarkeit der Kraft des Menschen, des Pferdes, des Wassers zu gewissen mechanischen Leistungen, sobald wir den Umfang dieser Kräfte auf Gewichte zu bestimmten Höhen gehoben, zurückzuführen vermögen.

Bei der Beurtheilung des Maasses thierischer Kräfte nach dieser Hinsicht darf man jedoch nicht ausser Beachtung lassen, dass das zu äusseren Zwecken Verfügbare nur ein Ueberschuss ist über den zur Erhaltung der Lebensfunctionen nothwendigen Bedarf. Denn schon die gewöhnlichen von dem Leben unzertrennlichen Vorgänge, wie Pulsschlag, Athmen, Bewegung des Magens und anderer Glieder des Körpers beanspruchen eine gewisse mechanische Arbeit, deren Grösse wächst, wenn jene Bewegungen unter grösserer Muskelspannung vor sich gehen müssen. Bei dem Menschen bedingt daher schon das blosse Aufrechtstehen des Körpers in der Ruhe, das Halten eines Gewichtes, dann jede geistige Aufregung und Beschäftigung, das Denken, einen Mehrverbrauch der Körperkraft.

Wenn man nun mit diesen Erfahrungen zugleich die ausserordentlich grosse Verschiedenheit menschlicher Leistungsfähigkeit, in ihrer Abhängigkeit vom Geschlechte, dem Alter, der Abstammung, der Erziehung, den Gewohnheiten, der Willenskraft und Ernährung ins Auge fasst, könnte es leicht als ein vergebliches Bemühen erscheinen, für die Grösse der mechanischen Leistungen des Arbeiters einen festen und allgemeinen Anhalt aufsuchen zu wollen. Gleichwohl haben vieljährige sorgfältige Beobachtungen die Aufmerksamkeit zu gewissen allgemein zutreffenden Grundsätzen geleitet, auf deren Grundlage ein, in verschiedenen Ländern und bei verschiedenen Arbeitsformen allerdings nicht ganz gleicher Durchschnittswerth für die Tagesarbeit der Menschenkraft, wenigstens für gewisse Arten der Verwendung, namentlich beim Transporte von Lasten, sowie beim Heben und Fortbewegen des eignen Körpers bestimmt werden konnte.

Der grösste Gewinn aus der mechanischen Kraft des menschlichen Körpers, sowohl für den Arbeitgeber, wie für den Arbeitnehmer wird nicht durch einzelne sehr grosse Leistungen erzielt, sondern durch Regelmässigkeit und Dauer der Benutzung. Die Kraft darf nicht weiter erschöpft werden, als sie sich durch Ruhe und Ernährung von Tag zu Tag immer wieder ersetzt. In der Verwendung der physischen Kräfte ist daher ein gewisses Maass einzuhalten, sowohl bezüglich der unmittelbaren Anstrengung, wie hinsichtlich der Arbeitszeit. Bedeutende Abweichungen von diesem mittlern Arbeitsmaasse, in welchem Sinne sie auch stattfinden mögen, haben stets eine Minderung des Gesammteffectes der Arbeit zur Folge.

56 Was nun die tägliche Dauer der Arbeit während der sechs Arbeitstage in jeder Woche betrifft, so hat sich herausgestellt, dass eine wirkliche Arbeitszeit von acht Stunden, abgesehen übrigens von ihrer Vertheilung durch den Tag, der eigenthümlichen Beschaffenheit des Organismus am meisten zusagt, und eine möglichst grosse Entfaltung der Muskelthätigkeit zum Zwecke mechanischer Arbeiten vorzugsweise begünstigt. Während dieser Zeit kann für deutsche Arbeiter und mit Rücksicht auf die ihnen gewöhnliche bescheidene Lebensweise, auf jede Secunde durchschnittlich ein Arbeitsmaass von 10,5 Meter-Kilogramm in Anschlag gebracht werden. Es ergiebt sich daraus für den ganzen Tag die sehr bedeutende Zahl von $10{,}5 \cdot 8 \cdot 60 \cdot 60 = 302\,400$ Meter-Kilogramm. Hinsichtlich der Zerlegung der Zahl 10,5 in ihre Factoren, lässt sich nur so viel mit Sicherheit sagen, dass die Einhaltung gewisser Mittelwerthe, z. B. beim Transporte etwa 14 Kilogramm $^3/_4$ Meter hoch, den grössten Effect liefert; und dass grosse Abweichungen von diesen Zahlen (beispielsweise 7 Kilogramm $^6/_4$ Meter hoch) Nachtheil für das Gesammtresultat zur Folge haben, indem sie die Körperkräfte vorzeitig erschöpfen. Da das Arbeitsmaass von 10,5 Meter-Kilogramm sich auf die Secunde bezieht, so ist es üblich geworden, den Weg der arbeitenden Kraft, Geschwindig-

keit (richtiger, mittlere Arbeitsgeschwindigkeit) zu nennen. In diesem Sinne bedeutet die Zahl von $^3/_4$ Meter, oder eine von dieser nicht viel abweichende Zahl, die mittlere und zugleich die vortheilhafteste Arbeitsgeschwindigkeit des Menschen; für dessen tägliches Arbeitsmaass also die drei Factoren P, v und z in Betracht gezogen werden müssen.

Aehnliches giebt für die Zugkraft des Pferdes, als deren mittleres Maass in Deutschland ebenfalls die achtstündige Arbeitszeit, dann aber für jede Secunde der Druck von 60 Kilogramm 1,25 Meter hoch = 75 Meter-Kilogramm in Rechnung gebracht wird.

57 Unter Wasserkraft versteht man vorzugsweise die Arbeitsfähigkeit des Wassers vermöge seines Gewichtes durch den Fall. Hieraus geht nun unmittelbar hervor, dass das grösst mögliche Arbeitsmaass des Wassers eines Behälters, eines Baches, eines Flusses, wenn es von einem Ueberfalle herabsinkt, dadurch bestimmt werden kann, dass man sein Gesammtgewicht mit der Fallhöhe multiplicirt. Z. B. ein Cubikmeter Wasser, das von 1 Meter Höhe herabfällt, besitzt das Arbeitsmaass von 1000 Meter-Kilogramm, und würde, wenn von Secunde zu Secunde acht Stunden hindurch immer von Neuem zur Verfügung der Kraft von $13^1/_2$ Pferden oder derjenigen von 95 Menschen entsprechen.

Man spricht auch, allerdings weniger logisch richtig, von der Arbeitskraft des fliessenden und des ausströmenden Wassers. Da strömendes Wasser bereits Geschwindigkeit besitzt, so kann eigentlich nur von seiner lebendigen Kraft die Rede sein. Nun weiss man aber, dass, um letztere ganz oder theilweise zu zernichten, ein gewisses Maass von Arbeit, im entgegengesetzten Sinne der Bewegung des Wassers nothwendig ist. Wird diese Arbeit durch einen Widerstand ausgeübt, der dem Strom entgegentritt, z. B. durch die Schaufeln eines Rades, das sich nicht drehen kann ohne zugleich ein Gewicht zu heben, so erscheint gerade das Heben dieses Gewichtes als Arbeit des Wassers durch Einbusse seiner Geschwindigkeit. Wäre indessen diese Betrachtungsweise ganz tadellos, so müsste folgerichtig die Arbeit des gehobenen Gewichtes gleich sein dem Verluste des Wassers an lebendiger Kraft, dividirt durch $2g$. Letzteres ist aber keineswegs der Fall, wie in einem spätern Abschnitte dargethan werden soll.

Die Arbeitskraft des Wassers ist erschöpft, wenn es allmälig von den Höhen herabgesunken und vom Meere aufgenommen ist. Durch den Vorgang der Verdunstung, also durch einen Wärmeeffect wird es aber immer von Neuem gehoben und zur Arbeit verfügbar gemacht. Es ist einleuchtend, dass dieselbe Arbeit, welche 1 Cubikmeter Wasser erzeugt, indem es von 1 Meter Höhe herabsinkt, abermals verbraucht werden muss, um dieselbe Wassermenge wieder zu derselben Höhe emporzuschaffen. So erscheint uns die Wärme als eine mächtige mechanische Kraft, welche in unserm Beispiele sich in ein Gewicht umgesetzt hat, zu einer gewissen Höhe gehoben.

Das aus feuchter Atmosphäre niedergeschlagene Wasser, indem es fällt, verwandelt sein Arbeitsmaass in lebendige Kraft. Die so gewonnene Geschwindigkeit bleibt ihm jedoch nicht, sie erschöpft sich nach und nach vollständig wieder in den Hindernissen der Reibung. Man hat längst erkannt, dass die Reibung stets von Wärmeentwicklung begleitet ist, doch erst der neuern experimentellen Forschung blieb es vorbehalten, den Nachweis zu liefern, dass die Arbeit der verschwindenden Wärme, wenn sie ein Gewicht hebt, genau derjenigen gleich ist, welche dasselbe Gewicht als Druck aufwenden muss, um durch Vermittlung des Reibungsprocesses dieselbe Wärmemenge wieder zu erzeugen.

Auch die Arbeit der Dampfkraft ist nichts Anderes, als eine durch die Spannung der Dämpfe vermittelte Verwerthung der mechanischen Kraft der Wärme. Indem einem Wagenzuge auf der Eisenbahn durch die gespannten Dämpfe Bewegung ertheilt wurde, hat ein Umsatz von Wärme in lebendige Kraft stattgefunden, für welchen das Arbeitsmaass nach bekannten Regeln leicht bestimmbar ist.

In ähnlicher Weise sind auch andere Thätigkeitsäusserungen der Naturkräfte, Uebertragung von lebendiger Kraft in Massen oder Umsetzungen der einen Kräfte in andere, stets jedoch nach dem Gesetze der Arbeit.

Es wird nach diesen Erörterungen vollkommen einleuchtend sein, dass für die Frage der Arbeit an sich jede mechanische Kraft als Ausübungsmittel gleiche Berechtigung hat, sobald wir nur im Besitze geeigneter Vorkehrungen sind, diese Kraft zu beherrschen und für unsere Zwecke in geeigneter Weise zu leiten.

In einer weit zurückgelegenen Periode der Cultur waren die Menschen zur Ausführung ihrer Arbeiten fast ausschliesslich auf die eignen Körperkräfte beschränkt; und auch diese standen ihnen in vielen Fällen nur in unvollkommner Weise zu Gebote, weil es an passenden Werkzeugen zum Angriff fehlte. Viel später erst lernte man die Kraft des Pferdes und noch später die des Wassers benutzen. Gegenwärtig richtet sich der Scharfsinn in weitester Ausdehnung auf möglichst vollständige Ausbeutung der Kraft des Dampfes, also derjenigen der Wärme. Eine Vermehrung unserer Hülfsmittel durch Heranziehen der elektromagnetischen Kraft und ihres Arbeitswerthes scheiterte in den meisten Fällen nicht an der Ausführbarkeit, wie häufig geglaubt wird, sondern an der Kostspieligkeit im Vergleich zu anderen gleich brauchbaren Arbeitskräften. Eine Kraftansammlung von ungeheurer Grösse, die Fluthwelle, durch welche zweimal täglich viele Cubikmeilen Wasser gegen die Meeresküsten getrieben werden, an welchen sie aufsteigen und wieder sinken, hat man bis jetzt noch gar nicht versucht, unseren Zwecken zinsbar zu machen.

Sechster Abschnitt.

Vom Gleichgewichte.

58 Wenn zwei Kräfte einander entgegengesetzt und an Grösse gleich sind, so sagt man: sie stehen im Gleichgewichte. So befindet sich ein Gewicht, das auf dem Tische oder auf der Hand ruht, im Gleichgewicht mit dem Gegendruck des Tisches oder der Hand. Ein anderes Gewicht, das an einem Faden hängt, steht im Gleichgewicht mit der Spannung des Fadens, oder auch da diese Spannung sich bis zum Befestigungspunkt des Fadens mit gleicher Stärke fortpflanzt, die Schwere des anhängenden Körpers steht im Gleichgewicht mit dem Widerstande des Befestigungspunktes. Auch die inneren Kräfte eines beliebigen Körpers oder Körpersystems, da sie nach jeder Richtung hin entgegengesetzt gleich sein müssen, halten einander das Gleichgewicht.

59 Der Zustand des Gleichgewichts eines Körpers ist jedoch nicht gleichbedeutend mit Ruhezustand, wenn es schon wahr ist, dass zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, welche gleichzeitig auf einen Körper einwirken, keine Aenderung seines Bewegungszustandes herbeiführen können. Z. B. bei einem Wagenzug auf horizontaler Eisenbahn, sobald die Bewegung gleichförmig geworden ist, befindet sich der Druck des Dampfes, oder die davon abhängige bewegende Kraft im Gleichgewicht mit den Bewegungshindernissen. Verstärkt man die Dampfkraft, so beschleunigt sich die Bewegung; wird die Wirkung des Dampfes unterbrochen, so kommt der Wagenzug durch die Arbeit der Reibung allmälig zur Ruhe. Dieselbe Arbeit musste offenbar der Dampf in derselben Zeit leisten, wenn die Bewegung gleichförmig erhalten werden sollte.

Die gleichförmige Bewegung deutet also auf ein Gleichgewicht bewegender Kräfte, welche gleichzeitig entgegengesetzt gleiche Arbeiten erzeugen. Jede dieser Kräfte würde bei ungestörter Wirksamkeit dasselbe Maass an lebendiger Kraft hervorbringen; da aber beide einander entgegengesetzt sind, so heben sie sich wechselseitig auf, und der Anfangszustand erhält sich unverändert.

60 Die Bedingung des Gleichgewichts erfordert übrigens nicht als nothwendig, dass die Kräfte in gleicher Richtung und im Sinne entgegengesetzt wirksam seien. Nothwendig ist nur, dass beide Kräfte in einen solchen Wechselverkehr treten, dass die Arbeit der einen die der andern gleichzeitig immer wieder aufhebt.

Gleiche Gewichte an beiden Seiten einer gut ausgeführten und äusserst leicht beweglichen Rolle einer Fallmaschine herabhängend halten

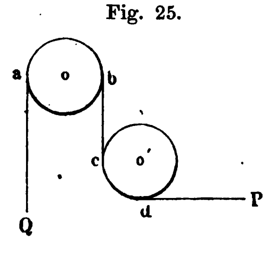
einander im Gleichgewicht, und wenn sie durch irgend einen Anstoss in Bewegung gesetzt sind, zeigt sich ihre Bewegung als eine gleichförmige. Denn bei der getroffenen Anordnung ist es unmöglich, dass das eine Gewicht sich bewegen kann, ohne nicht das andere alsbald nach sich zu ziehen, und wenn das eine um eine gewisse Höhe h sich gesenkt hat, muss nothwendiger Weise das andere um dieselbe Wegesstrecke h gehoben worden sein. Beide verrichten also im Sinne der Schwere gleichzeitig gleiche Arbeiten, die jedoch hinsichtlich ihres Endziels einander entgegengesetzt sind. Es fehlt somit, in soweit nicht noch andere Kraftäusserungen, beschleunigende Ursachen oder Bewegungshindernisse hinzukommen, jede Veranlassung, die irgendwie eingetretene Bewegung zu verändern. Letztere muss sich also gleichförmig, und die Kräfte müssen sich im Gleichgewicht der Bewegung erhalten.

Wird das eine der Gewichte durch einen andern Druck, etwa die Muskelkraft der Hand ersetzt, ohne gleichzeitige Störung des Gleichgewichtes, so kann das andere frei herabhängende Gewicht als Maass dieses Drucks gelten, und wenn die mit gleichförmiger Bewegung niedersinkende Hand dadurch jenes Gewicht um eine entsprechende Höhe aufwärts gezogen hat, so haben wieder beide in ihrer Wirkungsweise einander entgegengesetzte Kräfte gleiche Arbeiten verrichtet. Dieser Satz bleibt aber auch dann noch wahr, wenn die Hand, anstatt während ihrer Arbeit lothrecht niederzugehen, nach irgend beliebiger anderer Richtung, z. B. von b' nach P' oder von b'' nach P'' (Fig. 24) ihre Zugkraft ausübt, denn in allen diesen Fällen haben in ihrer Wirksamkeit entgegengesetzte Kräfte gleichzeitig gleiche Arbeiten ausgeführt.

Fig. 24.

So kommen wir zu dem wichtigen Lehrsatze, dass gleiche Kräfte, nach den mannichfaltigsten Richtungen in Thätigkeit gesetzt, einander das Gleichgewicht halten können, wenn sie so geleitet sind, dass die Bewegung der einen die der andern stets zur Folge hat und dass beide, jede in ihrer Richtung, gleichzeitig gleiche Arbeiten verrichten müssen. Durch die experimentelle Form ist zwar die Richtigkeit dieses Satzes nur für solche Kräfte anschaulich gemacht, deren Richtungen in dieselbe Ebene fallen. Es ist aber sehr leicht, dieselbe Betrachtungsweise auf die drei Dimensionen des Raumes auszudehnen, sobald man nur eingesehen hat, dass die durch anhängendes Gewicht Q auf einen Faden, welcher um eine leicht bewegliche Rolle herumgeschlungen ist, ausgeübte Spannung sich nach der andern Seite der Rolle mit

Fig. 25.



unveränderter Stärke fortpflanzt. Man denke sich dann zwei Rollen mit unverrückbaren Axen o und o', ähnlich wie in Fig. 25 (a. vor. S.) geordnet, so dass das von der obern Rolle herabgehende Fadenstück bc, um die untere Rolle umschlingen zu können, eine senkrechte Stellung einhalten muss, um alsbald zu verstehen, dass die Grösse der am andern Fadenende für die Bedingung des Gleichgewichtes anzubringenden Kraft P nicht davon abhängig sein kann, welche Lagen die beiden Axen der Rollen gegen einander einnehmen; dass diese also sich auch z. B. rechtwinklig durchkreuzen können.

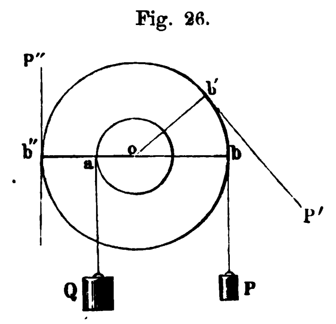
61 Auch zwischen ungleichen Kräften lässt sich ein Gleichgewicht herstellen, sobald man im Besitze eines Mittels ist, dieselben in der Weise gegen einander in Wirksamkeit zu setzen, dass sie gezwungen sind, während der Bewegung jede in ihrer Richtung gleichzeitig gleiche Arbeiten zu erzeugen, oder mit anderen Worten: Wege zu beschreiben, die sich verhalten umgekehrt wie die Kräfte.

Es giebt verschiedene Anordnungen, dieser Bedingung Genüge zu leisten. Wir wollen vorläufig nur einer derselben unsere Aufmerksamkeit zuwenden, der unter dem Namen des Hebels eine sehr wichtige Rolle in der theoretischen und praktischen Mechanik zuerkannt ist.

62 **Hebel** nennt man einen um einen festen Punkt drehbaren Körper oder ein Körpersystem, an welchem wenigstens zwei Kräfte in der Art in Angriff gesetzt sind, dass sie eine Drehung, die eine im entgegengesetzten Sinne der andern zu bewirken streben.

Es sei o (Fig. 26) der Stützpunkt eines Hebels. Gewöhnlich findet sich derselbe auf einer geraden Linie, der Drehaxe, welche an zweien ihrer Punkte gestützt ist und dadurch das drehbare System vor seitlichen Schwankungen sichert. Es seien ferner aQ und bP die Richtungen der Kräfte Q und P, welche einander im Gleichgewicht halten sollen. Die senkrechten Entfernungen $oa = q$ und $ob = p$ des Stützpunktes von den Richtungen der Kräfte nennt man deren Hebelarme, und die Durchschnittspunkte a und b die Angriffspunkte der Kräfte. Es ist aber durchaus nicht nothwendig, dass an diesen Punkten die körperlichen Träger der Kräfte auch wirklich ihren Sitz haben. Sind diese z. B. Gewichte, welche bei Q und P an Fäden hängen, so werden sich die denselben eingeprägten Spannungen mit unveränderter Stärke bis zu den Punkten a und b fortpflanzen und hier also ganz denselben Druck ausüben, wie an den sichtbaren Angriffsstellen. Muss sich der Druck durch Stangen oder

Fig. 26.



Stäbe oder sonst beliebig geformte feste Körper fortpflanzen, so werden diese gedehnt oder zusammengedrückt, d. h. ihre Elasticität wird für die Fortleitung der Kraft in Anspruch genommen und schliesslich (Nro. 35) findet sich diese mit ihrer vollen Stärke an jedem Punkte ihrer Richtung ebenso gewiss, als z. B. das ganze Gewicht eines Körpers, der nur auf einem einzigen Punkte ruht, von dieser Stütze empfunden wird.

Bei der Drehung beschreiben die Angriffspunkte a und b als Endpunkte der Kreishalbmesser $oa = q$ und $ob = p$ die Bögen $q\varphi$ und $p\varphi$, wenn man unter φ den Bogen für den Radius 1 versteht. Diesen Bogengrössen entsprechen die Wege, um welche z. B. das Gewicht Q gehoben wird, dagegen P gleichzeitig sich senkt. Führt man daher die Bedingung ein:

$$P : Q = q\varphi : p\varphi,$$

so folgt

$$P \cdot p\varphi = Q \cdot q\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

d. h. die Kräfte P und Q verrichten entgegengesetzt gleiche Arbeiten, halten also einander das Gleichgewicht. Dabei ist es principiell ganz gleichgültig, ob die Punkte a und b in ihrer geraden Verbindungslinie den Stützpunkt zwischen sich liegen haben, wie hier zunächst angenommen wurde, oder ob gemäss veränderter Richtungen der Kräfte auch die Angriffspunkte eine andere Lage erhalten, z. B. die Lage b' oder auch b'', wenn $b'P'$ oder $b''P''$ die Richtung der Kraft P vorstellt. Denn man bemerkt leicht, dass die Wege der Kräfte in ihren Richtungen dadurch keine Aenderungen erfahren, dass folglich der Bedingung obiger Gleichung nach wie vor Genüge geschieht. Gleichwohl unterscheidet man nach dem Sprachgebrauche der Technik, je nachdem die Hebelarme sich nach beiden Seiten des Drehpunktes erstrecken, oder beide auf derselben Seite liegen, oder irgend einen Winkel aob' (Fig. 26) einschliessen, den doppelarmigen Hebel, den einarmigen Hebel und den Winkelhebel. Die Anwendungen des in der Gleichung (α) enthaltenen Hebelgesetzes auf die Rechnung bleiben von diesen Unterscheidungen natürlich unberührt.

Das Product, welches durch Multiplication der Kraft mit dem zugehörigen Drehungsbogen erhalten wird, mit einem Worte: die Arbeit einer Kraft bei der Drehung des Hebels nennt man häufig ihr Bewegungsmoment. Daher der Ausspruch: Das Gleichgewicht am Hebel erfordert Gleichheit der Bewegungsmomente.

Wenn man in der Gleichung (α) den gemeinschaftlichen Factor φ weglässt, so verwandelt sie sich in

$$P \cdot p = Q \cdot q \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\beta)$$

In dieser Gestalt ausgedrückt sagt das Hebelgesetz, dass an dem Hebel Gleichgewicht stattfinde, wenn die Producte der Kräfte in ihre Hebelarme einander gleich seien, oder auch, wenn die Kräfte sich verhalten umgekehrt wie ihre Hebel-

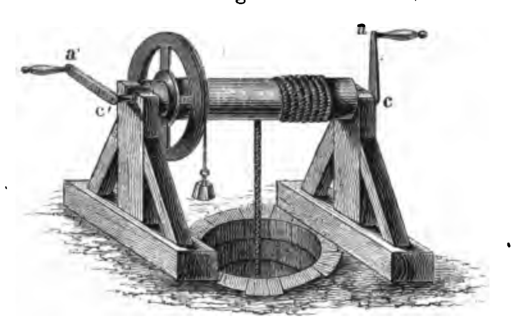
arme. Die Producte $P \, . \, p$ und $Q \, . \, q$ pflegt man die statischen Momente zu nennen.

Wenn unter den vier Grössen der Gleichung (β) drei bekannt sind, lässt sich die vierte durch Rechnung bestimmen.

63 **Rad an der Welle.** Fig. 27 zeigt eine sehr häufig vorkommende Anwendung des Hebels, das Rad an der Welle, eine feste Verbindung



Fig. 27



von zwei Rollen, die um eine gemeinschaftliche Axe drehbar sind. Die eine, eine kreisförmige Scheibe von geringer Dicke, ist um den äussern Rand herum zum Zweck der Aufnahme eines Seiles etwas ausgehöhlt. Ihr Halbmesser ist gewöhnlich grösser als derjenige der andern, die sich zu einer Walze oder Welle ausdehnt, hinlänglich breit, um ein Seil von gewisser Länge oder eine entsprechende Kette aufwickeln zu können. Die grössere Rolle (das Rad) bildet gewöhnlich die Angriffsstelle der Kraft, während die Last an dem von der Welle herabhängenden Seile befestigt ist, und durch Umdrehung des Rades gehoben werden kann. Gesetzt, der Radius des Rades, der Hebelarm der Kraft, halte 48 Centimeter, die Kraft selbst sei die eines Arbeiters = 14 Kilogramm, der Radius der Welle = 16 Centimeter, so findet man die Last, welche der arbeitenden Kraft das Gleichgewicht hält:

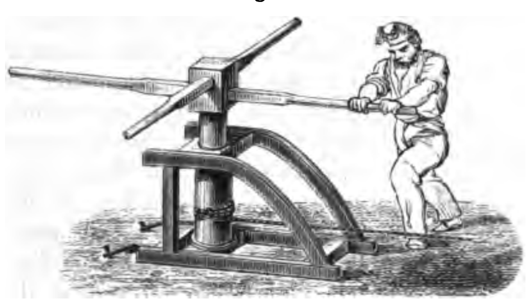
$$L = \frac{48 \, . \, 14}{16} = 42.$$

Das Rad an der Welle ist ein wesentlicher Bestandtheil zahlreicher zusammengesetzterer Maschinen. Wenn es unter dem Namen Haspel als selbstständige Maschine benutzt wird, ist das Rad gewöhnlich, sowie ac oder $a'c'$, Fig. 27, zeigt, nur durch einen Radius mit Querstück, als Handhabe für den Arbeiter (den sogenannten Krummzapfen oder die Kurbel) vertreten. Es ist nun einleuchtend, dass bei dieser Anordnung die Kraft bei jeder Umdrehung die Peripherie des fehlenden Rades beschreibt, also mit ihrer mittlern Stärke in einer Kreisbahn arbeitet. Jede Umdrehung des Rades bedingt eine Umdrehung der Welle. Da aber

letztere (in unserm Beispiele) nur ein Drittel vom Umfange des erstern hat, so sind drei Umdrehungen, also die dreifache Zeit nöthig, um die Last so hoch zu heben, als der einmalige Weg der Kraft ausmacht. Die Vermehrung der Wirksamkeit einer Kraft durch Vermittlung des Hebels ist also gleichsam eine Ansammlung der Kraft in der Zeit.

Eine andere Anwendungsweise des Rades an der Welle ist in der Fig. 28 dargestellt, es ist die sogenannte Winde, welche sich von dem Haspel im Wesentlichen nur dadurch unterscheidet, dass bei diesem die


Fig. 28.



Drehaxe horizontal, bei jenem aber vertical gerichtet ist. Die hier abgebildete Geräthschaft ist, wie man leicht erkennt, für vier Arbeiter berechnet. Da ausserdem der Hebelarm der Kraft neunmal so gross ist, als der der Last, so entspricht der von diesen vier Arbeitern ausgeübte Druck, an den Umfang der Welle übertragen (reducirt), dem von sechsunddreissig Arbeitern. Bis zu diesem Betrage darf also die zu bewegende Last steigen, die man sich an dem gespannten Seile angebracht denken muss.

Die Winde in der Gestalt als Pferdegöpel oder Rosskunst ist ein sehr bekanntes, vorzugsweise geeignetes Hülfsmittel, die Zugkraft des Pferdes zum Heben und im Allgemeinen zur Wältigung von Lasten zu benutzen.

Um zu demselben Zwecke die Wasserkraft in Angriff zu bringen, dienen bekanntlich die oberschlächtigen und unterschlächtigen Wasserräder, welche zu den Rädern an der Welle mit horizontal liegender Axe gehören.

Maschinen und Werkzeuge. Haspel und Winde rechnet man, **64** wie schon bemerkt wurde, zu den Maschinen, d. h. zu denjenigen Werkzeugen, die durch die besondere Weise ihrer Verbindung mit der treibenden Kraft eine gewisse Regelmässigkeit und Fortdauer der Arbeit gestatten, während der Name: Werkzeuge schlechthin meistens nur solchen Angriffs- oder Fortpflanzungsmitteln unserer Kräfte beigelegt wird, bei welchen jene Regelmässigkeit in der Benutzung unthunlich oder doch nicht bezweckt ist.

Eine grosse Anzahl unserer Werkzeuge sind auf den Hebel gegründet. So zeigt der Stubenschlüssel im Gebrauche die ganze Eigenthümlichkeit des Hebels. Der aus dem Schlosse hervorragende Ring dient, ähnlich wie der Krummzapfen des Haspels, als Hebelarm der Kraft, und das Moment dieser Kraft (Product der Kraft in ihren Hebelarm) auf den Kamm des Schlüssels, als Hebelarm der Last, reducirt (d. h. durch den Hebelarm der Last dividirt) giebt einen Druck gerade von der Grösse, um bei der Drehung des Schlüssels die Feder des Schlosses zu öffnen.

Scheeren und Zangen sind doppelte Hebel, und ihre Vernietung bildet den Drehungspunkt für beide. Sie schaffen uns, gleich allen anderen Werkzeugen, keine neuen Kräfte. Wohl aber setzen sie uns in den Stand, eine vorhandene Kraft vortheilhafter zu verwerthen und gerade an die Stelle zu leiten, welche sich vorzugsweise eignet, irgend einen gewünschten Effect hervorzubringen. Jedermann weiss, dass dieser Zweck mit um so geringerer Anstrengung erzielt wird, je näher die Last an dem Drehpunkte liegt, und je weiter entfernt von demselben die Kraft angreift. Zangen werden gewöhnlich als doppelarmige Hebel, zu manchen Vorrichtungen aber auch als einarmige Hebel angewendet. Die Zange zum Ausziehen der Nägel, auch die gewöhnliche Scheere gehören der ersten Art an. Die Zuckerzange sowie die Pincette zum Erfassen und Festhalten kleiner Gegenstände sind einarmige Hebel. Um auch ein Beispiel der Anwendung des Winkelhebels bei unseren Werkzeugen hervorzuheben, mag an den Splitthammer erinnert werden, wenn man sich dessen scharfkantiger, aus zwei Zinken bestehender Seite zum Herausreissen von Nägeln bedient. Bei genügender Länge des Hammerstiels hat es keine Schwierigkeit, eine Zugkraft von mehreren Centnern auf die Stelle zu concentriren, an welcher der Nagel Widerstand leistet.

65 **Hebel im Gliederbau des menschlichen Körpers.** Die Glieder der Menschen und Thiere zeigen zahlreiche bemerkenswerthe Anwendungen des Hebels.

Der menschliche gleich wie jeder thierische Körper mit Beziehung auf seine mechanische Einrichtung ist einer Maschine zu vergleichen, deren einzelne Theile, so lange sie sich im gesunden Zustande befinden, ungeachtet ihrer grossen Anzahl mit wunderbarer Ordnung und Sicherheit in einander greifen und sich bewegen. Diese Bewegungen erscheinen theils durch das Bedürfniss des Lebens, theils durch den Willen geleitet. Die eigentliche Triebfeder derselben, Lebenskraft genannt, ist uns ihrem innern Wesen sowie ihren physikalischen Gesetzen nach bis jetzt so gut wie unbekannt. Doch wissen wir, dass sie mit allen Theilen des Körpers durch eigenthümliche Leitungen, die Nerven, in Verbindung steht, durch deren Vermittlung die fast überall im Körper angesammelten Vorräthe einer besonderen mechanischen Kraft, der Muskelkraft, in Thätigkeit gesetzt und verwerthet werden können. Diese Kraftvorräthe finden sich in den Muskeln angehäuft; ähnlich wie

in dem gepressten Dampfe eines Dampfkessels eine bestimmte Menge von Wärme als Dampfkraft angesammelt und jeden Augenblick zur Verwendung bereit ist. Aber auch in ähnlicher Weise wird jene Kraft der Muskeln im Verbrauche verzehrt und muss, wie bekannt, durch die Nahrung von Zeit zu Zeit erneuert werden.

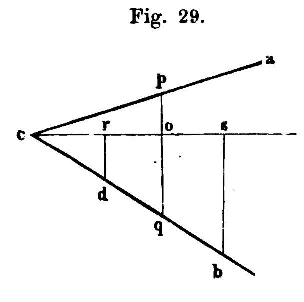
Muskeln sind nichts Anderes, als mehr oder weniger lange und dicke Bündel von Fleischmasse, welche im Leben die überaus merkwürdige, noch nicht erklärte Eigenschaft besitzen, aus dem Zustande der Unthätigkeit, sei es gezwungen durch das Bedürfniss des Lebens, sei es nach dem Willen ihres Besitzers, in plötzlichem Uebergange sich zusammenziehen, in diesem Zustande kürzere oder längere Zeit verharren oder auch sogleich in den frühern Zustand der Erschlaffung zurücktreten zu können. Während dieser Art der Arbeit verlieren sie an Gewicht, d. h. von ihrem Vorrathe an Kraft, der jedoch, wie schon bemerkt wurde, durch die Nahrung wieder ersetzt werden kann.

Die Zusammenziehung (Contraction) geschieht nach der Richtung der Längenfasern, welche den Grundbestandtheil des Fleisches ausmachen. Der Muskel verkürzt sich während dieses Vorgangs und schwillt an. Die Kraft, womit die Zusammenziehung vor sich geht, verhält sich wie der Querschnitt des Muskels, die Verkürzung ist um so beträchtlicher, je grösser seine Länge.

Die Muskeln setzen sich an den Theilen des Knochengerüstes, von welchen Bewegungen ausgehen oder zu deren Bewegung sie dienen sollen, nicht unmittelbar fest, sondern diese Verbindung wird durch Bindegewebstränge, die sogenannten Sehnen, vermittelt, deren Ansatzstellen häufig nicht unbeträchtlich von dem wahren Ende der Muskeln entfernt liegen. Den Sehnen fehlt zwar die Eigenschaft der Contractibilität, aber die durch Contraction ihrer Muskeln erzeugte Spannung pflanzt sich durch sie fort, ähnlich wie durch Fäden und Seile die Zugkraft eines angehängten Gewichtes.

Es ist leicht zu verstehen, dass zwei feste Stäbe ca und cb (Fig. 29), die bei c durch ein Gelenk zusammenhängen und welche ausserdem zwischen beliebig gewählten Punkten p und q durch eine contractile Substanz, wie durch einen Muskel, verbunden sind, sobald diese sich zusammenzieht, die zwischen ihnen vorhandene Winkelöffnung vermindern müssen. Ein Widerstand, der dieser Bewegung entgegensteht, kann mit in dieselbe hineingezogen, ein Gewicht z. B. gehoben werden, und es wird dabei eine Arbeit erzeugt, deren Maass durch die Grösse der Verkürzung (den Arbeitsweg), multiplicirt mit der ausgeübten mittlern Spannung bestimmt ist.

Fig. 29.



Es sei P diese Spannung, L die bewegte Last. Die Grösse der letztern in ihrer Abhängigkeit von P ergiebt sich nach dem Hebelgesetze. Fällt ihre Richtung in die der Spannung pq, so ist

$$L = P.$$

Befindet sich ihre Angriffsstelle bei d näher dem Gelenke und erstreckt sich ihre Wirksamkeit nach dr gleichlaufend mit pq und winkelrecht auf cs, so ist

$$L = \frac{P \,.\, co}{cr},$$

also grösser als P.

Ist b, entfernter vom Gelenke, die Angriffsstelle der Last, aber ihre Richtung bs gleichlaufend mit pq, so wird

$$L = \frac{P \,.\, co}{cs},$$

d. h. kleiner als P.

Ganz allgemein ist das statische Moment der Contractionskraft $P . co$ gleich dem Momente $L . x$ des Widerstandes, der noch überwunden werden kann, welche Richtung immerhin derselbe haben mag; wobei jedoch nicht übersehen werden darf, dass x den Hebelarm der Last, d. h. den senkrechten Abstand des Drehpunktes c von der Richtung der Last bedeutet. Die Wege von Kraft und Last, je in ihren Richtungen, verhalten sich (wie bei allen Hebeln) umgekehrt wie die Grössen der letzteren oder auch direct wie ihre Hebelarme. In allen Fällen also kommt die von einem contractilen Körper (einem Muskel) ausgeführte Arbeit zur vollständigen Verwerthung, sei es bei kurzem Wege durch grosse Kraftäusserung, sei es, wenn letztere gering ist, durch verhältnissmässige Vergrösserung des erstern.

Von diesen Beziehungen hat die Natur im thierischen Organismus den ausgiebigsten Gebrauch gemacht. Dies ist schon vor 200 Jahren von Borelli in seinem berühmten Werke „*De motu animalium*" dargethan worden. Besonders hat er damals schon in einer auch die Anforderungen der gegenwärtigen Zeit befriedigenden Weise die enge Abhängigkeit thierischer Kraftäusserungen vom Hebelgesetze gezeigt und erklärt. Dem Plane dieses Buches gemäss können wir hier nur einige wenige Fälle als erläuternde Beispiele hervorheben.

Das Gebiss des Menschen ist einer einarmigen Zange zu vergleichen, deren beide Schenkel, der Ober- und Unterkiefer durch ein Gelenk, als ihrem gemeinschaftlichen Drehpunkte, verbunden sind. Die Bewegung des Unterkiefers geschieht durch Muskeln, die sich auf beiden Seiten aus der Nähe des Gelenkes bis zu den Mundwinkeln fortsetzen. Die Hauptstränge derselben, die Kaumuskeln, haben jedoch ihre Ansatzstellen nahezu in demselben Abstande von dem Drehpunkte, wie die hintersten Backenzähne.

Jeder dieser Muskelbündel, für sich betrachtet, übt, so oft er sich zusammenzieht, in seiner Richtung einen seiner Contractionskraft gleichen

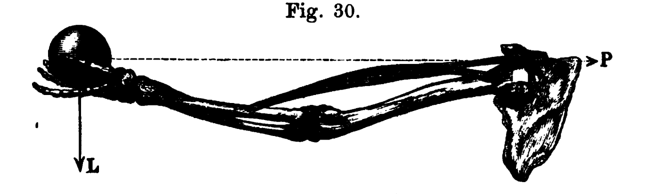
Druck, der aber an beliebige andere Stellen versetzt gedacht, eine je nach dem Hebelverhältnisse veränderte Stärke gewinnt. Alle vereinigen sich daher an jeder Stelle der Zahnreihe, die man wählen mag, zu einem gemeinschaftlichen Muskeldruck, dessen Wirksamkeit, je näher dem Gelenke, um so grösser wird. Zwischen den hintersten Backenzähnen lässt sich daher die grösste Gewalt ausüben. Weiter nach vorn mindert sie sich im Verhältniss der vergrösserten Hebelarme, und die Vorderzähne sind, auch abgesehen von ihrer Gestalt, zum Zermalmen nur wenig noch geeignet. Die Natur hat ihnen, ganz entsprechend ihrer geringen Fähigkeit, zu bedeutenden Kraftäusserungen mehr die Beschaffenheit von Messern verliehen.

Dem menschlichen Arme, vermöge seiner Einrichtung und Muskulatur, ist eine grosse Freiheit der Bewegungen gestattet. Er hängt an der Schulter mittelst einer Art von Kugelgelenk und besitzt dadurch Beweglichkeit nach allen Richtungen. Stark entwickelte Muskeln, welche sich von der Schulter über das Gelenk zum Oberarme verlaufen, lenken seine Bewegungen. Zum Heben des Arms dient insbesondere *musc. deltoideus*, der unmittelbar unter der Haut liegend das Schultergelenk von aussen her kapselartig bedeckt.

Die selbstständigen Bewegungen des Unterarms um das Ellenbogengelenk beschränken sich auf Krümmen und Strecken. Beides wird durch Muskeln bewirkt, die sich über den obern Arm ausbreiten, und zwar die Beugemuskeln an der vordern, die Streckmuskeln an der hintern Armfläche. Ihre Fortsätze überschreiten das Gelenk und sind jenseits desselben am Unterarm befestigt. Ihre oberen Befestigungspunkte finden sich theils am Oberarm nahe dem Schultergelenk, theils schon über dasselbe hinaus. So bei *musc. biceps*, der auf der vordern Armfläche unmittelbar unter der Haut liegt und gemeinschaftlich mit dem tiefer liegenden *musc. brachialis internus* das Einbiegen des Unterarms beherrscht.

Bei gerade gestrecktem Arm und horizontaler Lage desselben kann man bekanntlich kein sehr grosses Gewicht bewegen oder auch nur halten. Ein Blick auf Fig. 30 lässt sogleich den Grund erkennen. Der

Fig. 30.



Arm bildet in dieser Lage einen Winkelhebel, dessen Drehpunkt o im Schultergelenk liegt, an dessen langem Hebelarme $R = ab$ die Last wirksam ist, während der Kraft, der Muskelspannung nur der kurze Hebelarm $r = ob$ zur Verfügung steht. Beide verhalten sich ungefähr wie 20 zu 1. D. h. um ein Gewicht von 10 Pfund bei wagerecht aus-

gestrecktem Arme in der Hand halten zu können, ist, abgesehen vom Gewicht des Arms selbst, eine Kraftäusserung des Schultermuskels von beiläufig 200 Pfund erforderlich. Man begreift, warum unter diesen Umständen das blosse Ausstrecken des unbelasteten Arms sehr bald ermüdend wird.

Andererseits bietet der ausgestreckte Arm sehr günstige Bedingungen, um die im Ganzen doch nur kurze Wegesstrecke, welche die Muskelkraft durch Contraction des Muskels unmittelbar zurücklegen kann, in eine viel grössere, im angenommenen Falle 20mal grössere Wegeslänge zu verwandeln, und selbst durch diesen Raum ein mässiges Gewicht zu führen.

Wenn der Arm an der Seite des Körpers frei herabhängt, so ist ein mit der Hand erfasstes Gewicht unmittelbar gestützt, denn die Richtung seiner Schwere fällt wie bei jedem andern frei hängenden Körper in den Stützpunkt, hier den Drehpunkt o des Schultergelenks.

Bringt man den Unterarm durch Drehung um das Ellenbogengelenk in die Fig. 31 abgebildete Lage, so gewinnt das nunmehr um die Höhe $a'c$ gehobene Gewicht L ein statisches Moment $L \,.\, ac$, welchem die Muskelspannung P durch das Moment $P.pc$ das Gleichgewicht zu halten hat. Es ist also $L = P \frac{pc}{ac}$. Das Verhältniss $\frac{pc}{ac}$ ist ungefähr gleich $1/_{10}$. Die Hand kann demnach bei gleicher Anstrengung wie vorher bei ausgestrecktem Arme jetzt die doppelte Last halten. Freilich ist dagegen der Spielraum der Bewegung ein verhältnissmässig kleinerer geworden.

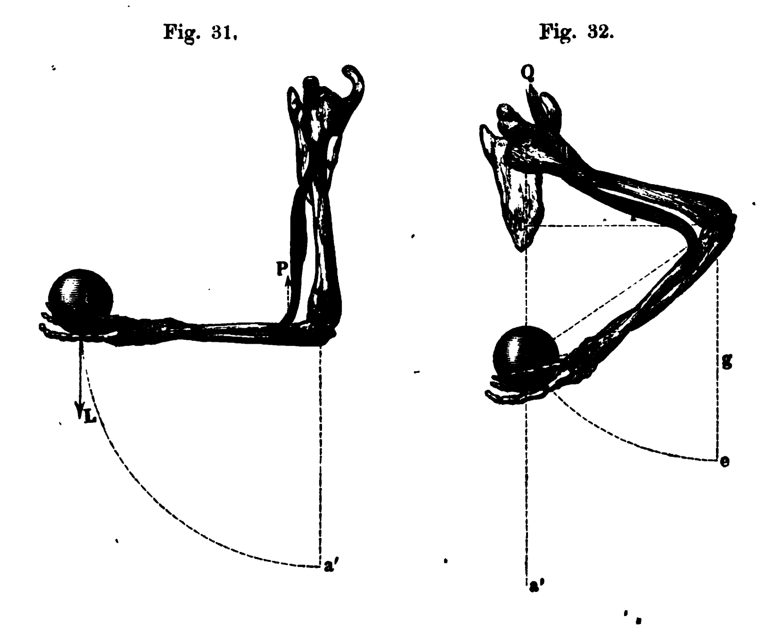


Fig. 31. Fig. 32.

Es ist zu bemerken, dass die Last während ihrer Bewegung durch den Bogen $a'a$ anfangs das Moment Null hat, dass aber der Hebelarm im Verhältniss zum Sinus des beschriebenen Bogens allmälig zunimmt, und endlich nach einer Erhebung bis zu 90° seinen grössten Werth erreicht. Günstigere Verhältnisse für das Heben und Tragen einer Last können herbeigeführt werden, wenn die Tragkraft, sowie Fig. 32 andeutet, sich auf die Muskeln des Oberarms und der Schultern vertheilt.

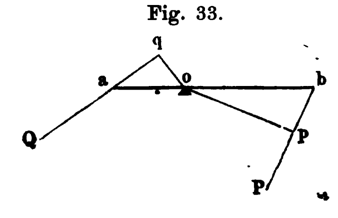
Während der Unterarm unter dem Einflusse von *musc. biceps brachialis* sich um das Ellenbogengelenk dreht, den Bogen ea beschreibt und dadurch den Punkt a auf die Wegeslänge eg senkrecht erhebt, wird der Drehpunkt c selbst vermöge der Zugkraft von *musc. deltoideus* durch den Bogen ca bewegt und senkrecht von a bis d gehoben. Während des gleichzeitigen Eintretens dieser beiden Drehungen kann die Last L, welche sich anfangs im Punkte a' befand, fortdauernd in der Schwerlinie, d. h. senkrecht unter dem Hauptstützpunkte o verweilen. Diese Lage entspricht der kleinsten Muskelanstrengung, weil in derselben die Last mit Beziehung auf den Punkt o unmittelbar kein Moment hat. — Es ist $ad = cg$; die ganze Erhebung $cg + ge = ce$ nach Annahme $= aa'$. Die Last ist also zu derselben Höhe wie in Fig. 31 gehoben. Gleichwohl sind die Armmuskeln weniger angestrengt, denn es ist mit Beziehung auf den Drehpunkt c

$$L = P\frac{pc}{dc} = P\frac{pc}{ag} = P\frac{pc}{ac.\sin acg}.$$

Der Hebelarm der Last ist folglich kleiner geworden. Der Widerstand gegen die Drehung des Punktes c ist ebenfalls von der Last L abhängig, entspricht jedoch, wie später gezeigt werden soll, nicht der ganzen Grösse derselben.

66 Durch die Vermittlung des Hebels kann ein gegebener Druck P nach jeder beliebigen Richtung fortgepflanzt werden, in der gerade der Widerstand sich vorfindet, und er erscheint an dieser Stelle und in dieser Richtung in einer Grösse, die sich immer bestimmen lässt, indem man das Moment der Kraft dividirt durch den Hebelarm, d. h. durch den senkrechten Abstand des Stützpunktes von der Richtungslinie, des Widerstandes. Die Missachtung dieses bestimmten und klaren Begriffs eines Hebelarms hat oft schon, insbesondere bei der Benutzung stangenförmiger Hebel, Veranlassung zu Missverständnissen gegeben. Es sei z. B. die Linie ab (Fig. 33) die lineare Dimension einer Hebelstange, o der Drehpunkt, aQ die Richtung einer Kraft Q, bP diejenige einer Kraft P, so sind nicht die Linien ao und bo, auf deren Endpunkte die Kräfte freilich unmittelbar ihren Druck äussern, sondern die Perpendikel op und oq, welche bei begin-

Fig. 33.



nender Drehung in den Richtungen der Kräfte kleine Kreisbögen beschreiben, die Hebelarme, und das Gleichgewicht knüpft sich an die Gleichheit der Momente $P \, . \, op$ und $Q \, . \, oq$.

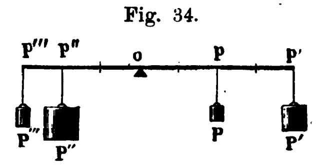
Es ist nun einleuchtend, warum jede Veränderung in der Richtung einer durch den Punkt b einer Stange ab wirksamen Kraft eine Veränderung des Momentes zur Folge hat, und dass ihr grösstes Moment dann erreicht wird, wenn ihre Richtungslinie mit der Linie ab einen rechten Winkel bildet.

67 Jede Kraft kann durch eine andere ersetzt werden, die ein gleiches statisches Moment hat und in gleichem Sinn arbeitet. Nun sei $Qq = Pp$ und $P = P' + Q'$, somit $Qq = P'p + Q'p$. Man ersetze die Kraft Q' durch eine andere P'' am Hebelarme p'' so, dass $Q'p = P''p''$, so folgt $Qq = P'p + P''p''$; und es entsteht jetzt ein Gleichgewichtsverhältniss zwischen drei Kräften. Es ist übrigens leicht einzusehen, dass zugleich auch dem Arbeitsgesetze Genüge geschieht, d. h. dass durch die Arbeit der Kraft Q diejenige der Kräfte P' und P'', die in gleichem Sinne wirken, gleichzeitig immer wieder aufgehoben wird.

Indem man ganz dasselbe Verfahren auch auf die Kraft Q u. s. f. ausdehnt, lässt sich darthun, dass nicht nur zwei oder drei, sondern eine beliebige Anzahl Kräfte, die gleichzeitig um einen festen Punkt herum wirksam sind, einander das Gleichgewicht halten müssen, wenn ihre statischen Momente, im einen und andern Sinne genommen, sich zu Null ergänzen, oder was dasselbe sagt: wenn ihre gleichzeitigen Arbeiten zwei entgegengesetzt gleiche Summen bilden.

68 Das hier angewendete Verfahren, das Hebelgesetz auf drei und mehr Kräfte auszudehnen, ist unabhängig von den Richtungen der Kräfte um ihren gemeinschaftlichen Stützpunkt herum. Wir wollen aber jetzt bestimmt eine Anzahl paralleler und gleich gerichteter Kräfte, z. B. eine Anzahl Gewichte annehmen, die senkrecht in derselben geraden Linie (Fig. 34) angreifen und um einen festen Punkt o herum einander das Gleichgewicht halten. Wenn man die Hebelarme dieser Kräfte vom Punkte o aus nach der rechten und linken Seite misst, und z. B. die ersteren als positive bezeichnet, so muss man den letzteren das negative Zeichen beilegen, und der Ausdruck des Gleichgewichtes, z. B. zwischen vier Kräften, lässt sich dann durch die Gleichung

Fig. 34.



$$Pp + P'p' - P''p'' - P'''p''' = 0$$

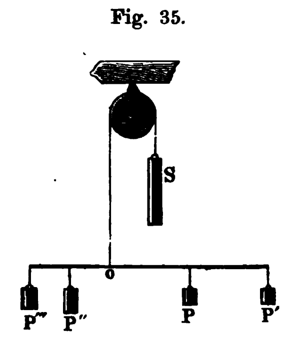
darstellen. Man kann aber auch, indem man sich vorbehält, bei der Anwendung auf bestimmte Zahlenwerthe jedem Hebelarme das ihm gebührende Zeichen zu geben, kurzer Hand setzen:

$$Pp + P'p' + P''p'' + \cdots = 0.$$

Dies ist der allgemeine Ausdruck des Gleichgewichtes einer beliebigen Anzahl paralleler Kräfte. In Worten ausgesprochen: **Eine beliebige Anzahl paralleler Kräfte halten einander das Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe ihrer statischen Momente gleich Null ist.**

69 **Schwerpunkt.** Die Kräfte P, P', P'' u. s. w., welche sich um den Punkt o im Gleichgewichte halten, üben gegen diesen Punkt einen Druck $= S$. Wird bei o ein diesem Drucke S gleicher Druck in entgegengesetztem Sinne angebracht, etwa durch Vermittlung einer Rolle (Fig. 35), so kann ohne Störung des Gleichgewichtes der Kräfte die Stütze bei o entfernt werden, indem ja die Zugkraft S den nothwendigen Widerstand der Stütze vollständig ersetzt. Gesetzt, die Angriffslinie der Kräfte (Gewichte) habe sich, mit sich selbst parallel, gesenkt und der Höhenunterschied ihrer beiden Lagen sei a, so haben sämmtliche Kräfte in ihren Richtungen den Weg a beschrieben, also Arbeiten verrichtet, und da nach Annahme Gleichgewicht stattfindet, so muss die Arbeit der Kraft S diejenige der anderen Kräfte, welchen sie entgegengesetzt ist, aufheben. Es ist folglich

Fig. 35.



$$(P + P' + P'' + \cdots)\, a = S\, a,$$

und somit auch

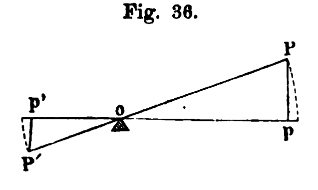
$$P + P' + P'' + \cdots = S.$$

Der von den Kräften gegen ihren Stützpunkt ausgeübte Druck ist an Grösse gleich der Summe der Kräfte.

Wenn Gleichgewicht stattfindet, concentrirt sich also im Stützpunkte der Druck sämmtlicher paralleler und in gleichem Sinne wirksamer Kräfte.

Den Stützpunkt einer beliebigen Anzahl paralleler, gleich gerichteter Kräfte (z. B. Gewichte), welche ihre Angriffspunkte in derselben geraden Linie finden, nennt man auch **den Schwerpunkt** dieser Kräfte. Diese Bezeichnung, obwohl zunächst dem Verhalten schwerer Körper entlehnt, gilt doch allgemein für solche Kräfte, die zu einem zusammengehörigen System verbunden und deren Richtungen gleichlaufend sind und in gleichem Sinne gehen.

Fig. 36.



70 Wenn die Angriffslinie einer Anzahl schwerer Punkte um ihren Schwerpunkt o (Fig. 36) gedreht wird, so verändern sich die Hebelarme der Kräfte. Es sei z. B. $Pop = \alpha$ der Drehungswinkel, so

verwandelt sich der frühere Hebelarm oP der Kraft P in $op = oP \sin\alpha$. Ebenso verwandelt sich oP' in $op' = oP' \sin\alpha$. War nun für die Bedingung des Gleichgewichtes früher

$$P \,.\, oP = P' \,.\, oP',$$

so ist auch

$$P \,.\, oP \sin\alpha = P' \,.\, oP' \sin\alpha,$$

folglich

$$P \,.\, op = P' \,.\, op'.$$

Wenn zwei oder mehr parallele Kräfte in ihrem Schwerpunkte gestützt sind, so kann durch eine Drehung der Angriffslinie der Kräfte ihr Gleichgewicht nicht gestört werden. Aus diesem Grunde ist es bei geraden Hebelstangen und parallelen Kräften unschädlich, wenn in der Rechnung anstatt der wirklichen, mathematischen Hebelarme die scheinbaren, auf die physikalischen Angriffsstellen bezogenen gesetzt werden.

71 Aus der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichtes paralleler Kräfte

$$Pp + P'p' + P''p'' + \cdots = 0$$

folgt:

$$Pp + P'p'' + P''p'' + \cdots + (P + P' + P'' + \cdots)s = (P + P' + P'' + \cdots)s,$$

oder auch, da $P + P' + P'' + \cdots = S$,

$$P(s + p) + P'(s + p') + P''(s + p') + \cdots = Ss.$$

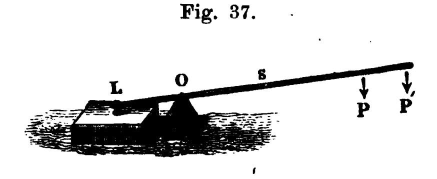
Diese Gleichung belehrt uns, dass eine Verlegung des Drehpunktes der Kräfte aus ihrem Schwerpunkte nach einer beliebigen andern Stelle ihrer Angriffslinie das Gleichgewicht ungestört lässt, sobald man im Schwerpunkte eine neue, der Summe der Kraft gleiche Kraft im entgegengesetzten Sinne einwirken lässt. In der That bedeutet s den Abstand des neugewählten Drehpunktes von dem Schwerpunkte; daher Ss das Moment der in dem Schwerpunkte vereinigten parallelen Kräfte, bezogen auf den veränderten Drehpunkt. Ebenso bedeutet $s + p$ den Abstand des Angriffspunktes der Kraft P von dem neuen Drehpunkte, folglich $P(s + p)$ ihr Moment bezogen auf den letztern. Dasselbe gilt beziehungsweise für die anderen Kräfte. Man darf daher behaupten: die Summe der Momente der Kräfte bezogen auf den veränderten Drehpunkt ist gleich dem Momente des Schwerpunktes.

Es fliesst aus diesem Satze die einfache Regel, dass die Lage des Schwerpunktes gleichlaufender und gleichgerichteter Kräfte gefunden wird, indem man die Summe ihrer statischen Momente, bezogen auf einen beliebigen Punkt ihrer Angriffslinie durch die Summe der Kräfte dividirt.

Angenommen beispielsweise, eine cylindrische eiserne Stange von 2,5 Meter Länge und 40 Pfund Gewicht soll zum Heben einer Last L (Fig. 37) benutzt werden, und es sei $Lo = 0{,}5$ Meter der Hebelarm der letztern. Der Schwerpunkt der Stange liegt in der Mitte derselben, bei s, also in einem Abstande $os = 0{,}75$ Meter von dem Stützpunkte. Das

Gewicht der Stange in ihrem Schwerpunkte concentrirt gedacht, wirkt demnach mit einem Momente 40 . 0,75 zum Heben der Last. Wenn nun ausserdem noch eine Kraft P = 150 Pfund am Hebelarm 1,5 Meter und eine Kraft P' = 140 Pfund am Hebelarm 2 Meter angebracht wird, so befindet sich der gemeinschaftliche Wirkungspunkt oder der Schwerpunkt dieser drei Kräfte im Abstande

Fig. 37.



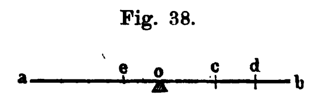
$$x = \frac{40 \,.\, 0{,}75 + 150 \,.\, 1{,}5 + 140 \,.\, 2}{40 + 150 + 140} = 1{,}60 \text{ Meter}$$

vom Stützpunkte. An dem Hebelarm 1,6 Meter concentrirt sich also gleichsam eine Kraft von 40 + 150 + 140 = 330 Pfund, um die bei L befindliche Last zu heben, deren Moment mithin die Grösse von 330 . 1,6 nicht übersteigen darf.

Das Gesetz des Hebels ist, wie man weiss, zuerst von Archimedes erkannt worden; er hat es aber nicht, wie hier geschehen, aus dem Arbeitsgesetze abgeleitet, dessen Verständniss eine Errungenschaft der neuern Zeit ist. Archimedes ging in seiner Erklärung von dem Begriffe des Schwerpunktes aus. Man denke sich eine gerade, schwere Linie ab (Fig. 38), deren Gewicht gleichförmig durch ihre ganze Länge vertheilt ist, deren Schwerpunkt folglich in der Mitte liegt. Wird der Mittelpunkt o gestützt, so halten sich beide Hälften der Linie um diesen Punkt im Gleichgewicht und üben auf denselben einen ihrem Gesammtgewicht gleichen Druck, indem ja für diesen Druck keine andere Unterlage vorhanden ist. Jedes andere, dem der Linie ab gleiche Gewicht, würde, wenn nur in dem Punkte o gestützt und ruhend, genau ebenso stark auf diesen Punkt drücken. Man denke sich ferner die Linie ab an irgend einer Stelle c in zwei Abtheilungen ac und cb gebracht. Da diese wieder schwere Linien sind, so lässt sich auf sie das für die Linie ab geltend gemachte ebenfalls anwenden. Jede kann als ein in ihrem Mittelpunkte concentrirtes Gewicht angesehen werden. Wäre es ausführbar, ohne Störung des Zusammenhangs das Gewicht der Linie cb durch ein gleiches im Mittelpunkte d angehängtes Gewicht zu ersetzen, und ebenso anstatt der Linie ac in ihrem Mittelpunkte e ein ihrem Gewichte genau gleiches Gewicht anzubringen, so würden die Beziehungen der auf beiden Seiten der Stütze o vorhandenen Drücken zu diesem Stützpunkte unverändert geblieben, folglich das Gleichgewicht nicht gestört worden sein. Es sei Gewicht $cb = P$ und $ac = Q$. Nun ist:

72

Fig. 38.



$$oe = ao - ae = {}^1/_2\, ab - {}^1/_2\, ac = \frac{ab - ac}{2} = \frac{cb}{2}.$$

Ferner $od = ob - db = \frac{1}{2} ab - \frac{1}{2} cb = \frac{ab - cb}{2} = \frac{ac}{2}$,

daher $oe : od = cb : ac.$

Es ist aber auch $P : Q = cb : ac$; folglich

$$P : Q = oe : od.$$

Für die Bedingung des Gleichgewichtes verhalten sich die Gewichte umgekehrt wie die winkelrechten Entfernungen ihrer Richtungen vom Stützpunkte.

Die Archimed'sche Erklärung des Hebels lässt sich ohne Schwierigkeit durch ein Experiment anschaulich machen. Wenn man einen prismatischen Stab von Holz oder Metall und etwa $\frac{1}{2}$ Meter Länge durch eine Drehaxe stützt, die winkelrecht gegen seine Längenrichtung genau durch den Schwerpunkt gelegt ist, so erhält sich der Stab um diese Axe herum in jeder Lage, die man ihm geben mag, im Gleichgewichte (Nro. 70). Liegt jedoch der Schwerpunkt unter der Drehaxe, sowie Fig. 39 andeutet, so erfordert die Bedingung des Gleichgewichtes, dass der Schwerpunkt s lothrecht unter dem Stützpunkte o sich befinde. Denn sowie er aus dieser Stellung abweicht, z. B. durch Drehung des Stabes in die Lage s' gelangt, wirkt der in ihm concentrirte Druck P durch die Linie ds' am Hebelarme do und gewinnt dadurch ein Moment $P \cdot do$, welchem ein anderes Moment nicht entgegensteht. Gleichgewicht ist also nur möglich unter der Bedingung $do = 0$, d. h. wenn der Schwerpunkt in der Lothlinie os sich befindet und die Linie ab eine horizontale Lage angenommen hat. Legt man auf die sorgfältig geebnete Oberfläche des Prismas ein kleines Gewicht seitwärts vom Punkte o, so neigt sich das Prisma nach dieser Seite, so lange, bis das Moment des aufgelegten Gewichtes dem durch die schiefe Stellung des Prismas gebildeten Momente des Schwerpunktes das Gleichgewicht hält. Wird dagegen ein anderer prismatischer Stab von derselben Länge ab, aber nur geringer Dicke, auf die Oberfläche ab so gelegt, dass sein Mittelpunkt genau über den Punkt o zu stehen kommt, so muss sich bei nicht allzu grossem Gewichte des zweiten Stabes und richtiger Einstellung das Gleichgewicht bei horizontaler Lage der Stäbe erhalten. Durchschneidet man hierauf den obern Stab an irgend einer Stelle, so lassen sich beide Abtheilungen um ihre Schwerpunkte drehen, ohne dass das Gleichgewicht gestört wird. Hätte z. B. (Fig. 40)

Fig. 39.

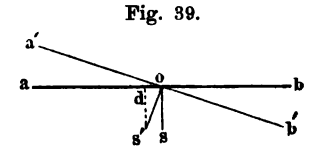
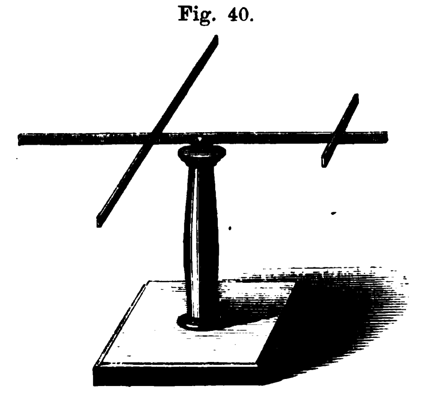


Fig. 40.



die eine Abtheilung $^1/_5$, die andere $^4/_5$ der ganzen Länge betragen, so würde man leicht erkennen, dass der Schwerpunkt des kürzern Stücks bezüglich seiner Lage auf der ebenen Oberfläche des untern Stabes, sich in viermal grösserm Abstande von dem Stützpunkte o befände, als der Schwerpunkt des längern Stücks.

Das Hebelgesetz nach der Darstellung des Archimedes bezieht sich streng genommen nur auf das Gleichgewicht paralleler Kräfte in der Ruhe. In dieser Einschränkung genommen ist aber die Erklärung scharf und überzeugend und behauptet daher auch in der gegenwärtigen Zeit noch und zwar nicht bloss als Document für die Geschichte der Physik, einen bedeutenden Werth.

73 Weiter oben (Nro. 71) ist gezeigt worden, dass parallele Kräfte, die sich um ihren Schwerpunkt im Gleichgewichte halten, eine Verlegung des Drehpunktes in der Angriffslinie der Kräfte gestatten, ohne dass dadurch das Gleichgewicht gestört wird, sobald man in dem Schwerpunkte eine neue Kraft, an Grösse gleich der Summe der Kräfte, in entgegengesetztem Sinne angreifen lässt. Da dieser Satz, nach der Art wie der Beweis geführt wurde, für jeden Punkt in der Angriffslinie der Kräfte richtig ist, so muss er auch für irgend einen der Angriffspunkte der Kräfte selbst Geltung haben. Es sei z. B. derjenige der Kraft P als Drehaxe gewählt worden. Der gegen diesen Punkt vorher ausgeübte Druck P kann dadurch keine Aenderung erfahren haben. Dasselbe lässt sich beziehungsweise von jedem andern Punkte der Linie sagen, durch welchen die Drehaxe gelegt werden mag. Man darf daher ganz allgemein aussprechen: der Druck, welchen parallele Kräfte, die, zu demselben Hebelsystem gehörend, theils im positiven, theils im negativen Sinne im Angriff stehen, gegen ihren Drehpunkt ausüben, wird gefunden, indem man die Summe der negativen Kräfte von derjenigen der positiven abzieht.

74 **Kräfteparallelogramm.** Wir wollen jetzt den Druck zu bestimmen suchen, welchen zwei Kräfte im Gleichgewicht, deren Richtungen einen Winkel einschliessen, gegen ihren Unterstützungspunkt äussern. Es seien Q und P die Kräfte, Qo und Po (Fig. 41) ihre Richtungen, c der Stützpunkt, folglich die gegen die Kraftrichtungen geführten Senkrechten ca und cb die bezüglichen Hebelarme. Da Gleichgewicht stattfinden soll, so ist $P : Q = ca : cb$.

Fig. 41.

Jeder Punkt in der Richtungslinie einer Kraft kann als Sitz derselben betrachtet werden. Es ist daher gestattet, die beiden Kräfte in den Durchschnittspunkt ihrer Richtungen versetzt zu denken. Hieraus folgt, dass die Richtung des gemeinschaftlichen Druckes, den sie gegen den

Stützpunkt c ausüben, entlang der Linie oc geht, die den Durchschnittspunkt o mit dem Stützpunkte c verbindet. Denn ginge dieser Druck zur Seite des Punktes c, rechts oder links, so würde eine Drehung erfolgen müssen, also kein Gleichgewicht vorhanden sein.

Man ziehe die geraden Linien cp und cq (Fig. 42) parallel mit den Richtungen der Kräfte, so werden auf den letzteren die Stücke op und oq abgeschnitten, welche Seiten eines Parallelogramms bilden und im Grössenverhältniss der beziehungsweise gleichgerichteten Kräfte stehen. Denn in den ähnlichen Dreiecken cpb und cqa verhält sich

Fig. 42.

$$ca : cb = cq : cp = po : qo.$$

Da nun für die Bedingung des Gleichgewichtes die Proportion stattfindet:

$$ca : cb = P : Q,$$

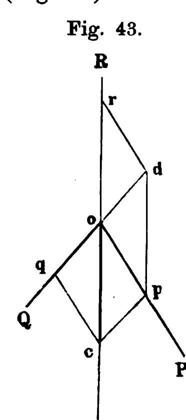
so muss auch sein

$$P : Q = po : qo.$$

Die Kräfte P und Q verhalten sich wie die Linien po und qo, welche auf den Richtungen dieser Kräfte durch die vom Punkte c aus geführten Parallelen abgeschnitten sind.

Man kann sich den Widerstand im Stützpunkte c durch eine Kraft R (Fig. 43) ersetzt denken, von c gegen o gerichtet. Es entsteht dadurch ein Gleichgewichtsverhältniss zwischen den drei Kräften P, Q und R, welche sämmtlich vom Punkte o ausgehen oder in diesem Punkte zusammentreffen. Je zwei dieser Kräfte üben einen gemeinschaftlichen Druck nach der Richtung der dritten, und die Grösse dieses Druckes muss für die Bedingung des Gleichgewichtes der Grösse der dritten Kraft gleich sein. Wir wissen schon, dass die Kräfte P und Q im Gleichgewichte sich wie die Seiten eines Parallelogramms verhalten, dessen Diagonale in die Richtung der dritten Kraft fällt. Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verhältnisses war aber nicht bloss für zwei bestimmt gewählte Kräfte, sondern ganz allgemein ausgeführt worden. Er muss folglich auch für die Kräfte P und R gelten, wenn diese sich, wie angenommen wurde, auf der Richtung der Kraft Q im Gleichgewicht halten.

Fig. 43.



Man verlängere die Richtung der Kraft Q (Fig. 43) gegen d hin, ziehe dann von p aus die zu oR Parallele pd und von d aus zu oP die

Parallele dr. Dadurch entsteht das Parallelogramm $ordp$, dessen auf den Richtungen der Kräfte P und R abgeschnittene Seiten das Verhältniss dieser Kräfte darstellen. Es ist also

$$P : R = op : or.$$

Da nun wegen Gleichheit der Dreiecke ord und ocp, die Linie $or = oc$, so kann man auch sagen:

$$P : R = op : oc.$$

Nun wurde schon früher bewiesen, dass

$$P : Q = op : oq.$$

Daraus folgt endlich, dass

$$P : Q : R = op : oq : oc.$$

Die drei Kräfte verhalten sich wie die Seiten zu der Diagonale eines Parallelogramms, das man aus ihren Richtungen ergänzt hat.

Die Lösung der am Eingange dieses Paragraphen gestellten Aufgabe ergiebt sich nun leicht. Man kennt die Richtungen der beiden Kräfte P und Q, sowie den Ort ihres Stützpunktes c. Man verlängere die Richtungslinien bis zu ihrem Durchschnittspunkte o (Fig. 44), ziehe oc und die Parallelen cp und cq. Es ist dann der gesuchte Druck

Fig. 44.

$$R = \frac{P \cdot co}{op} = \frac{Q \cdot co}{oq}.$$

Das auf den Richtungen von drei Kräften im Gleichgewichte ergänzte Parallelogramm nennt man das Kräfteparallelogramm, und den vorher erwiesenen Lehrsatz, das Gesetz des Parallelogramms der Kräfte. Dasselbe lehrt uns, dass zwei Kräfte, deren Richtungen in einem Punkte zusammentreffen, in ganz ähnlicher Weise, wie dies früher (Nro. 24) von zwei gleichartigen aber ungleich gerichteten Bewegungen gezeigt wurde, zusammengesetzt, oder auch aus ihrem zusammengesetzten Werthe abgeleitet werden können. P und Q heissen die Seitenkräfte, auch Componenten, R die Mittelkraft, auch die Mittlere, Resultirende. Die Mittelkraft ist stets kleiner als die Summe der Seitenkräfte. Ihre möglichen Werthe liegen zwischen den Gränzen $R = P + Q$ bis $R = P - Q$.

75 Da das Parallelogramm aus zwei gleichen Dreiecken besteht, welchen die Diagonale als dritte Dreieckseite gemeinschaftlich angehört, so lässt sich das Parallelogrammgesetz auch als ein Dreieckgesetz betrachten und in folgender Weise aussprechen. Drei Kräfte P, Q, R (Fig. 44), die, in derselben Ebene wirksam, sich im Punkte o das Gleichgewicht halten, stehen im Verhältniss der drei Seiten op, cp und co eines Dreiecks, dessen

Winkel die anliegenden von den Richtungen der Kräfte eingeschlossenen Winkel je zu 180° ergänzen. Die bekannten, zur Bestimmung der Seiten und Winkel eines Dreiecks geltenden Lehrsätze der Geometrie gestatten daher eine unmittelbare Anwendung auf die Beziehungen der drei Kräfte. Das heisst:

Kennt man P und Q und den Winkel, welchen ihre Richtungen einschliessen, so lässt sich R seiner Lage und Grösse nach durch Rechnung bestimmen.

Kennt man die drei Kräfte, so sind auch ihre Richtungen gegen einander bestimmbar.

Kennt man nur die Kraft R, von den beiden anderen aber die Richtungen, so können ihre Grössen durch Rechnung gefunden werden.

76 Da die Summe der Seitenkräfte stets grösser ist als die Mittelkraft, so entsteht die Frage: was mit dem Unterschiede vorgehen möge. Die folgende Erörterung giebt darüber Aufschluss. Es sei $oc = R$ (Fig. 45) die Mittlere der Kräfte P und Q. Man ziehe die Linie aob senkrecht auf oc, dann pe und qd gleichlaufend mit ab. Man kann sich vorstellen, die Kraft $P = op$ sei aus der Zusammensetzung zweier Kräfte ob und oe, und ebenso $Q = oq$ aus der Zusammensetzung zweier Kräfte oa und od hervorgegangen. Unter dieser Voraussetzung sind es also jetzt vier Kräfte, die wir in Betrachtung zu ziehen haben; nämlich od und oe, deren Richtungen in die Linie oc fallen, dann oa und ob, deren Richtungen in die Linie ab fallen. Die beiden ersten, welche in gleichem Sinne wirksam sind, addiren sich und ihre Summe ist gleich oc, weil in den concruenten Dreiecken $odq = cep$, die Seite $od = ce$. Nur die beiden Kräfte od und oe setzen sich also zu der Mittelkraft R zusammen, während oa und ob entgegengesetzt gleich sind, folglich sich aufheben. Kräfte, die einen Winkel einschliessen, können sich demnach nur theilweise in ihrer Wirksamkeit unterstützen; theilweise aber auch stören sie sich.

Fig. 45.

Nennen wir Winkel $poc = \alpha$ und $qoc = \beta$, so ist

$$oa = ob = P \sin\alpha = Q \sin\beta;$$

ferner

$$od = Q \cos\beta \quad \text{und} \quad oe = P \cos\alpha,$$

daher

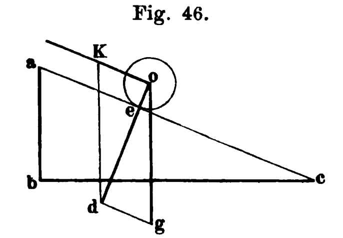
$$R = P \cos\alpha + Q \cos\beta.$$

Die Mittelkraft nimmt zu, wenn die Winkel α und β kleiner werden, und erhält ihren grössten Werth $R = P + Q$, für $\alpha = \beta = 0$. Der kleinste Werth entsteht, wenn $\alpha + \beta = 180^0$.

Das Parallelogramm der Kräfte gestattet, gleich dem Hebel, und häufig in Verbindung mit diesem, so ausserordentlich zahlreiche Anwendungen, dass wir hier nur auf wenige unter den wichtigsten und insbesondere den Zwecken eines Lehrbuchs der Mechanik am nächsten liegenden etwas ausführlicher eingehen können.

Schiefe Ebene. Eine ebene Fläche, welche gegen den Horizont geneigt ist, heisst eine schiefe Ebene. Mit der wagerechten Ebene hat dieselbe nur eine einzige gerade Linie gemein; nämlich die Durchschnittslinie beider Flächen. Wenn man von einem Punkte c (Fig. 46) dieser Linie in der wagerechten Ebene die Senkrechte cb und in der schiefen Ebene die Senkrechte ca zieht, so nennt man den von den beiden Senkrechten cb und ca gebildeten Winkel den Neigungswinkel der schiefen Ebene. Auf der durch die Linien ca und cb bestimmten Ebene steht die Durchschnittslinie (der wagerechten und schiefen Ebene) nach Annahme senkrecht. Dasselbe gilt folglich für alle mit der Durchschnittslinie parallel in der wagerechten Ebene gezogenen geraden Linien. 77

Fig. 46.



Hieraus folgt dann weiter, dass die von einem Punkte a der Linie ac gegen bc gezogene Senkrechte nach allen Richtungen mit der wagerechten Ebene rechte Winkel bildet, d. h. auf dieser Ebene lothrecht steht. Man nennt $ab = h$ die Höhe der schiefen Ebene, $ac = l$ ihre Länge und $bc = b$ ihre Grundlinie oder Basis. Das Verhältniss $\frac{h}{l} = \sin c$ heisst die Steigung.

Wir wollen annehmen, die schiefe Ebene sei möglichst gut geglättet, und versuchen einen leicht beweglichen Körper, etwa eine richtig gedrehte, gut polirte Kugel darauf zu legen. Der Schwerpunkt der Kugel liegt in ihrem Mittelpunkte. Die Richtung des von ihr ausgeübten Druckes geht daher unmittelbar entlang des durch den Mittelpunkt gelegten Lothes og. In dieser Richtung ist aber die Kugel nicht gestützt; denn ihr einziger Berührungspunkt mit der schiefen Ebene befindet sich oberhalb des Lothes og bei e in der vom Punkte o gegen die schiefe Ebene gezogenen Senkrechten od. Die Kugel wird daher nicht liegen bleiben, sondern von der schiefen Ebene herabrollen. Um sie in der ihr gegebenen Lage erhalten zu können, bedarf es einer Kraft, die im entgegengesetzten Sinne ihres Bewegungsbestrebens wirksam, gerade die erforderliche Grösse besitzt, um sich mit dem Gewichte der Kugel zu einem Drucke zusammenzusetzen, dessen Richtung in den einzig vorhandenen Stützpunkt e fällt. Gesetzt, diese Kraft werde in der Richtung von o nach K gleichlaufend mit ca angebracht. Es sei K der noch un-

bekannte Werth dieser Kraft, P das Gewicht der Kugel. Da beide Kräfte sich um einen Punkt der Linie od im Gleichgewicht halten sollen, so ist $K : P = Ko : og$. D. h. die Kräfte verhalten sich wie die Seiten des Parallelogramms $Kogd$, das von einem beliebigen Punkte d der Stützlinie mit den Richtungen der Kräfte K und P ergänzt worden. Nun sind die beiden Dreiecke Kod und abc einander ähnlich, weil ihre ähnlich liegenden Winkel gleich sind. Da ferner $Kd = og$, so folgt:

$$Ko : og = ab : ac;$$

also

$$K : P = ab : ac = h : l.$$

Kraft und Last verhalten sich wie die Höhe zur Länge der schiefen Ebene, oder auch wie die Steigung, und es ist

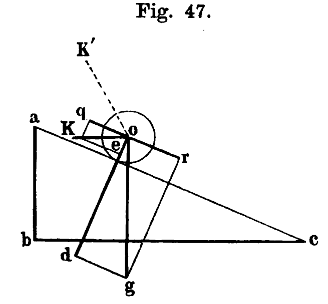
$$K = P\frac{h}{l} = P \,.\, sin\, c.$$

Der gegen die schiefe Ebene bei e ausgeübte Druck N verhält sich zum Gewichte der Kugel wie $od : og$. Da nun $od : og = bc : ac = b : l$, so ergiebt sich

$$N = P\frac{b}{l} = P \,.\, cos\, c.$$

78 Wenn die Richtung der Kraft mit der der schiefen Ebene nicht gleichlaufend ist, z. B. einen Winkel (Fig. 47) $Koq = \alpha$ damit bildet so zerlegen wir uns $K = Ko$ in die Seitenkräfte $qo = K\cos\alpha$ gleichlaufend mit der schiefen Ebene und mit der Bewegungsrichtung der Kugel, und in $oe = K\sin\alpha$ senkrecht auf der schiefen Ebene. Nur die erste dieser Kräfte kann sich der Bewegung der Kugel entgegensetzen. Zerlegen wir uns ebenso auch die Kraft $P = og$ nach den Richtungen qo und od in die Seitenkräfte

Fig. 47.



$$or = P\sin c \text{ und } od = P\cos c.$$

Die letzte dieser Kräfte vereinigt sich mit oe zu einem Drucke senkrecht gegen die schiefe Ebene

$$N = K\sin\alpha + P\cos c,$$

und nur die Kraft or strebt die Kugel entlang der schiefen Ebene in Bewegung zu setzen. Die Kräfte or und oq sind einander entgegengesetzt; soll Gleichgewicht stattfinden, so müssen sie gleich sein. Es muss sein

$$K\cos\alpha = P\sin c \quad \text{und} \quad K = \frac{P\sin c}{\cos\alpha}.$$

Wenn die Kraft K aufwärts gerichtet ist, so etwa wie die Linie oK' andeutet, so fällt der Winkel qoK', den sie mit der schiefen Ebene bildet,

nach der üblichen Art Winkel zu messen, in den vierten Quadranten. Dies hat jedoch keinen Einfluss auf den Werth von $\cos\alpha$; dagegen der Kraft $oe = K\sin\alpha$, die man sich jetzt im umgekehrten Sinne wirksam denken muss, würde dann das negative Zeichen vorgesetzt werden müssen, um damit zu bezeichnen, dass der von dieser Kraft ausgeübte Druck jetzt dem vorher bestimmten Druck N, dem Normaldruck, entgegengesetzt ist.

Der kleinste Werth von $K = \frac{P\sin c}{\cos\alpha}$ entspricht dem Richtungswinkel $\alpha = 0$ und $\cos\alpha = 1$. $P\sin c$ ist also die kleinste Kraft, durch welche sich die Kugel auf der schiefen Ebene im Gleichgewicht erhalten lässt.

79 Steigende Strassen sind schiefe Ebenen. Der Fussgänger hat daher während des Aufsteigens auf denselben, neben der für das Fortschreiten an und für sich unausbleiblichen Anstrengung noch einen andern Theil seiner Muskelkraft zum Heben des Körpers aufzuwenden. Beträgt z. B. die Steigung $^1/_{20}$ d. h. 1 Fuss Erhebung auf 20 Fuss Wegeslänge; so vermehrt sich die zum Fortschreiten erforderliche Kraft um ein Zwanzigstel des zu hebenden Gewichtes. Ein Arbeiter, der 30 Pfund auf den Schultern trägt, und dessen Körpergewicht = 150 Pfund, würde, so lange die Steigung in dem angenommenen Verhältnisse andauert:

$$30 + \frac{180}{20} = 39 \text{ Pfund}$$

zu tragen haben.

Wenn es richtig ist, was von Technikern allerdings als rohe Schätzung behauptet worden ist, dass die mittlere Arbeitskraft eines gesunden und an mechanische Arbeit gewöhnten Mannes $^1/_5$ seines Gewichts beträgt, so würde eine Steigung von 1 : 5, auf die Dauer die ganze Arbeitskraft eines Mannes von 150 Pfund Gewicht in Anspruch nehmen, auch wenn er nichts ausser der Last seines eigenen Körpers zu tragen hätte. Bei der Errichtung grösserer Gebäude werden zuweilen schiefe Ebenen, sogenannte Laufbrücken, zum Transport von Baumaterialien benutzt. Es ist einleuchtend, dass dieselben, wenn sie sehr steil sind, dem Arbeiter ohne seine Kräfte übermässig, also unvortheilhaft anzustrengen, nicht viel Kraft übrig lassen, um ausser seinem Körper noch eine andere Last aufwärts zu schaffen. Gerstner empfiehlt bei Laufbrücken als vortheilhaft die Steigung $\frac{h}{l} = \frac{1}{9}$. Auch Treppen sind schiefen Ebenen zu vergleichen. Steigungen im Verhältnisse $= \frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{1{,}5}$ kommen bei den Treppen unserer Wohnhäuser ganz gewöhnlich vor. Beim Ersteigen derselben hat man also einen Widerstand gleich der Hälfte des Körpergewichtes und selbst noch darüber zu überwinden.

Auf die Zugkraft der Pferde äussern steigende Strassen noch viel grössern Nachtheil als auf den Transport durch Menschenkraft. Das Pferd

kann auf einem Wagen und auf horizontalen Strecken einer guten Landstrasse 30 Centner Zollgewicht fortziehen. Bei einer Steigung von 1 : 24 vermehrt sich die Last um $\frac{3000}{24} = 125$ Pfund, d. h. um ungefähr die ganze Grösse der mittlern Pferdekraft (Nro. 56). Man begreift hiernach warum man bedeutendere Steigungen auf den grossen Landstrassen, wo es nur irgend thunlich ist, zu vermeiden sucht. In früherer Zeit wurde auf solche Dinge wenig Rücksicht genommen, und nach dem Wahlspruche: der kürzeste Weg der beste, baute man die Strassen unbedenklich auch über solche Anhöhen, die umgangen werden konnten. Wo die in der Ebene ausreichende Zugkraft versagte, half man sich beim Aufsteigen durch Vorspann, beim Abwärtsfahren durch Hemmschuhe. Beides zum grossen Nachtheile des Verkehres.

Auf den Eisenbahnen wird die Steigung 1 : 24, welche auf Landstrassen noch ganz gut brauchbar ist, bis jetzt nicht angewendet, nicht etwa, weil die Locomotive eine solche Steigung nicht zu erklimmen vermöchte, sondern weil die Beschaffung der erforderlichen Kraft, um mit der Locomotive zugleich eine Reihe anhängender Wagen in die Höhe zu ziehen, zu theuer kommt. Wir haben beispielsweise (Nro. 54) die nöthige Dampfkraft, um einen Wagenzug von 100 000 Kilogramm Gewicht, auf wagerechter Bahn die Geschwindigkeit von 10 Meter zu erhalten, zu 380 Kilogramm veranschlagt, und dabei das Maximum des gestatteten Dampfdrucks, in dem besonders betrachteten Falle zu 1600 Kilogramm angenommen. Um nun mit demselben Wagenzuge eine Steigung von $^1/_{24}$ überwinden zu können, würde der Dampfdruck um den vierundzwanzigsten Theil von Hunderttausend, d. h. um mehr als 4000 Kilogramm vergrössert werden müssen, also um weit mehr, als der betreffenden Maschine zugemuthet werden durfte. Es wäre daher eine kräftigere Maschine herbeizuschaffen, deren Kraft dann aber auf günstiger angelegten Strecken der Bahn unbenutzt verloren gehen müsste.

80 Eine auf der schiefen Ebene sich selbst überlassene Kugel rollt abwärts, durch eine Kraft $P\frac{h}{l}$ getrieben. Diese Kraft, das sogenannte relative Gewicht, ändert sich nicht, so lange die Neigung der schiefen Ebene unverändert bleibt. Die Bewegung der Kugel ist folglich eine gleichförmig beschleunigte, und ihre Beschleunigung

$$c = g\,\frac{P\,h}{p\,l} = g\,\frac{h}{l},$$

weil in diesem Falle $P = p$. Es ist leicht zu sehen, dass man durch Verminderung der Steigung es ganz in der Hand hat, den Fall auf der schiefen Ebene zu verlangsamen, ohne dass darum das Gesetz dieser Bewegung eine Aenderung erfährt. Bekanntlich hat Gallilei diese Eigenschaft der schiefen Ebene zum Studium der Fallgesetze benutzt.

Da der Fall auf der schiefen Ebene eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ist, so lässt sich die Endgeschwindigkeit einer herabfallenden Kugel nach der Gleichung $V = \sqrt{2cs}$ berechnen, indem man für c dessen Werth $g\,\frac{h}{l}$ und ferner $s = l$ setzt. Man findet dann

$$V = \sqrt{2g\frac{h}{l}\,l} = \sqrt{2gh},$$

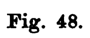
nämlich dieselbe Geschwindigkeit, wie wenn die Kugel lothrecht durch die Höhe der schiefen Ebene gefallen wäre. Dieses Resultat konnte mit Bezugnahme auf das Arbeitsgesetz vorausgesehen werden. Denn die Grösse der Arbeit im Sinne der Schwere, um die Geschwindigkeit V zu erzeugen, sei es beim freien Falle, sei es beim Falle auf der schiefen Ebene, ist das Product der Höhe der schiefen Ebene in das Gewicht der fallenden Kugel.

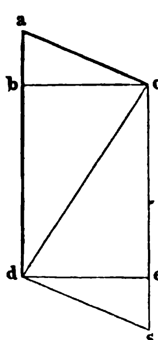
Die Fallzeit bestimmt sich nach der Formel: $l = \frac{g}{2}\,\frac{h}{l}\,t^2$, oder $l^2 = \frac{gh}{2}\,t^2$, und endlich $t = l\sqrt{\frac{2}{gh}}$.

Denkt man sich verschiedene schiefe Ebenen von gleicher Höhe, aber ungleicher Länge, so ist $\frac{gh}{2}$ eine beständige Zahl. Die Fallzeiten bei schiefen Ebenen von gleicher Höhe verhalten sich also wie ihre Längen.

In derselben Zeit $t = l\sqrt{\frac{2}{gh}}$, während deren Verlauf ein Körper der schiefen Ebene herabfällt, sinkt er bei freiem Fall durch den Raum $S = \frac{g}{2}\,t^2$ oder $S = \frac{g}{2}\,l^2\,\frac{2}{gh} = \frac{l^2}{h}$. Es ist also $S : l = l : h$.

Die Bedingungen dieser Proportion treffen in dem rechtwinkligen Dreiecke acd (Fig 48) zusammen, wenn man von c aus gegen ad die Senkrechte cb zieht. Denn es ist in der That in diesem Dreiecke: $ad : ac = ac : ab$. Denkt man sich also unter acb eine schiefe Ebene, so wird eine Kugel in gleicher Zeit die Linie ac herabrollen und durch ad senkrecht fallen. Dieselben Schlüsse gelten aber auch mit gleichem Rechte für das rechtwinklige Dreieck cds, wenn man sich unter cde eine schiefe Ebene vorstellt. Wenn man also drei Kugeln zu gleicher Zeit, die eine von a nach c, die andere von c nach d, die dritte von a nach d fallen lässt, so werden sie auch gleichzeitig ihre Ziele erreichen.

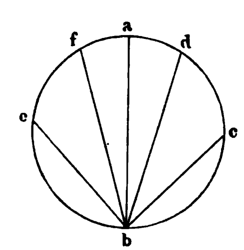

Fig. 48.



Es lässt sich noch eine weitere bemerkenswerthe Folgerung ziehen. Man stelle sich unter Fig. 49 (a. f. S.)

einen lothrecht aufgestellten Reif vor; ab bedeute einen lothrechten Durchmesser. Vom Fusspunkte b desselben führe man glatte Holzstreifen oder Rinnen nach c, d oder anderen Punkten der Kreisperipherie. Lässt man dann kleine Kugeln entweder senkrecht von der Höhe a herab oder entlang der einen oder andern der geneigten Bahnen fallen, so werden sie alle in gleichen Zeiträumen den Fusspunkt b erreichen.

Fig. 49.



Bogensehnen von sehr geringer Länge verlaufen sich mehr und mehr in dem Bogen selbst. Man muss daraus schliessen, dass der Fall in kreisbogenförmigen Rinnen von verschiedenen Längen, die sich aber sämmtlich innerhalb der Gränze von nur wenigen Graden halten, von der Gleichdauer (Isochronismus) nicht viel abweichen können. Die Erfahrung bestätigt diese Folgung selbst bis zu Bogenlängen von 10 bis 15 Graden.

81 **Vertheilung des Druckes auf zwei Stützpunkte.** Ein Körper der nur auf einem Stützpunkte ruht, concentrirt die ganze Grösse seines Gewichtes auf diesen Punkt. Sind ihm aber zwei Stützen gegeben, so vertheilt sich der Druck auf beide. Wie viel jede zu tragen hat, hängt von der gegenseitigen Lage des Schwerpunktes und der beiden Stützpunkte ab.

α) Denken wir uns zunächst einen Körper, bei welchem die Länge gegen die beiden anderen Dimensionen vorherrscht, etwa einen Balken, der in wagerechter Lage auf den Stützen a und b (Fig. 50) ruht. Sein Schwerpunkt befindet sich in s; sein Gewicht bezeichnen wir mit P. Ferner seien $as = s$ und $ab = a$, der Druck auf den Punkt $a = Q$, derjenige auf den Punkt $b = Q'$.

Fig. 50.

Ein thätiger Druck Q' anstatt des Widerstandes bei b in Angriff gebracht, würde diesen Stützpunkt ersetzen können, und es würde sich dann zwischen den Kräften P und Q', mit Beziehung auf a als Drehpunkt ein Gleichgewichtsverhältniss ergeben, unter der Bedingung, dass

$$a\,Q' = P\,.\,s, \text{ daher } Q' = \frac{Ps}{a}.$$

Man findet ebenso

$$Q = \frac{P(a - s)}{a}.$$

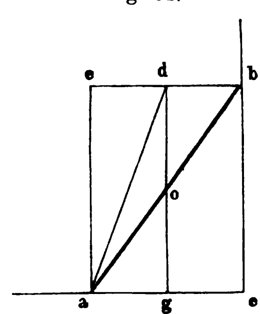
Lastet auf ab im Abstande x von a an gerechnet, noch ein Gewicht G, so ist

$$a\,Q' = Ps + Gx; \text{ somit } Q' = \frac{Ps + Gx}{a}.$$

β) Bei dem zum Transport von Erde und anderen Dingen gebräuchlichen Schiebkarren vertheilt sich das Gewicht der Ladung auf die Radaxe und auf die Hände des Arbeiters, der den Karren führt. Da das Tragungsvermögen des letztern bei anhaltender Arbeit durchschnittlich auf ungefähr 14 Kilogramm beschränkt ist, so ist es für die Förderung der Arbeit von Wichtigkeit, dass ein möglichst grosser Theil der Ladung auf der Radaxe ruhe, also von der Erde getragen werde; denn das Fortschieben des Karrens beansprucht in der Regel ungleich weniger Anstrengung für den Arbeiter, als der Druck eines Theiles der Ladung auf die Hände und Schultern. Setzen wir den Abstand der Radaxe, vom Schwerpunkte der Ladung (in diese das Gewicht des Karrens eingeschlossen) $= s$, von den Angriffsstellen der Hände $= a$, so ist, ähnlich wie in der vorhergehenden Aufgabe, $14 \,.\, a = L \,.\, s$, folglich die Ladung $L = 14 \frac{a}{s}$. Die fortzuschiebende Last kann um so grösser sein, je näher ihr Schwerpunkt der Radaxe liegt.

γ) Eine Stange oder ein Balken ab (Fig. 51), dessen eines Ende a auf dem Boden ruht, während das andere gegen eine Wand anlehnt, übt gegen diese vermöge seines Gewichtes einen Druck, senkrecht nach der Linie eb. Der Widerstand der Wand, durch einen thätigen Gegendruck W ersetzt, würde an einem Hebelarme ae wirksam sein, wenn man sich den Punkt a als Drehpunkt denkt. Seinem Momente gegenüber steht das des Gewichtes P, welches im Schwerpunkte o seinen Sitz, und ag zum Hebelarme hat. Die beiden Kräfte W und P halten sich um den Punkt a im Gleichgewichte; es ist daher $ae \,.\, W = P \,.\, ag$, und

Fig. 51.



$$W = P \frac{ag}{ae}, \text{ oder auch } W : P = ag : ae.$$

Die Richtungen der Kräfte W und P durchschneiden sich im Punkte d, und äussern folglich gegen ihren Stützpunkt a einen mittlern Druck nach der Richtung da, welcher sich zu P verhält wie da zu ea; und zu W wie da zu ag. Man kann diesen Druck wieder nach ea und ga in eine lothrechte und in eine wagerechte Seitenkraft zerlegen, und erkennt nun leicht, dass erstere dem Gewichte des Körpers ab, letztere aber dem gegen b ausgeübten winkelrechten Drucke W gleich ist. Der gegen die Wand bc angelehnte Körper lastet also ungeachtet der scheinbaren Stütze bei b mit der ganzen Grösse seines Gewichtes auf dem Punkte a. Er äussert aber auch noch bei a und b in horizontaler Richtung entgegengesetzt gleiche Pressungen. Der einen bei b widersteht die Festigkeit der Wand, der andern bei a, dem sogenannten Schiebdruck, muss, um den Körper P in seiner Lage zu erhalten, noch ein besonderer Wider-

stand entgegengesetzt werden. Häufig übernimmt die Reibung diese Rolle. Die Grösse des Schiebdruckes ist bei ein und demselben Körper wesentlich abhängig von der Lage des Schwerpunktes und der Grösse des Winkels bac. Er vermindert sich, wenn der Schwerpunkt dem Punkte a näher rückt und der Winkel bac sich vergrössert.

Angenommen, der Punkt o liege in der Mitte der Länge ab, so wird $ag = \frac{ac}{2}$; da nun $ae = bc$, so ist

$$W = P \frac{ac}{2 \,.\, bc} = \frac{P}{2} \, cotang \, \alpha,$$

wenn der Winkel $bac = \alpha$ gesetzt wird. Da die Cotangenten bei abnehmender Winkelgrösse bis ins Unbegränzte zunehmen können, so sieht man, dass der Schiebdruck durch allmälige Verminderung des Winkels α ausserordentlich grosse Kraftäusserungen zulässt.

δ) Wenn ein Balken von der Länge ab (Fig. 52) anstatt an einer Wand anzulehnen, auf derselben überliegt, vermindert sich seine Schiebkraft. Es sei o der Schwerpunkt, Winkel cad wie vorher $= \alpha$. Der Balken drückt gegen den Punkt c nach der Richtung cn winkelrecht auf ab mit einer Kraft, deren Moment $D \,.\, ac = P \,.\, ag$. Es ist daher

Fig. 52.

$$D = P \frac{ag}{ac} = \frac{P}{2} \frac{ab \cos \alpha}{ac},$$

wenn der Schwerpunkt o in der Mitte der Länge ab sich befindet, in welchem Falle

$$ag = \frac{ab}{2} \cos \alpha.$$

D oder cn zerfällt wieder nach den Richtungen cp, winkelrecht auf cd und cq gleichlaufend mit cd in die Seitenkräfte

$$W = cp = cn \sin \alpha = \frac{P}{2} \frac{ab \,.\, \sin \alpha \cos \alpha}{ac} = \frac{P}{4} \frac{ab}{ac} \sin 2\alpha,$$

und in

$$Q = cq = cn \cos \alpha = \frac{P}{2} \frac{ab}{ac} \cos^2 \alpha.$$

Wenn der Balken auf der Wand cg eben nur aufliegt, ohne sie zu überragen, d. h. wenn $ab = ac$, so wird

$$W = \frac{P}{4} \sin 2\alpha$$

und

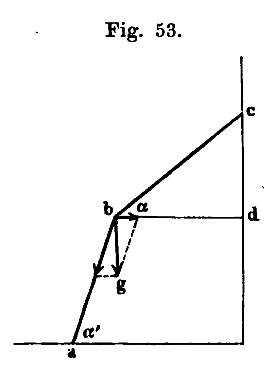
$$Q = \frac{P}{2} \cos^2 \alpha.$$

Der grösste Werth von W ist dann $W = \frac{P}{4}$. Da Q derjenige Theil des Gewichtes P ist, welcher vom Stützpunkte c wirklich getragen wird,

so muss der lothrechte Druck auf a dem Unterschiede $P - Q$ gleich sein. Der Schiebdruck bei a ist aber gleich dem Horizontaldrucke $cp = W$; denn wäre es nicht der Fall, so würde durch die Vertheilung des Gewichtes P auf die Stützen a und c eine freie bewegende Kraft in horizontaler Richtung erzeugt worden sein, was unmöglich ist.

ε) Ein gegen eine Wand angelehnter bei b (Fig. 53) gebrochener Balken kann sich im Gleichgewicht halten, wenn die durch das obere Stück bc bei b erzeugte Schiebkraft, dem auf denselben Punkt wirksamen Anlehnungsdrucke gleich ist. Die Schiebkraft bei b ist, wie vorher bewiesen wurde, $W = \frac{P}{2} \cot \alpha$, wenn wir unter P das Gewicht des obern Balkenstückes verstehen. Der ganze Druck dieses Gewichtes lastet auf b in der Richtung der Schwere, und lässt sich nach bd und ba in die Seitenkräfte $P \cot \alpha'$ und $\frac{P}{\sin \alpha'}$ zerlegen. Das Gewicht P' des Balkenstückes ba bewirkt bei b den Anlehnungsdruck $\frac{P'}{2} \cot \alpha'$,

Fig. 53.



und bei a eine Schiebkraft von derselben Grösse. In der Richtung von b nach d wirken also die Kräfte $\frac{P'}{2} \cot \alpha' + P \cot \alpha' = \left(\frac{P'}{2} + P\right) \cot \alpha'$. In der Richtung von d nach b wirkt die Kraft $\frac{P}{2} \cot \alpha$. Es ist daher für die Bedingung des Gleichgewichtes:

$$1/_2\, P \cot \alpha = (P + 1/_2\, P') \cot \alpha'.$$

Wäre z. B. $P' = nP$, so findet sich $\cot \alpha' = \frac{\cot \alpha}{2 + n}$. Da nun n in allen Fällen eine positive Zahl sein muss, so ist $\cot \alpha'$ immer kleiner als $\cot \alpha$, folglich der Winkel α' immer grösser als α.

Die Kraft $\frac{P}{\sin \alpha'}$, welche gegen den Punkt a nach der Linie ba wirksam ist, kann man sich wieder in die lothrechte Seitenkraft $\frac{P}{\sin \alpha'} \cdot \sin \alpha' = P$ und in eine schiebende Kraft $\frac{P}{\sin \alpha'} \cos \alpha' = P \cot \alpha'$ zerlegt denken. Auf dem Punkte a lastet also das ganze Gewicht $P + P'$ der beiden Balkenstücke. Ausserdem treten daselbst die Schiebkräfte $P \cot \alpha'$ und $1/_2\, P' \cot \alpha'$ in Wirksamkeit. Da nun ihre Summe dem Werthe $1/_2\, P \cot \alpha$ gleich sein muss, d. h. der Schiebkraft des obern Stückes bei b, so folgt, dass der gebrochene Balken eine geringere Schiebkraft erzeugt, als er ungebrochen bei dem Neigungswinkel α hervorbringen würde.

Stehen drei oder mehr Balkenstücke, etwa durch Gelenke verbunden, in ähnlicher Weise auf einander, so findet man am obersten Gelenke, wie vorher:

$$\tfrac{1}{2} P \cot \alpha = (P + \tfrac{1}{2} P') \cot \alpha';$$

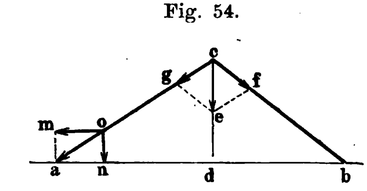
für das zweite, von oben gerechnet:

$$\tfrac{1}{2} P \cot \alpha = (P + P' + \tfrac{1}{2} P'') \cot \alpha'' \text{ u. s. w.}$$

Die horizontale Schiebkraft ist also an allen Gelenken gleich und gleich dem vom obersten Balkenstücke abhängigen. Werden diese Stücke sehr kurz, bis zur elementaren Grösse, so verschwindet mehr und mehr das Gewicht eines jeden einzelnen derselben und auch die Schiebkräfte behaupten schliesslich keinen messbaren Werth mehr.

ζ) Wir wollen noch die Bedingungen des Gleichgewichtes untersuchen, wenn zwei Balken (Sparren) gegen einander gelehnt sind. Es sei P das Gewicht des einen Balkens, ac (Fig. 54) seine Länge, P' das Gewicht und bc die Länge des andern. Ferner Winkel $cad = \alpha$ und Winkel $cbd = \alpha'$. Denken wir uns zunächst den einen Balken an den andern, wie an einen festen Punkt gelehnt, so ist der Anlehnungsdruck von P (siehe γ.) $\frac{P}{2} \cot \alpha$, der Anlehnungsdruck von P' ist $\frac{P'}{2} \cot \alpha'$. Soll Gleichgewicht bestehen, so muss jeder dieser Drücke dem andern als genügende Stütze dienen können. Es muss folglich sein

Fig. 54.



$$\frac{P}{2} \cot \alpha = \frac{P'}{2} \cot \alpha'.$$

Da nun $\cot \alpha = \frac{ad}{cd}$ und $\cot \alpha' = \frac{db}{cd}$, so ist auch

$$\frac{P}{2} \frac{ad}{cd} = \frac{P'}{2} \frac{db}{cd} \text{ und } P \,.\, ad = P' db.$$

Hieraus folgt, dass wenn die Gewichte P und P' in der für sie vorausgesetzten Lage zu einem festen Systeme verbunden werden, die Lothrechte cd die Schwerlinie dieses Systems ist, sowie dass die Unterlage a das Gewicht P, die Unterlage b das Gewicht P' zu tragen hat.

Man kann sich auch beide Gewichte in den Punkt c ihrer Schwerlinie versetzt und in Seitenkräfte D und D' nach den Richtungen ca und cb zerlegt denken. Es ist dann $D : D' : (P + P') = cg : cf : ce$. D an der Widerlage bei a zerfällt wieder in die Seitenkräfte $ma = P$ und $na = P \cot \alpha$. Die Kraft D' an der Widerlage b, zerfällt in den Verticaldruck P' und den Schiebdruck $P' \cot \alpha'$. Es ist aber wie schon oben gezeigt wurde: $P \cot \alpha = P' \cot \alpha'$; die Schiebkraft nach beiden Seiten ist gleich.

Wenn beide Balken gleiches Gewicht besitzen, so kann Gleichgewicht durch blosses Aneinanderlehnen nur dann stattfinden, wenn auch ihre Längen gleich sind. Dies ist der gewöhnliche Fall bei unseren Dachsparren. Ein in dieser Art ausgeführtes Dach, dessen sämmtliche Sparren unmittelbar auf den Widerlagen a und b ruhten, würde also gegen jede derselben eine Schiebkraft ausüben, gleich der Hälfte vom Gewichte des Daches, multiplicirt mit der Cotangente des Neigungswinkels.

Eine Unterstützung des Anlehnungspunktes c durch einen Träger vermindert die Schiebkraft (siehe δ) zu dem Werthe $W = \frac{P}{4} \sin 2\,\alpha$. ($P$ bedeutet das Gewicht des einen Sparren oder der einen Dachseite.) Wäre z. B. $\alpha = 45^0$, so ist $\sin 2\,\alpha = \cot \alpha = 1$, und man findet die Schiebkraft bei fehlendem Träger $cd = P$; durch Anbringung eines Trägers $= \frac{P}{4}$. Ein solcher Träger braucht nicht nothwendig eine lothrecht stehende Säule oder eine Wand zu sein. Derselbe Zweck kann durch ein Dreieck erzielt werden, dessen Fusspunkte d und e (Fig. 55) genügend gestützt sind.

Fig. 55.

Sind die Fusspunkte a und b des Dreiecks abc mit einem Balken, der ihnen als Unterlage dient, und dessen Lage durch die Linie ab angedeutet ist, fest verbunden, so dass eine Verschiebung nicht stattfinden kann, so wird der Balken durch die Schiebkraft gespannt.

Hatte man die Mitte s des Balkens mit dem Scheitelpunkte des Dreiecks c fest verbunden, etwa durch eine von c herabgesenkte bei s eingelassene Schraube, so erscheint das Gewicht des Balkens gleichsam von s weggenommen und bei c angehängt. Durch eine gleiche Grösse wird natürlich der Druck auf c vermehrt und durch Vertheilung nach ca und cb auf die Unterlagen a und b übertragen. Verhältnissmässig steigt aber auch die Schiebkraft; z. B. um die Grösse $\frac{G}{2} \cot \alpha$, wenn G das Gewicht des Balkens vorstellt.

η) Wenn die beiden Stützpunkte a und b (Fig. 56, a. f. S.) eines Körpers, der eine senkrecht über dem andern und seitwärts von dem Schwerpunkte c angebracht sind, so würde einer Drehung um den Punkt b offenbar ein Abreissen des Körpers vom obern Stützpunkte a vorhergehen müssen. Das Minimum des Widerstandes gegen dieses Abreissen winkelrecht gegen die Linie ab sei W, und P das im Schwerpunkte c concentrirte Gewicht, so findet Gleichgewicht statt, wenn

$$W \, . \, ab = P \, . \, bp = P \, . \, dc,$$

daher
$$W = \frac{P \, . \, dc}{ab}.$$

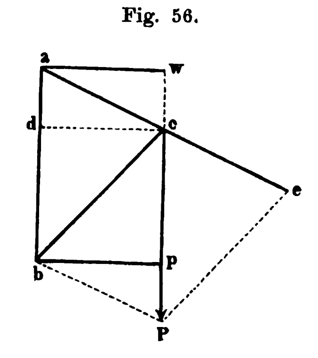


Fig. 56.

Der Werth W vermindert sich, wenn die Länge ab sich vergrössert. Die Gewalt z. B., womit das Gewicht einer Thür den obern Kloben auszureissen sucht, wird um so geringer, je näher die beiden Angeln dem obern und untern Ende der Thür liegen.

Um den lothrechten Druck auf a und b zu bestimmen, denke man sich den Druck $P = cP$ nach ac und cb in die Seitenkräfte ce und cb zerlegt. Es zerfällt dann die Kraft $ce = ac$ wieder in die Seitenkräfte $aw = W$, winkelrecht auf ab und $ad = Q$ in der Richtung des Lothes. Ferner zerfällt die Kraft cb in die Seitenkräfte $bp = aw = W$ und $bd = Q'$. Nun ist $aw = bp$ die schon oben bestimmte Kraft W, welche von a gegen w wirksam ist. Von gleicher Grösse, doch entgegengesetzt in der Richtung, ist der gegen b wirksame wagerechte Druck, durch welchen z. B. der untere Kloben einer Thür fester eingedrückt wird. Bezeichnet man ferner die auf a und b gerichteten lothrechten Drücke mit Q und Q', so ist, weil

$$aw : ad = W : Q \quad \text{und}$$
$$aw : bd = W : Q',$$
$$Q = W \frac{ad}{aw} = W \frac{ad}{dc} = P \cdot \frac{ad}{ab} \quad \text{und}$$
$$Q' = W \frac{bd}{aw} = P \cdot \frac{bd}{ab}.$$

Die Summe $Q + Q'$ muss immer gleich P sein. Die Grösse der Einzelnwerthe hängt aber von der Lage des Schwerpunktes ab. Liegt dieser in der Mitte der Höhe ab, so hat jeder der Stützpunkte die Hälfte des Gewichtes P zu tragen. Ist $ad = 0$, so wird auch $Q = 0$. Liegt der Schwerpunkt über der Wagerechten aw (Fig. 52), so zählt die Länge ad von dem Punkte a aufwärts, also nach einer der Vorhergehenden entgegengesetzten Richtung. Der Druck Q wirkt daher in der Richtung von b gegen a, oder es ist

$$Q = -P \frac{ad}{ab}; \quad \text{dagegen} \quad Q' = P \frac{bd}{ab};$$

d. h. um den Werth von Q grösser als P.

Wenn die Linien ac und bc, auf deren Durchschnittspunkt ein Druck P lastet, durch Stangen oder Stäbe (Streben) wirklich dargestellt sind, so wird erstere durch eine Kraft R nach der Richtung von a nach

c gespannt, letztere durch eine Kraft S nach der Richtung von c nach b zusammengedrückt. Nun ist, wie oben gezeigt wurde:

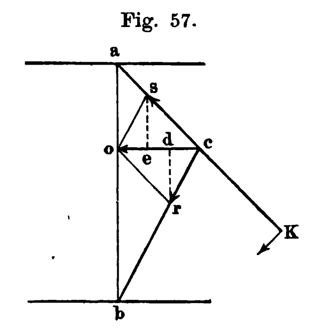
$$cP : ce = ab : ac = P : R \text{ und}$$
$$cP : cb = ab : cb = P : S;$$

daher die Zugkraft $R = P \frac{ac}{ab}$, die zusammendrückende Kraft

$$S = P \frac{cb}{ab}.$$

Kniehebel. Das Kräfteparallelogramm lehrt uns einen an sich mässigen Druck durch Vermittlung des Kniehebels in fast unbegränztem Maasse zu verstärken. Angenommen, es befinde sich bei a (Fig. 57) ein unbesiegbarer Widerstand, bei b eine verschiebbare Platte, die jedoch nur mit sich selbst parallel, entlang der auf ihrer Oberfläche senkrecht sich erhebenden Linie ab beweglich ist. Es seien ferner ac und bc zwei unbiegsame Stäbe, bei c unter einander und ebenso mit den Punkten a und b durch Gelenke verbunden. Bei K an der unbiegsamen Stange aK werde eine Kraft $= K$, winkelrecht gegen die Linie aK in Wirksamkeit gesetzt, so muss der Punkt c gegen o hin vorrücken und die Platte erfährt eine Verschiebung, in der Art, dass der Abstand ab sich vergrössert. 82

Fig. 57.



Die Grösse des Druckes R (in der Richtung von a gegen b), welcher diese Verschiebung bewirkt, lässt sich in folgender Weise bestimmen. Die Kraft K erzeugt auf den Punkt c, winkelrecht gegen die Linie ab einen Druck: $P = \frac{K \,.\, aK}{ao}$.

Dieser Druck zerfällt nach den Richtungen ca und cb in die Seitenkräfte P' und P'', so dass nach Ergänzung des Parallelogramms $cros$ auf den Richtungen der drei Kräfte, das Verhältniss entsteht,

$$P : P' : P'' = co : cr : os.$$

Die Kraft $P' = cr$ in ihrer Richtung nach b versetzt, lässt sich wieder in die Seitenkräfte $Q = dc$, gleichlaufend mit der beweglichen Platte, und $R = dr$, winkelrecht gegen die Platte zerlegen. Letztere erscheint als die Ursache der Verschiebung, während Q in seitlichen Widerlagen der Angriffsstelle b verloren geht.

Aus der Kraft P'', deren Angriffsstelle sich im Gelenke a wiederfindet, entspringen dort in ähnlicher Weise die Seitenkräfte $Q' = ce = od$ und $R' = se = dr = R$.

Nun ist o der Schwerpunkt der parallelen Kräfte Q und Q' (Nr. 81, ζ), und es ist ferner $Q + Q' = P$; folglich

$$Q = P\frac{ao}{ab} \quad \text{und} \quad Q' = P\frac{bo}{ab}.$$

Da ferner $cd : dr = Q : R = co : ob$, so findet sich der Druck

$$R = Q\frac{ob}{co} = P\frac{ao\,.\,ob}{ab\,.\,co} = K\frac{aK\,.\,ob}{ab\,.\,co}.$$

Man kann $ob = ab - ao$ setzen; es ist dann $ao.ob = ao(ab - ao)$. Dieses Product erhält einen grössten Werth für $ao = \frac{ab}{2}$, d. h. wenn die Stäbe ac und bc einander gleich sind. Wurde ein Kniehebel in dieser Weise ausgeführt, so lässt sich auf die verschiebbare Platte bei b ein Druck hervorbringen:

$$R = P\frac{ab}{4\,.\,co} = \frac{2P\,.\,ob}{4\,.\,co} = K\frac{aK}{2\,.\,co}.$$

Während der Arbeit nähert sich der Punkt c mehr und mehr der Linie ab; der Abstand co vermindert sich also. Verhältnissmässig muss R grösser werden und nach und nach die Gränzen des Messbaren übersteigen. Der Spielraum des Weges, auf welchem durch diesen gewaltigen Druck die Platte fortgeschoben werden kann, ist freilich nur gering und auf den Unterschied $ac + bc - ab$ beschränkt. Denn die Kraft P hat die äusserste Gränze ihrer Wirksamkeit erreicht, sobald der Punkt c mit dem Punkte o zusammenfällt. Nehmen wir an, dieser Unterschied sei s, und bezeichnen wir mit R den Mittelwerth des gegen die bewegliche Platte ausgeübten Druckes, so ist mit Bezugnahme auf das Arbeitsgesetz

$$R\,.\,s = P\,.\,oc, \quad \text{also} \quad R = \frac{P\,.\,oc}{s}.$$

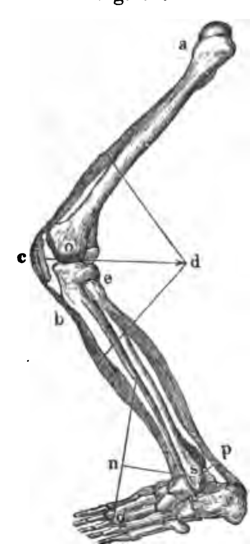
Es sei beispielsweise $P = 42$ Kilogramm, die auf den Punkt c gerichtete, bereits dreifach (indem man nämlich $\frac{aK}{ao} = 3$ setzt) verstärkte mittlere Kraft eines Arbeiters, $oc = 20$ Millimeter und $s = 2$ Millimeter, so findet man als Mittelwerth des Druckes $R = 420$ Kilogramm.

Der Kniehebel bildet eine Presse von grosser Wirksamkeit und ist in dieser Eigenschaft in früheren Zeiten zum Ausprägen der Münzen benutzt worden. In vielen Buchdruckereien findet er noch gegenwärtig Anwendung. Auch zum Auspressen des Oeles ist der Kniehebel öfter in Vorschlag gebracht und angewendet worden. Man hat bei diesen verschiedenen Verwendungen die stufenweise Zunahme des Druckes während der Arbeit als eine besonders empfehlenswerthe Eigenthümlichkeit der Kniepresse in Betracht gezogen.

83 Im Gliederbau des menschlichen Körpers findet sich der Kniehebel mehrfach vertreten. Der bekanntesten unter diesen Anwendungen, der Wirkungsweise des Knies beim Erheben des freien, sowie auch des noch

mit einem andern Gewichte beschwerten Körpers verdankt sogar der Kniehebel seinen Namen. Jedermann weiss, dass vor dem Knie eine bei gestrecktem Beine leicht bewegliche Scheibe, die Kniescheibe, sitzt, und hier eine leicht wahrnehmbare bedeutende Hervorragung bildet. Sie tritt etwas zurück und verliert ihre Beweglichkeit alsbald, sowie die Muskeln auf der Vorderseite des Oberschenkels gespannt werden. Der wesentlichste der hier in Betracht kommenden Muskeln, der Strecker des Unterschenkels *acb* (Fig. 58), zieht sich in beträchtlicher Länge vom obern Ende des Schenkels bis gegen das Knie hin. Dort geht er in eine sehr starke Sehne über, die sich hautartig über die Kniescheibe *c* ausbreitet und diese gleichsam einschliesst. Nahe unterhalb derselben ist er an dem Knochen des Unterschenkels angewachsen. Durch die Contraction dieses Muskels von *c* nach *a* entsteht ein Druck, der in Folge der Beweglichkeit der Kniescheibe sich auf der andern Seite derselben von *c* nach *b* fortpflanzt, und nach dem Parallelogrammgesetze in die Mittelkraft *cd* in der Richtung durch den Drehpunkt *o* des Kniegelenkes übergeht. Letzterer wird auf diese Weise gezwungen, sich von *o* gegen *d* zu bewegen; und weil während dieser Bewegung der Ober- und Unterschenkel allmälig in eine gerade Linie übergehen, so wird der Körper gehoben. Gesetzt, das Gewicht des letztern betrage 150 Zollpfund; es sei $ao = 5$ Decimeter, $os = ao$, und der Ausbiegungswinkel des Knies $= d = 120^0$; so findet man as als Basis des Dreiecks acs gleich 8,5 Decimeter. Die Höhe dieses Dreiecks = 2,5 Decimeter bezeichnet den Weg der Resultirenden R in der Richtung cd. Der Schwerpunkt des Körpers erhebt sich dabei um $5 + 5 - 8{,}5 = 1{,}5$ Decimeter. Die entsprechende mechanische Arbeit, in Decimeter-Pfunden (Nro. 51) ausgedrückt, beträgt

Fig. 58.



$$150 \,.\, 1{,}5 = 2{,}5\, R,$$

woraus sich der mittlere Druck in der Richtung cd für den Fall sehr langsamen Erhebens ergiebt,

$$R = 90 \text{ Pfund.}$$

Beim Beginne des Streckens war er begreiflicher Weise viel grösser. Mit ihm in proportionaler Weise ändert sich die Muskelspannung. In unserm Falle war dieselbe anfangs $= R$, weil die Spannung über und unter dem Knie gleich sein muss, und Winkel d zu 120^0 angenommen war.

Von einem andern Kniehebel ist das Erheben des Körpers auf den Fussspitzen abhängig. Es geschieht durch Contraction des Waden-

muskels ep (Fig. 58), der unter dem Knie beginnend in eine mächtige Sehne verläuft (die Achillessehne), welche um das hinterste Ende des Fersenbeines befestigt ist. Die Wirksamkeit dieser Kraft $= Q$ richtet sich ähnlich wie bei dem in Fig. 57 dargestellten Kniehebel unmittelbar gegen einen Hebelarm, hier die Linie pq, welche durch den Drehpunkt s des Fussgelenkes geht. An diesem Punkte verwandelt sie sich dann in einen Druck $Q \frac{pq}{nq}$ in der Richtung der Linie sn (Nro. 82), welcher den Drehpunkt s in dieser Richtung zu bewegen sucht und dadurch den Körper hebt. Der menschliche Körper kann durch das Stützen auf die Fussspitze ungefähr $^1/_2$ Decimeter oder doch nicht vielmehr gehoben werden. Die erforderliche Arbeitskraft lässt sich hiernach ermessen.

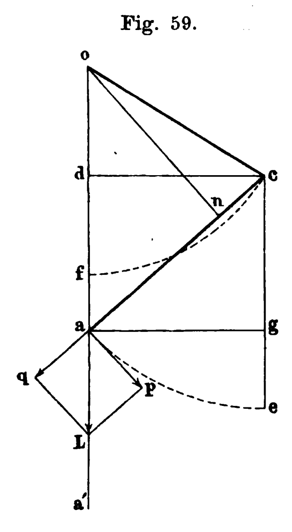
Beim senkrechten Erheben des menschlichen Körpers kann noch ein dritter Kniehebel zur Wirksamkeit gelangen, dessen Drehpunkt mit dem des Hüftgelenkes zusammenfällt. Indem diese verschiedenen zum Heben des Körpers geeigneten Werkzeuge gleichzeitig benutzt werden, ist er durch dieses Zusammenwirken eines sehr grossen Theils seiner Muskulatur während kurzer Zeit zu einer Kraftentwicklung fähig, die selbst mehrere Centner übersteigen kann (Nro. 54, γ). Dieses Zusammenwirken, auf einen sehr kurzen Zeitraum concentrirt, bedingt die Sprunggeschwindigkeit, welche man dem Körper einzuflössen vermag.

Die Geschwindigkeit, die sich bei dem Wurfe leichter Körper aus der freien Hand entwickeln lässt, beruht zum Theil allerdings darauf, dass der zurückgebogene Arm um das Schultergelenk wieder nach vorn gezogen wird. Den wesentlichsten Einfluss übt jedoch der Umstand, dass der rückwärts ausgestreckte Unterarm während dessen mit dem Oberarme gemeinschaftlichen Drehung um das Schultergelenk, durch den Beugemuskel rasch eingebogen und dann ebenso durch den Streckmuskel, in ganz ähnlicher Weise, wie wir vorher bezüglich des Knies gesehen, wieder gestreckt werde. Aus der Zusammensetzung dieser Bewegungen ergiebt sich schliesslich die Geschwindigkeit, mit welcher der beschleunigte Körper die Hand verlässt.

In dem Fig. 32 dargestellten Beispiele des Hebens einer Last durch die Hand war vorausgesetzt worden, dass das Gewicht L die Lage senkrecht unter der Schulter nicht verlasse. Es konnte dadurch unmittelbar kein Moment mit Beziehung auf den Drehpunkt o des Schultergelenkes annehmen, und beanspruchte folglich auch keine, ein solches Moment ausgleichende Muskelkraft. Mittelbar erzeugte L gleichwohl einen Widerstand, nicht bloss auf das Heben des Unterarmes, sondern auch auf dasjenige des Oberarmes. Zur bessern Uebersicht dieses Verhaltens zeigt Fig. 59 in schematischer Form die Lagen oc und ac beider Theile des Armes zu einem beliebigen Zeitpunkte des Hebens. Es soll a' den anfänglichen Ort der noch senkrecht herabhängenden Hand vorstellen, über welchen sie unterdessen durch die Drehung des Unterarmes um die Höhe

eg, sowie durch die Drehung des Oberarmes um die Höhe fd gehoben worden ist. Es sei Winkel $acg = oac = \varphi$.

Fig. 59.



Denken wir uns unter c einen festen Drehpunkt. L hat ein fortdauerndes Bestreben, durch den Bogen ae in die anfängliche Lage, senkrecht unter c zurückzufallen. Sein Druck tangential zu diesem Bogen, also winkelrecht gegen ac ist

$$ap = aL \,.\, \sin aLp = L \sin \varphi.$$

Diese Kraft, am Hebelarme ac wirksam, wird, wie schon früher erläutert wurde, durch das Spannkraftsmoment $P \,.\, cp$ (siehe Fig. 32) des Beugemuskels im Gleichgewicht gehalten. Letzterer hat also in dieser Lage nicht dem ganzen Gewichte L Widerstand zu leisten. Die andere Seitenkraft von L ist

$$aq = L \cos \varphi.$$

Ihre Wirksamkeit erstreckt sich in der Richtung der Linie ac, also gegen das Ellenbogengelenk. Ihr Hebelarm mit Beziehung auf den Drehpunkt o ist die von o aus gegen ac gefällte Senkrechte $on = oa . \sin \varphi$. Der Kraft $L \cos \varphi$ hat die Spannkraft Q (Fig. 32) des Schultermuskels das Gleichgewicht zu halten. Dasselbe knüpft sich an die Gleichheit der Momente

$$L \,.\, oa \,.\, \sin \varphi \cos \varphi = Q \,.\, oq.$$

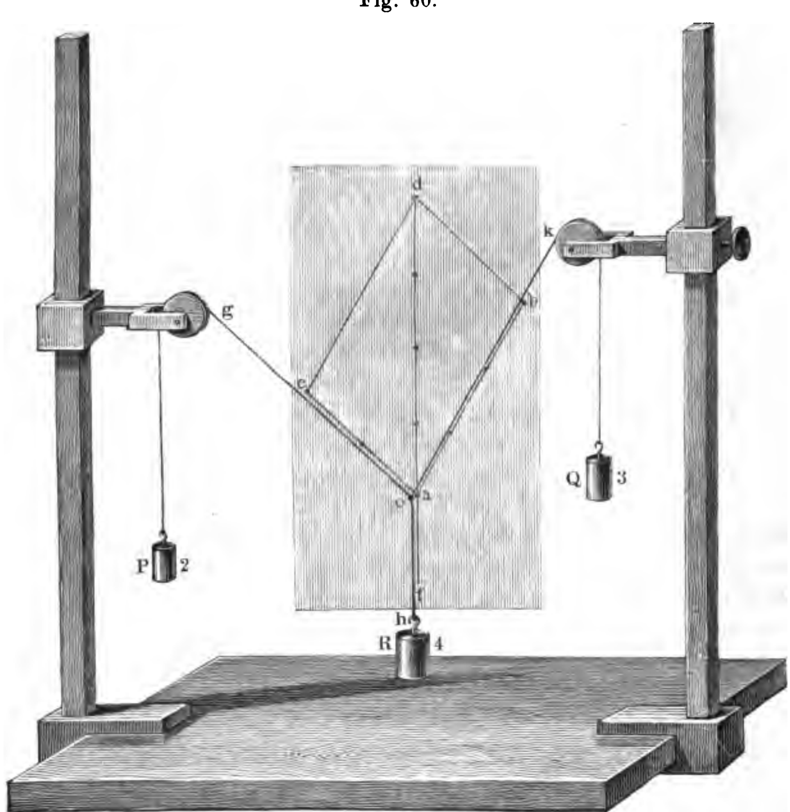
Da $\sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}$, so sieht man, dass die an die Linie oc reducirte Kraft im Falle ihres grössten Werthes die Hälfte des Gewichtes L nicht überschreiten kann.

84 **Seilverbindungen** bieten zahlreiche, vorzugsweise geeignete Beispiele, die Folgerungen aus dem Parallelogrammgesetze experimentell darzustellen und zugleich dem Auge zu versinnlichen. Eine hierzu brauchbare, durch den Anblick auch ohne weitere Erklärung leicht verständliche Geräthschaft ist in Fig. 60 (a. f. S.) abgebildet. Drei Schnüren bei o in einem Knotenpunkte verknüpft, sind durch die Gewichte P, Q und R gespannt. Zwei dieser Fäden laufen um Rollen von sehr grosser Beweglichkeit. Die von den anhängenden Gewichten ausgehenden, durch die ganze Fadenlänge bis zum Punkte o sich fortpflanzenden Spannungen erleiden durch diese Anordnung, wie wir wissen (Nro. 60), keine merkliche Aenderung.

Setzt man die Gewichte, deren Grösse wir als gegeben annehmen wollen, in Bewegung, so wird ihr Knotenpunkt o nach einer Reihe von Schwingungen, so oft auch dieser Versuch wiederholt werden mag, immer

genau in derselben Lage wieder zur Ruhe kommen. Misst man dann die Winkel, welche je zwei Schnüren einschliessen, so werden sich die-

Fig. 60.



selben ergeben, die sich aus dem auf den Richtungen der drei Kräfte ergänzten Parallelogramm *abcd* durch Rechnung ableiten lassen. Die Seiten *ab*, *bd* und *da* des halben Parallelogramms oder des Dreiecks *abd* verhalten sich wie die Kräfte *Q*, *P* und *R*, und können also in der Rechnung als diese Kräfte selbst eingeführt werden. Die Aufgabe wird dadurch auf die Bestimmung der Winkel eines Dreiecks zurückgeführt, von welchem die drei Seiten bekannt sind. Wählen wir, um dieselbe aufzulösen, aus irgend einem Werke der Geometrie die Gleichung

$$\sin {}^1/_2\, c = \sqrt{\frac{(A - B + C)\,(B - A + C)}{4\,A\,B}},$$

in welcher *A*, *B* und *C* die drei Dreieckseiten und *c* den der Seite *C* gegenüberstehenden Winkel vorstellt. Setzen wir $A = ac = bd = P$;

$B = ab = Q$; $C = da = R$. Bezeichnen wir ferner den durch die Richtungen der Kräfte P und Q gebildeten Winkel cab mit r, den zwischen den Richtungen der Kräfte P und R liegenden Winkel caf mit q und endlich den Winkel baf mit p.

Nun ist der der Seite $ad = R$ gegenüberliegende Winkel $c = abd = 180^0 - cab = 180^0 - r$. Daher

$$\sin \frac{abd}{2} = \sin \frac{180^0 - r}{2} = \sin (90^0 - {}^1/_2 r) = \cos {}^1/_2 r = \sin {}^1/_2 c$$

und

$$\cos {}^1/_2 r = \sqrt{\frac{(P - Q + R)(Q - P + R)}{4P \cdot Q}}.$$

In ähnlicher Weise können die Winkel p und q durch Rechnung bestimmt werden.

In dem durch die Figur angedeuteten Beispiele ergiebt sich Winkel $cab = r = 75^1/_2$ Grad, Winkel $baf = p = 151^0$. Die Summe der drei Winkel ist 360^0. Nimmt man die drei Gewichte von gleicher Grösse, so müssen ihre Richtungen ein gleichseitiges Dreieck bilden und man findet $\cos {}^1/_2 r = {}^1/_2 = \cos 60^0$, also $r = p = q = 120^0$.

Wird $P = Q$ gesetzt, R aber verschieden angenommen, so ergiebt sich aus der Rechnung: $\cos {}^1/_2 p = \cos {}^1/_2 q$; und auch der Versuch wird dann immer zeigen, dass die Richtung der dritten Kraft mit den Richtungen der beiden anderen gleiche Winkel einschliesst.

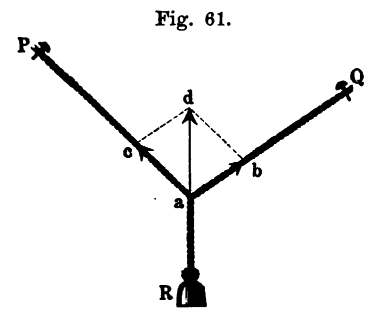
85 Wenn man die Kräfte P und Q, sowie ihren Neigungswinkel $cab = r$ als gegeben annimmt, so handelt es sich um die Bestimmung der dritten Seite $ad = R$ eines Dreiecks abd (Fig. 61), von welchem die Seiten $ab = Q$ und $bd = P$ nebst dem eingeschlossenen Winkel

$$abd = 180^0 - bac = 180^0 - r$$

bekannt sind. Die Geometrie bietet zu diesem Zwecke die Gleichung

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos c}.$$

Fig. 61.



Indem man in dieselbe die angenommenen Werthe einsetzt, verwandelt sie sich in

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ \cos (180 - r)} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2QP \cos r}.$$

Wird das mit Hülfe dieser Gleichung gefundene Gewicht R bei h (Fig. 60) angehängt, so muss der nach eingetretener Ruhe gebildete Winkel gok mit dem Winkel R übereinstimmen. Setzt man z. B. $r = 90^0$, so ist $\cos r = 0$, und man findet $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

86 Die Fig. 62 zeigt eine veränderte Anordnung in der Angriffsweise der Kräfte. P und Q spannen in entgegengesetztem Sinne denselben Faden. Die dritte Kraft R hängt an der Axe einer Rolle o, die ihrerseits wieder auf dem Faden ruht und von einem Theile desselben umspannt ist. Die nächste Folge dieser Einrichtung ist, dass der Faden überall gleiche Spannung annehmen, für die Bedingung des Gleichgewichtes also $P = Q$ sein muss. Daraus ergiebt sich dann weiter, dass im Gleichgewichtsverhältnisse nichts geändert werden kann, wenn man die eine dieser beiden Kräfte, z. B. P, durch einen festen Stützpunkt ersetzt. Der Winkel gdk, welchen die Richtungen der beiden gleichen Kräfte P und Q einschliessen, wird durch die Richtung der Kraft R halbirt. In dem aus den Richtungen der drei Kräfte ergänzten Dreiecke acd ist daher Winkel $cad = cda = \frac{1}{2} r$. Da ferner $cd : \frac{1}{2} ad = Q : \frac{1}{2} R = 1 : \cos \frac{1}{2} r$, so folgt

$$Q = P = \frac{R}{2 \cos \frac{1}{2} r}.$$

Die den Faden spannenden Kräfte P und Q wachsen mit der Grösse des Winkels $gdk = r$, mehr und mehr bis ins Unbegränzte. Da nun kein Faden oder kein Seil ganz gewichtlos sein kann, also in der Mitte eines gespannten Seiles immer eine Kraft R gedacht werden kann, so erkennt man die Unmöglichkeit, Seile in wagerechter oder geneigter Lage ganz gerade zu spannen.

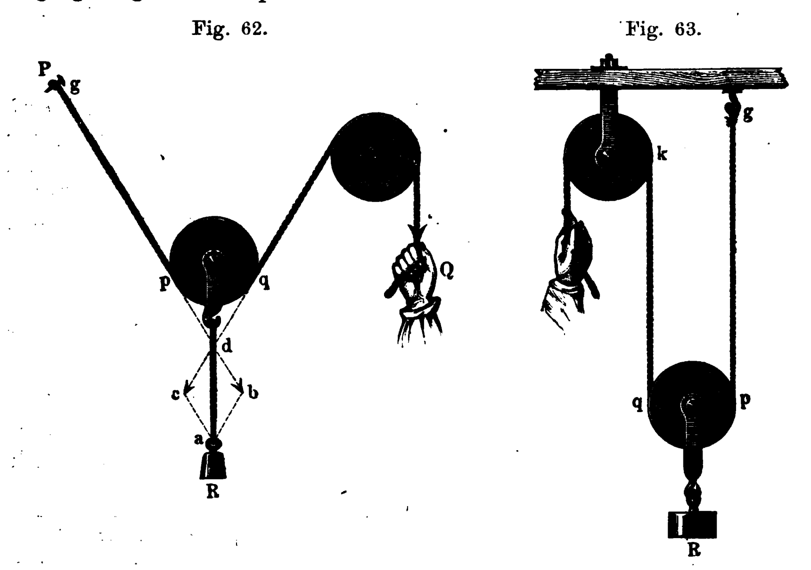


Fig. 62. Fig. 63.

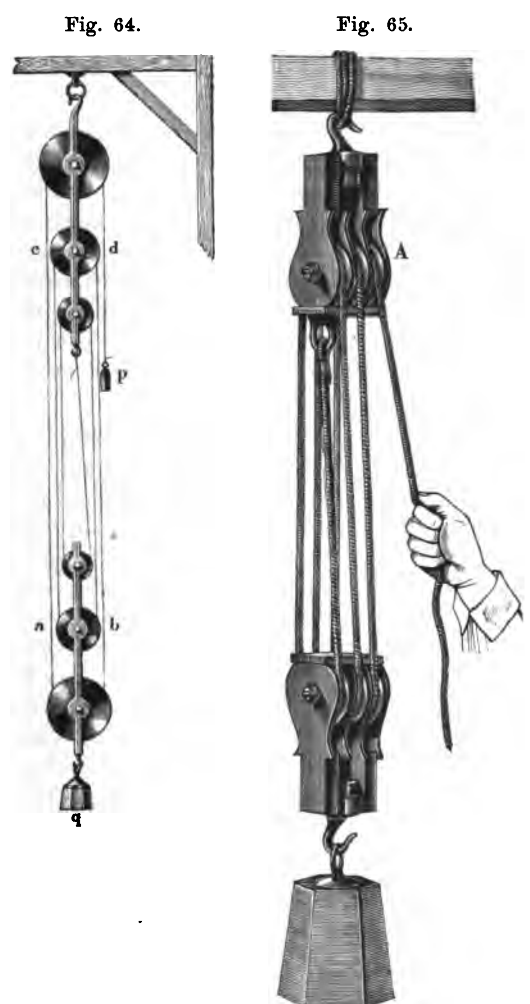
87 Setzt man den Winkel $r = 0$, d. h. richtet man beide Abtheilungen des gespannten Seiles gleichlaufend (Fig. 63), so wird $\cos \frac{1}{2} r = 1$, und

$Q = \frac{R}{2}\cdot$ Die erforderliche Kraft um ein gegebenes Gewicht R im Gleichgewichte zu erhalten, ist gleich der Hälfte dieses Gewichtes.

Wenn die Kraft Q sich senkt, so wird das Gewicht oder die Last R gehoben. Man erkennt nun leicht, dass ein Aufziehen der Last bis zu 1 Meter Höhe, ein Abwickeln von 2 Meter Länge des Seiles $gpqk$, also eine Senkung der Kraft bis zu 2 Meter erfordert. Kraft und Last verhalten sich umgekehrt wie die Wege, welche sie während der Bewegung, jede in ihrer Richtung beschreiben; ganz so wie das Arbeitsgesetz es verlangt.

Rollen, wie die in Fig. 63 *c* abgebildete, deren Axen beweglich sind, nennt man bewegliche Rollen, zur Unterscheidung von den Rollen mit unbeweglich bleibenden Drehaxen, den festen Rollen. Eine feste und eine bewegliche Rolle in Verbindung, sowie die Fig. 63 andeutet, nennt man einen Rollenzug oder auch Flaschenzug von zwei Rollen. Bei beiden Rollen ruht die Axe in einer Scheere, deren Arme einen Theil der Rolle umschliessen und sich ausserhalb zu einem Stücke vereinigen, an dessen Ende ein Haken angebracht ist, an der festen Rolle, um dieselbe an einer passenden Stelle aufzuhängen, an der beweglichen Rolle, um die Last daran zu hängen. Zwischen beiden Armen der Scheere befindet sich eben noch der nöthige Spielraum für die Beweglichkeit der Rolle um ihre Axe, und um das Seil ohne Reibung durchzulassen.

Fig. 64. Fig. 65.



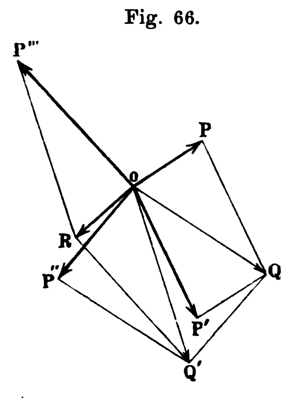
Hierdurch sowie durch die zur Aufnahme des Seiles in den Umfang der Rolle eingeschnittene Rinne wird das Abgleiten verhindert.

Bei dem Flaschenzuge mit zwei Rollen ist, wie wir erkannt haben, die Kraft gleich der Hälfte der Last. Man findet aber auch Flaschenzüge mit drei, mit vier und mehr Rollen im Gebrauche. Fig. 64 (a. v. S.) zeigt einen Flaschenzug mit sechs Rollen. Der Flaschenzug Fig. 65 hat ebenfalls sechs Rollen. Dieser unterscheidet sich aber von jenem dadurch, dass seine sämmtlichen Rollen von gleicher Grösse sind, und dass die in demselben Gehäuse (Flasche) befindlichen auch auf derselben Axe ruhen. Für alle gilt übrigens, wie leicht zu erkennen, dasselbe Gesetz: Die Kraft, für die Bedingung des Gleichgewichtes, ist gleich der Last, dividirt durch die Anzahl der Rollen, und der Weg der Kraft ist gleich dem der Last, multiplicirt mit der Anzahl der Rollen.

88 **Kräftepolygon.** Nach dem Gesetze des Parallelogramms der Kräfte lassen sich zwar unmittelbar immer nur zwei Kräfte zusammensetzen. Ihre Resultirende kann jedoch wieder mit einer dritten Kraft verbunden werden, und deren Resultirende mit einer vierten u. s. f., dergestalt, dass es möglich ist, eine jede beliebige Anzahl Kräfte, welche gegen einen materiellen Punkt gerichtet sind, zu einer einzigen Kraft zusammenzusetzen; d. h. durch Construction in der angedeuteten Weise eine Kraft ihrer Grösse und Richtung nach zu bestimmen, durch welche jene sämmtlichen Kräfte ersetzt werden können, oder die, in entgegengesetztem Sinne angebracht, jenen das Gleichgewicht hält.

Es sei z. B. o (Fig. 66) der Knotenpunkt der vier Kräfte P, P', P'' und P'''. Die Resultirende von oP und oP' ist oQ; die Resultirende von oQ und oP'' ist oQ', welche wieder mit oP''' zusammengesetzt, die Resultirende oR sämmtlicher Kräfte bildet. Bei dieser Construction treten alle in Betracht kommenden Kräfte nach ihren relativen Grössen als Linien gemessen, mit ihrer Resultirenden zu einem Polygone zusammen, hier das Polygon $oPQQ'Ro$, dessen Seiten mit den betreffenden Kräften gleichlaufend und nach gleicher Richtung gezogen sind, und wovon die Resultirende Ro die Schlussseite bildet. Die Gestalt dieses Polygons wird, je nach der Wahl der Kraftlinie, von der aus die Construction beginnt, vrschieden ausfallen; Lage und Grösse der Resultirenden Ro kann aber dadurch keine Aenderung erfahren. Es kann sich finden, dass das Polygon ohne eine Verbindungslinie Ro sich schliesst. Dies deutet dann an, dass die Resultirende Null ist, oder dass die Kräfte sich im Gleichgewichte halten.

Fig. 66.



Die Bestimmung der Resultirenden einer Anzahl Kräfte, welche gegen einen Punkt o wirksam sind, durch Construction des Kräftepolygons, gilt übrigens, mögen die Richtungen der Kräfte in einer oder in verschiedenen Ebenen liegen.

Drei Kräfte P, P' und P'' (Fig. 67), deren Richtungen im Punkte O zusammentreffen, aber nicht in derselben Ebene liegen, bilden die Kanten eines körperlichen Ecks und ihre Grössen bestimmen die Grösse eines Parallelopipeds, das sich aus ihren Richtungen ergänzen lässt. Die Diagonale desselben ist ihrer Richtung und Grösse nach die Resultirende der drei Kräfte. Die Richtigkeit dieser Folgerung fliesst aus der Construction des Kräftepolygons $OPQRO$ und wird bei näherer Betrachtung der Figur leicht erkannt werden *).

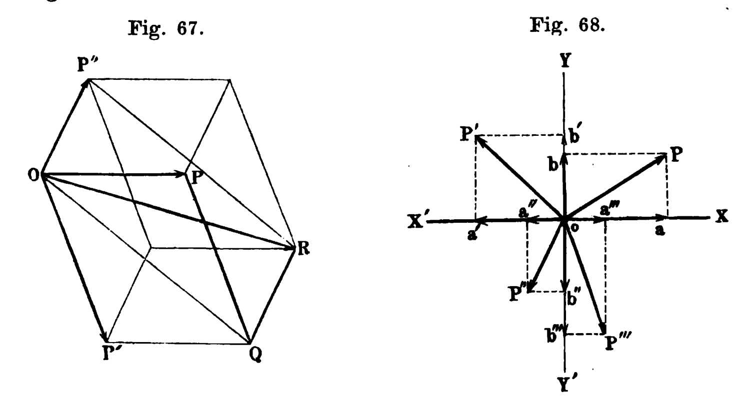


Fig. 67. Fig. 68.

Kräfte in der Ebene. Das beschriebene Verfahren, eine beliebige Anzahl Kräfte zu einer einzigen zusammenzusetzen, empfiehlt sich nicht als Grundlage für die Rechnung. Viel einfacher zu diesem Zwecke ist die folgende Methode, welche wir zunächst auf eine Anzahl Kräfte in der Ebene anwenden wollen. Es seien P, P', P'' u. s. w. die Kräfte, deren Resultirende bestimmt werden soll. Ihren gemeinschaftlichen Wirkungspunkt o (Fig. 68) nahm man als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystemes. Die Linien oX und oY mögen die Axen desselben vorstellen. Ihre Lage ist beliebig und gewöhnlich durch Bedingungen der Zweckmässigkeit oder Bequemlichkeit bestimmt. 89

Die Neigungen der Kraftlinien gegen die Axen müssen auf irgend einen ihrer Aeste, z. B. auf den Ast oX bezogen werden, und zwar immer nach gleicher Richtung der Winkelöffnung. In diesem Sinne nun sei Winkel $PoX = \alpha$, Winkel $P'oX = \alpha'$; $P''oX = \alpha''$ und $P'''oX = \alpha'''$. Die Richtung der Kraft P'' fällt in den dritten Quadranten; im Sinne des gewählten Verfahrens die Winkelöffnungen zu messen, ist also der Bogen,

*) Poisson, Traité de Mécanique, 2. Edition, T. 1, p. 54.

welcher die Grösse des Winkels α'' bestimmt, grösser als 180°. Aus demselben Grunde muss man sich den Winkel α''' grösser als 270° vorstellen.

Die Kraft P lässt sich nach den Richtungen der beiden Coordinatenaxen in zwei Kräfte: $P \cos \alpha$ nach oX gerichtet, und $P \sin \alpha$ nach oY gerichtet, zerlegen. In ähnlicher Weise zerfällt P' in die Seitenkräfte $P' \cos \alpha'$ und $P' \sin \alpha'$; ferner P'' in die Seitenkräfte $P'' \cos \alpha''$ und $P'' \sin \alpha''$ u. s. w. Anstatt einer Anzahl Kräfte, die in irgend beliebigen Richtungen um den Punkt o vertheilt sind, erhält man also jetzt zwei Summen von gleich gerichteten Kräften; die eine Summe aus Kräften bestehend, die sämmtlich in die Axe der X fallen, die andere Summe nur aus solchen gebildet, welche nach der Axe der Y wirksam sind. So entstehen zwei Gleichungen von der Form

$$X = P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \cdots$$

und

$$Y = P \sin \alpha + P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + \cdots$$

Die den einzelnen Theilsätzen dieser Gleichungen gebührenden Zeichen sind von der Grösse der Winkel abhängig. Es ist einleuchtend, dass allen Cosinussen, deren Bogengrössen in den zweiten und dritten Quadranten fallen, das negative Vorzeichen angehört, und dass ebenso alle Sinusse, deren Bögen mehr als 180° betragen, die betreffenden Theilsätze negativ machen. Die Resultirenden X und Y können demnach sowohl positive wie negative Werthe erhalten. Da beide einen rechten Winkel einschliessen, so ergiebt sich ihre gemeinschaftliche Resultirende

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

und der Winkel a, welchen sie mit dem Aste oX der Abscissenaxe bildet, aus der Gleichung

$$tng\, a = \frac{Y}{X}.$$

Die Richtung der Resultirenden R bestimmt sich durch das Vorzeichen von X und Y. Sind beide positiv, so ist a kleiner als 90°; wird X negativ gefunden, so ist a grösser als 90° und kleiner als 180°; hat auch Y das negative Vorzeichen, so fällt die Richtung von R in den dritten Quadranten, und endlich in den vierten, wenn Y sich als negativ, dagegen X als positiv ergeben hat.

Die Kräfte X und Y, da sie nach verschiedenen Richtungen wirksam sind, können sich niemals das Gleichgewicht halten. Das Gleichgewicht sämmtlicher Kräfte ist daher an die Bedingung geknüpft, dass gleichzeitig $X = 0$ und $Y = 0$ werde.

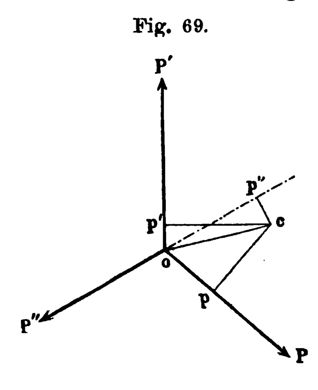
Ist nun $Y = 0$, so fällt die Resultirende in die Axe der X. Dagegen liegt sie in der Axe der Y, wenn die Bedingungsgleichung $X = 0$ stattfindet.

90 Mehrere Kräfte in der Ebene, deren Wirksamkeit gegen einen und denselben Punkt gerichtet ist, besitzen, wenn sie einander das Gleich-

gewicht halten, die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass die Summe ihrer statischen Momente, bezogen auf einen beliebigen Punkt derselben Ebene, gleich Null ist.

Es mögen Po, $P'o$, $P''o$ (Fig. 69) die Kräfte im Gleichgewichte vorstellen, c sei der beliebig angenommene Drehpunkt. Man wähle die Linie $oc = x$ als Axe der X, bestimme die Winkel $Poc = \alpha$, $P'oc = \alpha'$, $P''oc = \alpha''$, und ziehe von c aus gegen die Richtungen der Kräfte die Senkrechten cp, cp', cp''. Sie sind mit Beziehung auf den Punkt c als Drehpunkt die Hebelarme der Kräfte, und es ist

Fig. 69.



$$cp = x \sin \alpha,$$
$$cp' = x \sin \alpha',$$
$$cp'' = x \sin \alpha''.$$

Nun sollen sich nach Annahme die Kräfte im Gleichgewichte halten, es muss daher die Gleichung stattfinden:

$$P \sin \alpha + P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + \cdots = 0;$$

oder durch Multiplication mit x,

$$P x \sin \alpha + P' x \sin \alpha' + P'' x \sin \alpha'' + \cdots = 0.$$

Diese Gleichung aber ist nichts Anderes als ein Ausdruck für die Summe der statischen Momente der betreffenden Kräfte, bezogen auf den Punkt c.

Dächte man sich, dass eine Drehung um diesen Punkt wirklich erfolge, ohne dass die gegenseitigen Lagen der Kräfte zu einander und zu der Linie oc dadurch eine Aenderung erführen, so würde jede der Kräfte in ihrer Richtung den gleichen Bogen φ beschreiben müssen, und es würde die Gleichung bestehen:

$$P \varphi x \sin \alpha + P' \varphi x \sin \alpha' + P'' \varphi x \sin \alpha'' + \cdots = 0;$$

d. h. auch die Summe der Bewegungsmomente, einer beliebigen Anzahl Kräfte in der Ebene, welche sich in einem Punkte o das Gleichgewicht halten, bezogen auf irgend welchen Punkt derselben Ebene als Drehpunkt, ergänzen sich zu Null.

Wir wollen nicht unbemerkt lassen, dass die Richtigkeit dieses Satzes auch unmittelbar aus dem Arbeitsgesetze als eine nothwendige Folge hervorgeht. Denn wenn Kräfte einander das Gleichgewicht halten, so müssen ihre gleichzeitigen Arbeiten sich wechselseitig fortdauernd aufheben, d. h. die Summe ihrer Bewegungsmomente während der Arbeit ist gleich Null.

Wenn die Kräfte P, P', P'' u. s. w. einander nicht das Gleichgewicht halten, so behaupten obige Gleichungen ihre Geltung nur noch unter

der Einschränkung, dass der Stützpunkt in der Richtung ihrer Resultirenden angebracht werde.

Die Grösse des Momentes einer Kraft ist unabhängig von ihrer Richtung, so lange nur der senkrechte Abstand derselben von dem Drehpunkte ungeändert bleibt. Wenn also mehrere Kräfte um einen bestimmten Punkt einander das Gleichgewicht halten, so können ihre Richtungen, immer in gleichem Abstande um diesen Punkt herum, zahllose Aenderungen erfahren, ohne dass das Gleichgewicht gestört wird. Der Druck auf den Stützpunkt oder die Resultirende sämmtlicher Kräfte ändert sich allerdings mit deren Richtungen, sowohl der Grösse als Richtung nach, so jedoch, dass letztere stets durch den Stützpunkt geht.

91 **Gegenkräfte.** Zwei Systeme von Kräften in der Ebene können so verbunden sein, dass die Bewegung des einen die des andern nach sich zieht. Um in diesem Falle ihre gemeinschaftliche Resultirende ausfindig zu machen, beginnen wir damit, die Resultirende eines jeden Systemes auf bekanntem Wege für sich zu bestimmen. Bilden die Richtungen der so gefundenen Werthe von R und R' einen Winkel, so lässt sich dann die gemeinschaftliche Resultirende mit Hülfe des Kräfteparallelogramms ermitteln. Fallen beider Richtungen in dieselbe gerade Linie, z. B. in die beiden Systemen angehörende Axe der X, so ist die Resultirende aller Kräfte gleich der Summe oder der Differenz von R und R'. Das Gleichgewicht beider Systeme erheischt entgegengesetzt gleiche Werthe von R und R'. Es kann endlich drittens noch der Fall eintreten, dass diese beiden Resultirenden parallel gerichtet sind. Ihr gemeinschaftlicher Wirkungspunkt bestimmt sich dann nach dem Hebelgesetze mittelst der Gleichung (Nro. 71)

$$s = \frac{aR}{R + R'},$$

in welcher a die winkelrechte Entfernung der Richtungen beider Kräfte von einander und s den Punkt vorstellt, in welchem eine der Summe $R + R'$ gleiche und in entgegengesetztem Sinne angebrachte Kraft das Gleichgewicht bedingt.

Für beide Systeme von Kräften findet sich also stets eine Resultirende, in der Art, dass eine andere dieser gleiche, aber in entgegengesetztem Sinne angreifende Kraft, beiden Systemen das Gleichgewicht hält. Ein einziger Fall ist ausgenommen, derjenige nämlich, wenn der Grösse nach $R = R'$, dem Zeichen nach aber beide einander entgegengesetzt sind. Es wird dann $s = \frac{a\,.\,R}{R - R} = \frac{aR}{o} =$ unendlich. Der Stützpunkt beider Kräfte liegt in unbegränzter Ferne, d. h. beiden kann durch keine Kraft, wo immer sie angreifen möchte, das Gleichgewicht gehalten werden.

Befindet sich zwischen zweien gleichen Gegenkräften, etwa in der Mitte zwischen beiden, eine Drehaxe, so unterstützen sich beide in dem

Bestreben, die Rotation zu bewirken. Beispiele der Art bieten das Segner'sche Wasserrad, die Magnetnadel u. a. m.

Die Summe der Momente beider Gegenkräfte, bezogen auf den Drehpunkt, ist übrigens unabhängig von der Lage dieses Punktes; mag derselbe in der Mitte zwischen den Angriffspunkten beider Kräfte, oder nicht in der Mitte, oder selbst ausserhalb der Angriffspunkte liegen. Denn setzt man den Hebelarm der einen Kraft, bezogen auf den beliebig gewählten Drehpunkt c (Fig. 70), $ca = b$, den Hebelarm der andern Kraft $cb = ca + ab = b + a$, so ist die Summe der Momente $= P(b + a) - Pb = Pa$. Das Resultat würde natürlich dasselbe bleiben, wenn b negativ genommen würde, d. h. wenn der Stützpunkt zwischen die Angriffspunkte fiele. Die Summe der Momente bleibt also immer gleich dem Producte aus der einen Kraft in die winkelrechte Entfernung der Richtungen beider Kräfte von einander, ganz so als hätte man den Angriffspunkt der einen Kraft zum Drehpunkte gewählt.

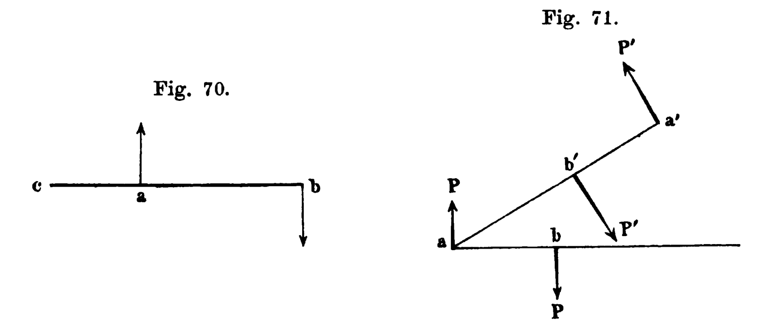


Fig. 70. Fig. 71.

Man lasse zwei Paare gleicher Gegenkräfte zu gleicher Zeit an demselben festen Körper, jedoch beide Paare in verkehrter Ordnung angreifen. Es mögen a und b (Fig. 71) die Angriffspunkte des einen Paares, a' und b' die des andern Paares vorstellen, und es sei $ab = a$, ferner $a'b' = a'$ und $ab' = b$. Nehmen wir den Punkt a als Drehpunkt des Systemes, so ist die Summe der Momente beider Paare

$$= Pa + P'b - P'(b + a') = Pa - P'a'.$$

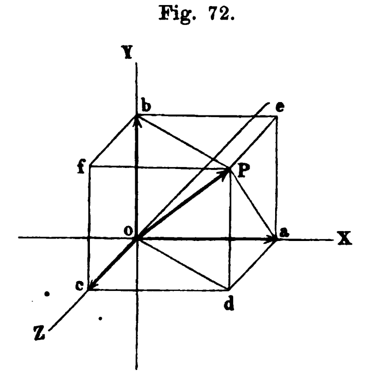
Beide in verkehrter Ordnung angreifende Paare werden sich ins Gleichgewicht setzen, wenn $Pa = P'a'$.

Kräfte im Raume. Um die Resultirende mehrerer Kräfte, die aus verschiedenen Ebenen in einem Knotenpunkte zusammentreffen, durch Rechnung zu bestimmen, kann man sich ebenfalls eines rechtwinkligen Coordinatensystemes bedienen, das aber jetzt aus drei Axen bestehen muss, welche die Kanten eines körperlichen Rechtecks bilden. 92

Der Ursprung dieses Coordinatensystemes werde in den gemeinschaftlichen Angriffspunkt oder Knotenpunkt der Kräfte verlegt. Es sei

oX (Fig. 72) die Axe der X; oY die Axe der Y; oZ die Axe der Z. Ferner sei $oP = P$, eine der Kräfte, ihrer Richtung und Grösse nach gegeben; Winkel $Poa = \alpha$, $Pob = \beta$ und $Poc = \gamma$ die Winkel, welche sie mit den drei Axen bildet.

Fig. 72.



Man lege durch den Punkt P die drei Ebenen $Pfbe$ parallel mit der Ebene der XZ, $Pfcd$ parallel mit der Ebene der XY und $Pdae$ parallel mit der Ebene der YZ, so entsteht ein Parallelepipedon, dessen Diagonale durch die Kraftlinie Po gegeben ist. Die Kraft P zerfällt, wie leicht zu erkennen, in die Seitenkräfte $ob = y$ und od. Die letztere Kraft, als Diagonale des Rechteckes $oadc$ kann wieder in die Seitenkräfte $oa = x$ und $oc = z$ zerlegt werden; so lässt sich also die Kraft P durch die Seitenkräfte x, y, z, deren Richtungen mit denen der drei Axen zusammenfallen, ersetzen. Eine Kraft $= P$, aber in entgegengesetztem Sinne angreifend, würde den drei Kräften das Gleichgewicht halten. Es ist $P^2 = y^2 + od^2$; und da $od^2 = x^2 + z^2$, auch

$$P^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Auf ganz ähnliche Weise kann jede andere Kraft des Systemes in drei Seitenkräfte nach den drei Axen zerlegt werden, und es entstehen dadurch eben so viele Bedingungsgleichungen von der Form

$$P_{,}^2 = x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2 \text{ u. s. f.,}$$

als Kräfte vorhanden sind. Sie lehren, dass es ausreichend ist, je zwei Componenten einer Kraft unmittelbar zu kennen, indem dann die dritte durch Rechnung bestimmt werden kann.

Anstatt der Kräfte P, P', P'' u. s. w. erhält man durch dieses Verfahren drei Summen von Kräften:

$$X = x + x' + x'' + \cdots$$
$$Y = y + y' + y'' + \cdots$$
und
$$Z = z + z' + z'' + \cdots$$

deren gemeinschaftliche Resultirende

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Die Werthe der Seitenkräfte x, y, z können aus den Winkeln abgeleitet werden, welche ihre Resultirende P mit jeder der drei Axen einschliesst. Man ziehe die Linie Pa (Fig. 72). Als Linie in der Ebene $Pdae$ steht sie auf der Axe ox senkrecht. Der Winkel oaP ist folglich ein rechter, und in dem Dreiecke Poa ist

$$oa = x = Po \,.\, \cos Poa = P \cos \alpha.$$

In derselben Weise findet man $y = P\cos\beta$ und $z = P\cos\gamma$. Daher

$$P^2 = P^2\cos^2\alpha + P^2\cos^2\beta + P^2\cos^2\gamma$$

und

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma.$$

Diese Gleichung erlaubt den einen der drei Winkel durch Rechnung zu ermitteln, wenn die beiden anderen bekannt sind.

Die Richtung der Kraft P' bildet mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β und γ. Es ist daher $x' = P'\cos\alpha_,$; $y' = P'\cos\beta_,$; $z' = P'\cos\gamma_,$; und

$$P_,^2 = P_,^2\cos^2\alpha_, + P_,^2\cos^2\beta_, + P_,^2\cos^2\gamma_,;$$

folglich

$$1 = \cos^2\alpha_, + \cos^2\beta_, + \cos^2\gamma_,.$$

Indem auf demselben Wege die Componenten aller übrigen Kräfte P'', P''' u. s. f. näher bestimmt werden, gelangt man schliesslich zu den drei Summen

$$X = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \cdots,$$
$$Y = P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \cdots,$$
$$Z = P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \cdots,$$

als deren Resultirende wir schon gefunden haben:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Die Winkel a, b und c, welche R mit den drei Axen bildet, können aus den Gleichungen

$$X = R\cos a, \quad Y = R\cos b, \quad Z = r\cos z \quad \text{und}$$
$$1 = \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c$$

abgeleitet werden.

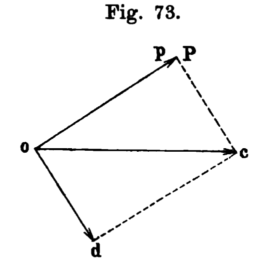
Für den Fall, dass sich die Kräfte P, P' u. s. f. um den Punkt o ohne Beihülfe irgend einer Stütze im Gleichgewichte halten, ist es nothwendig, dass ihre Componenten nach den Richtungen der drei Axen für sich im Gleichgewichte stehen, d. h. es müssen die Bedingungsgleichungen stattfinden $X = 0$, $Y = 0$ und $Z = 0$. Denn mögen diese algebraischen Summen der Seitenkräfte positive oder negative Werthe besitzen, ihre Quadrate sind in allen Fällen positiv. R kann also nur Null werden, wenn zu gleicher Zeit X, Y und Z sich in Null verwandeln.

Die Bedingungsgleichungen $X = 0$ und $Y = 0$ zeigen, dass die Resultirende in die Axe der Z fällt. Ist nur $X = 0$ gefunden worden, so liegt R in der Ebene der XZ.

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Wenn ein freier **93** materieller Punkt im Raume, der unter der Einwirkung einer Anzahl Kräfte sich im Gleichgewichte erhält, aus seiner Stelle gerückt, z. B. in gerader Linie von o nach c (Fig. 73, a. f. S.) geschoben wird, so kann dieser Vorgang nicht stattfinden, ohne dass der Punkt o nicht in der Richtung einer jeden der angreifenden Kräfte einen Weg beschreibt.

Um die Grössen dieser verschiedenen, gleichzeitig beschriebenen Wege festzustellen, wollen wir den Punkt o als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystemes und die Richtung oc als Axe der X betrachten. Indem wir sämmtliche Kräfte in ihre Componenten nach den Richtungen der drei Axen zerlegen, wird als algebraische Summe der in die Axe der X fallenden Componenten erhalten:

Fig. 73.



$$o = P \cos\alpha + P' \cos\alpha' + P'' \cos\alpha'' + \cdots \quad (1)$$

Es sei oP die Richtung der Kraft P; man ziehe von dem Punkte c gegen diese Linie die Senkrechte cp, so bedeutet op den Weg, welchen der Punkt o in der Richtung der Kraft P beschrieben hat, während derselbe Punkt von o nach c hin den Weg oc zurücklegte. Denn man kann sich die Geschwindigkeit oc aus den Seitengeschwindigkeiten op und od zusammengesetzt vorstellen, von welchen op ausschliesslich, od gar nicht in die Richtung der Kraft P fällt. Es ist $op = oc \,.\, \cos\alpha$.

Ganz auf dieselbe Weise findet man die Wege, welche der Punkt o in der Richtung der Kräfte P', P'' u. s. w. zurücklegt:

$$op' = oc \,.\, \cos\alpha',$$
$$op'' = oc \,.\, \cos\alpha'' \quad \text{u. s. w.}$$

Multiplicirt man sämmtliche Theilsätze der Gleichung (1) mit oc, so wird erhalten:

$$o = P \,.\, oc \,.\, \cos\alpha + P' \,.\, oc \,.\, \cos\alpha' + P'' \,.\, oc \,.\, \cos\alpha'' + \cdots$$
$$= P \,.\, op + P' \,.\, op' + P'' \,.\, op'' + \cdots$$

Mit Worten ausgedrückt: Die Summe der Producte der Kräfte in die Wege, welche sie während der Bewegung des materiellen Punktes o nach c, jede in ihrer Richtung beschrieben haben, ist gleich Null.

Die Wege op, op' u. s. w., welche die Kräfte während der Bewegung des Punktes o, jede in ihrer Richtung zurückgelegt haben, nennt man ihre virtuellen Geschwindigkeiten, und hiernach heisst das soeben entwickelte Gleichgewichtsgesetz: das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Angenommen, dass die gegen einen materiellen Punkt gerichteten Kräfte eine Resultirende haben, und dass in der Richtung derselben Bewegung erfolgt, so führen dieselben Voraussetzungen wie vorher genau auch zu denselben Folgerungen. Um dies einzusehen, braucht man sich nur einen Augenblick vorzustellen, dass in das Kräftesystem eine der Resultirenden gleiche Gegenkraft eingeführt und dadurch das Gleichgewicht hergestellt werde.

Das Princip, in dieser Weise ausgedrückt, sagt: Das Product der Resultirenden in ihre virtuelle Geschwindigkeit ist gleich

der Summe der Producte ihrer Componenten je in deren virtuelle Geschwindigkeiten.

Diese Ausdrucksform des Principes hat für die Bewegung bei gestörtem Gleichgewichte genau dieselbe Bedeutung wie die vorher entwickelte für die Gleichgewichtsbeziehungen.

In einem Falle ist die virtuelle Geschwindigkeit einer Kraft gleich Null. Wenn nämlich die Bewegung winkelrecht gegen ihre Richtung erfolgt, so z. B. bei der Bewegung eines Körpers auf horizontaler Erdoberfläche, denn ein Weg in horizontaler Richtung hat keine Componente nach der Verticalen.

Wenn man in dem Knotenpunkte oder dem gemeinschaftlichen Wirkungspunkte einer beliebigen Anzahl Kräfte noch zwei andere entgegengesetzt gleiche Kräfte angreifen lässt, so bleibt die Grösse der Resultirenden der anfangs vorhandenen Kräfte davon unberührt; und wenn der gemeinschaftliche Angriffspunkt sich in Bewegung setzt, so ist die daraus entspringende Arbeit genau dieselbe, wie wenn das Paar entgegengesetzt gleicher Kräfte nicht zugefügt worden wäre, denn da die Arbeiten dieser beiden Kräfte, jede in ihrer Richtung nothwendig gleich und einander entgegengesetzt sind, so müssen sie sich wechselseitig aufheben.

Entgegengesetzt gleiche Kräfte werden zuweilen mit Vortheil benutzt, um gewisse Erscheinungen anschaulich zu machen oder ihre Erklärung zu vereinfachen und zu erleichtern.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ist der verallgemeinerte Ausdruck des Arbeitsgesetzes. Es sagt uns, in diesem Sinne genommen: Jede mechanische Arbeit ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten sämmtlicher dabei betheiligter und wie immerhin in Angriff gesetzter Kräfte. Sind diese Arbeiten so gegen einander gerichtet, dass sie sich in jedem Augenblicke wechselseitig aufheben, so herrscht Gleichgewicht.

Das Arbeitsgesetz lässt sich aber nur physikalisch beweisen; es ist aus der Erfahrung, aus den Thatsachen abgeleitet worden. Seine Richtigkeit für alle Fälle können wir nur aus der grossen Zahl von Einzelfällen folgern, für welche es sich bewährt hat.

Aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten ergiebt sich nicht nur die überwiegende Wahrscheinlichkeit, sondern auch die innere Nothwendigkeit seiner allgemeinen Geltung. Das Princip hat in dieser Beziehung eine um so grössere Bedeutung für die Mechanik, als es sich ganz unabhängig von dem Arbeitsgesetze beweisen lässt, und wirklich früher als dieses entdeckt und dargethan worden ist.

Siebenter Abschnitt.

Vom Schwerpunkte der Massen und der davon abhängigen Standfähigkeit der Körper.

94 Die Physik lehrt, dass sich zwischen den Theilen eines jeden Körpers ein Punkt vorfindet, indem man sich sein ganzes Gewicht gleichsam concentrirt vorstellen kann, weil ein in diesem Punkte gestützter Körper in jeder Lage im Gleichgewicht verharrt, und weil der Druck schwerer Körper immer so angesehen werden kann, als gehe er ausschliesslich nur von diesem Punkte und zwar in der Richtung des Lothes aus. Man nennt ihn bekanntlich den Schwerpunkt. Wir waren schon öfter genöthigt auf denselben hinzuweisen, und haben deshalb auch schon früher (Nro. 69) die Gelegenheit wahrgenommen, seine Eigenschaften hervorzuheben und wenigstens für einige einfachere Fälle zu erklären.

Der Schwerpunkt von solchen Körpern, die kein sehr grosses Gewicht besitzen, lässt sich experimentel bestimmen. Wird nämlich ein Körper an einem Faden angehängt, so muss, nach der oben gegebenen Begriffsbestimmung, sobald Ruhe eingetreten ist, der Faden in die Richtung des Lothes, d. i. in die Richtung der Schwere eingetreten sein. Diese Linie verlängert gedacht muss also durch den Schwerpunkt gehen. Es bedarf demnach nur, nach einander zwei verschiedene Stellen des Körpers an dem Faden zu befestigen, um zwei gerade Linien ausfindig zu machen, die sich im Schwerpunkte durchschneiden müssen.

95 Ein durch den Schwerpunkt eines Körpers gehendes Loth nennt man seine Schwerlinie. Die Schwerlinien verschiedener Körper, die sich nahe bei einander befinden, laufen bekanntlich parallel. So weit sie zu einem und demselben zusammenhängenden Systeme gehören, kann man nach ihrem gemeinschaftlichen Stützpunkte fragen, der dann wieder ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt ist. So kann die Bestimmung des Schwerpunktes eine Aufgabe der Rechnung werden, welche also darauf hinausgeht, den Stützpunkt einer Anzahl paralleler Kräfte zu ermitteln.

96 Für den Fall, dass die Angriffspunkte sämmtlicher Kräfte in einer geraden Linie liegen, haben wir uns mit der Beantwortung dieser Frage bereits früher beschäftigt, und sind an jener Stelle (Nro. 71) zu dem Resultate gekommen, dass der Abstand des Schwerpunktes von einem beliebig gewählten Punkte der Linie ist

$$s = \frac{Pp + P'p' + P''p'' + \cdots}{P + P' + P'' + \cdots};$$

Gleichung, in welcher P, P', P'' u. s. f. die parallelen Kräfte, p, p' : p'' u. s. f. ihre Entfernungen von dem angenommenen Drehpunkte vorstellen.

97 Sind die Angriffsstellen der Kräfte nicht in einer geraden Linie, sondern in einer ebenen Fläche vertheilt, so lässt sich die Rechnung gleichwohl in ähnlicher Weise wie vorher durchführen. Man denke sich die Ebene horizontal gelegt und um eine horizontale Axe beweglich. Es seien p, p' u. s. w. die senkrechten Abstände der Angriffsstellen der Kräfte von dieser Axe, und s der Abstand des Schwerpunktes von derselben. Ferner sei S eine der Summe der Kräfte gleiche Kraft, welche im Schwerpunkte in entgegengesetztem Sinne wirksam, jene im Gleichgewicht halten muss. Man wird leicht erkennen, dass, sobald eine Drehung um die Axe erfolgt, die Arbeit der Kräfte genau dieselbe ist, als befänden sich ihre sämmtlichen Angriffspunkte bei gleicher senkrechter Entfernung von der Axe in einer geraden Linie, dass folglich die Summe der Arbeiten der Kräfte P, P' u. s. f. gleich ist der Arbeit der Kraft S oder dass

$$Ss = Pp + P'p' + P''p'' + \cdots$$

Der so gefundene Werth s giebt jedoch nicht genau die Stelle des Schwerpunktes, sondern nur die Lage einer geraden Linie, welche in dem Abstande s der Drehaxe parallel mit dieser geführt ist. Indem man aber dasselbe Verfahren mit Beziehung auf eine zweite Drehaxe etwa rechtwinklig zur ersten wiederholt, gelangt man zu einer zweiten Gleichung von der Form

$$Ss' = Pq + P'q' + P''q'' + \cdots,$$

in welcher q, q', q'' u. s. f. die senkrechten Abstände der Kräfte von der zweiten Axe, und s' den Abstand einer zweiten dieser Axe parallel geführten Linie vorstellen. Da beide Linien den Schwerpunkt enthalten, so muss derselbe mit ihrem Durchschnittspunkte zusammenfallen.

Zur vollständigen Kenntniss der Lage des Schwerpunktes gehört schliesslich noch diejenige seines Abstandes l vom Durchschnittspunkte der beiden Axen. Durchschneiden diese sich rechtwinklig, so ist

$$l = \sqrt{s^2 + s_{,}^2} \quad \text{und} \quad tng\, \alpha = \frac{s_{,}}{s}.$$

98 Wenn die Angriffsstellen der zu einem festen Systeme verbundenen parallelen Kräfte im Raume zerstreut liegen, so bedarf es zur genauen Feststellung der Lage des Schwerpunktes noch der Beziehung desselben auf eine dritte Drehaxe. Am bequemsten werden dann die drei Axen so ausgewählt, dass sie von einem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte ausgehend, als Coordinatenaxen X, Y und Z, ein körperliches Rechteck bilden. Sind die geradlinigten Entfernungen l, l', l'' u. s. w. der Angriffspunkte der Kräfte vom Durchschnittspunkte o der Drehaxen, sowie die Winkel bekannt, welche jede der Linien l mit den drei Axen einschliesst, so lassen sich zur Bestimmung des Ortes des Schwerpunktes die folgenden Gleichungen bilden (Nro. 92):

$$S = P + P' + P'' + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} S.s &= Pl\cos\alpha + P'l'\cos\alpha' + P''l''\cos\alpha'' + \cdots \\ S.s' &= Pl\cos\beta + P'l'\cos\beta' + P''l''\cos\beta'' + \cdots \\ S.s'' &= Pl\cos\gamma + P'l'\cos\gamma' + P''l''\cos\gamma'' + \cdots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2)$$

$$L = \sqrt{s^2 + s_{,}^2 + s_{,,}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\cos a = \frac{s}{L}, \qquad \cos b = \frac{s'}{L}, \qquad \cos c = \frac{s''}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ausserdem besteht für jede der Kräfte noch eine Bedingungsgleichung von der Form

$$1 = \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c.$$

Die Werthe s, s' und s'' bezeichnen die Abstände dreier Ebenen, gleichlaufend, die erste mit der Ebene der YZ, die zweite mit der Ebene der XZ, die dritte mit der Ebene XY. Ihr Durchschnittspunkt ist der Schwerpunkt.

Nehmen wir jetzt den Schwerpunkt selbst als Ursprung des Coordinatensystems, auf welches die Entfernungen l und die Winkel α, β, γ der parallelen Kräfte bezogen werden, so verschwindet in den Gleichungen (2) das Moment des Schwerpunktes und sie verwandeln sich in

$$0 = Pl\cos\alpha + P'l'\cos\alpha' + P''l''\cos\alpha'' + \cdots,$$

$$0 = Pl\cos\beta + P'l'\cos\beta' + P''l''\cos\beta'' + \cdots,$$

und $$0 = Pl\cos\gamma + P'l'\cos\gamma' + P''l''\cos\gamma'' + \cdots$$

Sämmtliche parallele Kräfte erhalten sich um den Schwerpunkt im Gleichgewichte.

Gesetzt, das Coordinatensystem ist so gelegt, dass die Ebene der XY mit der Horizontalebene gleichlaufend ist, und die parallelen Kräfte seien Gewichte, so bilden die Abstände $l\cos\alpha$, $l'\cos\alpha'$ u. s. f. die Hebelarme dieser Gewichte mit Bezugnahme auf die Axe der Y als Drehaxe, und es findet Gleichgewicht statt, weil nach Annahme

$$Pl\cos\alpha + P'l'\cos\alpha' + P''l''\cos\alpha'' + \cdots = 0.$$

Sobald der Körper, durch dessen Schwerpunkt die horizontale Axe oY gelegt ist, eine Drehung bis zu dem Bogen φ erfährt, verkürzen sich sämmtliche Hebelarme der Gewichte. Aus $l\cos\alpha$ wird $l\cos\alpha\sin\varphi$, aus $l'\cos\alpha'$ wird $l'\cos\alpha'\sin\varphi$ und so fort. Alle Theilsätze der Gleichung müssen also mit demselben Factor $\sin\varphi$ multiplicirt werden. Die Bedingungen der Gleichheit und folglich die des Gleichgewichtes in der veränderten Lage des Körpers bleiben davon unberührt. Dieselben Betrachtungen lassen sich bei jeder Drehung um den Schwerpunkt zur Geltung bringen. Nun besteht jeder Körper aus einer Summe paralleler Kräfte, d. h. schwerer Theile, deren Schwerlinien parallel laufen. Es erklärt sich hieraus in ganz allgemeiner Weise, warum Körper, die genau in ihrem Schwerpunkte gestützt sind, in jeder Lage um diesen Punkt herum im Gleichgewicht verharren.

Wenn ein Körper eine grosse Beweglichkeit um eine ihm gegebene horizontale Drehaxe besitzt, so erkennt man alsbald, ob letztere durch den Schwerpunkt geht. Ist es nicht der Fall, so macht der Körper bei erlöschender Rotation eine Reihe von Schwingungen, und kommt schliesslich immer in derselben Lage zur Ruhe, der einzigen, in welcher der Schwerpunkt kein Moment hat, nämlich in der lothrechten Stellung desselben unter der Drehaxe. Von rotirenden Körpern, deren Drehaxe nicht genau durch den Schwerpunkt geht, sagt man, sie haben Ueberwucht. Man bemerkt dieses sehr häufig bei Rollen, Wagenrädern, Mühlrädern u. s. w.

Die Rolle einer Atwood'schen Fallmaschine darf keine Ueberwucht besitzen; ist es gleichwohl der Fall, so muss sie verworfen werden.

99 Bei manchen Körpern erkennt man die Lage des Schwerpunktes auf den ersten Blick, in so weit wenigstens als die Annahme berechtigt ist, dass gleiche Raumtheile ihrer Masse allenthalben gleiches Gewicht besitzen. So ist es augenscheinlich, dass dünne prismatische und cylindrische Stäbe sich um ihren Mittelpunkt, als Drehpunkt, im Gleichgewicht halten müssen. Auch der Schwerpunkt kreisförmiger Scheiben und kugelförmig gestalteter Körper fällt mit ihrem Mittelpunkte zusammen. Der Schwerpunkt eines Parallelogrammes ist der Durchschnittspunkt seiner beiden Diagonalen; der eines Parallelepipedons fällt in die Mitte der geraden Linie, welche die Schwerpunkte seiner beiden Basen verbindet; der eines Cylinders liegt in der Mitte seiner Axe.

Alle Körper, deren Rauminhalt durch Rotation einer Linie oder einer Fläche um eine feste Axe herum vorgezeichnet ist, haben ihren Schwerpunkt in dieser Axe.

Oft kommt es vor, dass der Schwerpunkt in dem mit Stoff erfüllten Raume eines Körpers gar nicht enthalten ist. So bei Ringen, hohlen Cylindern, Hohlkugeln u. s. w. Soll ein derartig gelegener Schwerpunkt als Stützpunkt oder als Angriffspunkt thätiger Kräfte benutzt werden, so muss selbstverständlich eine feste Verbindung desselben mit den materiellen Theilen vorausgehen, wie bei Wagen- und Mühlrädern durch Nabe und Speichen.

100 Treten mehrere Körper oder Körpertheile, deren Gewichte sowie die Lage ihrer Schwerpunkte bekannt sind, zu einem festen Systeme zusammen, so lässt sich ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt mit Hülfe der vorher gegebenen Regeln durch Rechnung bestimmen.

Es seien z. B. drei dünne Stäbe $BC = a$, $AC = b$ und $AB = c$ (Fig. 74, a. f. S.) zu einem Dreiecke verbunden, und ihre entsprechenden Gewichte P, Q und R je in der Mitte der Stäbe angenommen. Nimmt man die Linie BC als Drehaxe und Winkel $ACB = C$, so ist, da die Höhe $Ad = b \sin C$, der Abstand des Schwerpunktes von der Linie BC,

$$s = \frac{(Q + R)\, b \sin C}{2\,(P + Q + R)}.$$

Ebenso findet man den Abstand des Schwerpunktes von der Linie $A\,C$,

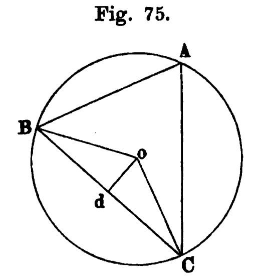
$$s' = \frac{(P + R)\, a \sin C}{2\,(P + Q + R)}.$$

Sind die drei Seiten des Dreiecks und deren Gewicht einander gleich, so ist auch $s = s' = \frac{a \sin 60^0}{3}$.

Wenn die drei Dreieckseiten (Fig. 74) auf den Punkten A, B und C als Stützen ruhen; so trägt der Punkt A die Hälfte der Gewichte Q und R, der Punkt B die Hälfte der Gewichte P und R, der Punkt C die Hälfte der Gewichte P und Q.

Fig. 74.

Fig. 75.



Haben die drei Stützen ausserdem das Gewicht einer kreisförmigen Scheibe, z. B. einer Tischplatte, zu tragen, deren Schwerpunkt in gleicher Entfernung von den Stützpunkten gelegen ist, so befinden sich diese in der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt mit dem Schwerpunkte zusammenfällt. Es ist daher $B\,o = C\,o = r$ (Fig. 75); Winkel $B\,o\,C$ als Centriwinkel gleich zweimal $B\,A\,C = 2\,A$, und das Perpendikel

$$d\,o = B\,d \,.\, \cot B\,o\,d = \frac{a}{2} \cot A.$$

Um den Druck d zu bestimmen, welchen das im Punkte o concentrirte Gewicht S auf die Stütze A ausübt, setzen wir mit Beziehung auf $B\,C$ als Drehaxe:

$$D \,.\, c \sin B = S\,\frac{a \cot A}{2}.$$

Auf dieselbe Weise lässt sich der Druck auf die Stützen B und C ausfindig machen.

Wenn der Platte vier Stützen gegeben sind, so lässt sich die Grösse des Druckes auf jede einzelne derselben nicht mehr genau bestimmen, weil schon drei, die nicht in derselben geraden Linie liegen, zur festen Unterstützung ausreichend sind. Mit anderen Worten: die Bedingungen des Gleichgewichtes einer Anzahl paralleler Kräfte in der Ebene sind durch drei Gleichungen erschöpft, nämlich zwei, welche die Beziehungen der Kräfte zu den Coordinatenaxen darstellen, und eine dritte, welche aussagt, dass die Summe der Kräfte gleich ist dem gegen den Schwer-

punkt ausgeübten Drucke. Sind also mehr als drei Unbekannte vorhanden, so wird die Aufgabe unbestimmt; es sei denn, dass sich durch Hinzuziehung weiterer, mit der Frage des Schwerpunktes in keiner nothwendigen Abhängigkeit stehender Bedingungen noch andere Gleichungen aufstellen liessen.

101 Die Schwerpunkte aller solcher Körper, deren Gestalt geometrisch bestimmbar ist, können sowohl durch Construction wie durch Rechnung ermittelt werden. Es bedarf dazu in sehr vielen Fällen nur ganz elementarer Hülfsmittel.

So muss der Schwerpunkt eines ebenen Dreiecks unzweifelhaft in der von einem Ecke nach der Mitte der gegenüberliegenden Seite geführten Geraden liegen, denn durch letztere wird jede mit der betreffenden Dreieckseite im Dreiecke gezogene Parallele in zwei gleiche Theile geschnitten. Verbindet man daher die Mitten zweier Dreieckseiten mit den gegenüberliegenden Ecken durch gerade Linien, so muss ihr Durchschnittspunkt der Schwerpunkt sein.

Auf diese Weise sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 76) der Schwerpunkt s gefunden worden. Da der Punkt d in der Mitte von AC, der Punkt e in der Mitte von BC liegt, so ist die Linie ed der Seite AB gleichlaufend und an Grösse $= \frac{AB}{2}$. Hieraus folgt, dass Winkel $sed = sAB$ und $sde = sBA$, und dass ferner in den Dreiecken sde und sAB die Seiten $de : AB = se : sA = sd : sB$. Nun ist $de = \frac{AB}{2}$; es ist folglich auch $se = \frac{sA}{2} = \frac{Ae}{3}$. Weiter folgt, dass in jedem Dreiecke der Schwerpunkt, von irgend einer der Seiten als Basis genommen, in einem Drittel der Höhe liegt.

Fig. 76.

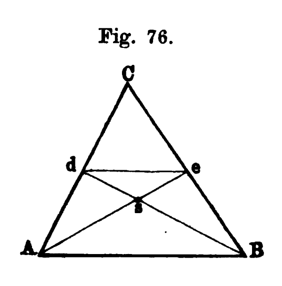
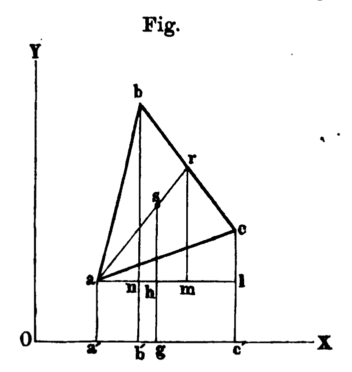


Fig.



Um die Lage des Schwerpunktes eines Dreiecks zu zwei Coordinatenaxen bestimmen zu können, müssen wenigstens die Coordinaten der drei Ecken bekannt sein. Es sei abc (Fig. 77) das in der Ebene oYX gele-

gene Dreieck, $a a'$, $b b'$ und $c c'$ die Ordinaten seiner Eckpunkte, s der Schwerpunkte, so ist $r b = r c$ und $s r = {}^1/_3\, a r$; ferner (als arithmetische Mittlere) $r m = \frac{b n + c l}{2} = \frac{b b' + c c' - 2 \,.\, a a'}{2}$. Da nun $s h = {}^2/_3\, r m = \frac{b b' + c c' - 2 \,.\, a a'}{3}$, so ergiebt sich die Ordinate

$$s g = s h + a a' = \frac{a a' + b b' + c c'}{3}.$$

Die Abscisse des Schwerpunktes auf demselben Wege bestimmt, ist

$$o g = \frac{o a' + o b' + o c'}{3}.$$

102 Eine jede ebene, von geraden Linien begränzte Figur ist in Dreiecke zerlegbar, deren Anzahl derjenigen der Seiten der Figur weniger zwei gleichkommt. Die Bestimmung der Lage ihres Schwerpunktes durch Rechnung ist also in allen Fällen ausführbar. Wir wollen beispielsweise den Schwerpunkt eines Paralleltrapezes $a b c d$ (Fig. 78) aufsuchen, dessen Basis $a b$ als Abscissenaxe gelten mag. Es sei $a b = a$; $d c = b$; $a d = c$ und Winkel $d a b = \alpha$. Daher die Höhe $d x = c \sin \alpha$ und $d y = c \cos \alpha$. Der Flächeninhalt der ganzen Figur, als Ausdruck ihres Gewichtes, ist $F = (a + b) \frac{c \sin \alpha}{2}$.

Fig. 78.

Theilen wir das Trapez durch die Diagonale $a c$ in die beiden Dreiecke $a d c$ und $a c b$, deren Flächeninhalte sind $b\, \frac{c \sin \alpha}{2}$ und $a\, \frac{c \sin \alpha}{2}$.

Das Moment des Vierecks, bezogen auf die eine oder andere der Axen, ist gleich der Summe der Momente der beiden Dreiecke. Nun sind die Coordinaten des Schwerpunktes des Dreiecks $a d c$, nach der vorher (Nro. 101) angegebenen Regel bestimmt,

$$y = \frac{2 c \sin \alpha}{3} \text{ und } x = \frac{c \cos \alpha + c \cos \alpha + b}{3} = \frac{b + 2 c \cos \alpha}{3};$$

und ebenso die Coordinaten des Dreiecks $a c b$,

$$y' = \frac{c \sin \alpha}{3} \text{ und } x' = \frac{a + b + c \cos \alpha}{3}.$$

Es ist daher, indem die Coordinaten des gesuchten Schwerpunktes mit Y und X bezeichnet werden,

$$(a + b)\frac{c \sin \alpha}{2} Y = b \frac{c \sin \alpha}{2} \cdot \frac{2 c \sin \alpha}{3} + a \frac{c \sin \alpha}{2} \cdot \frac{c \sin \alpha}{3}$$

und

$$Y = \frac{a + 2b}{3(a + b)} c \sin \alpha.$$

Sodann

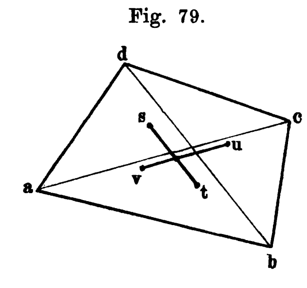
$$(a + b)\frac{c \sin \alpha}{2} X = b \frac{c \sin \alpha}{2} \times \frac{b + 2c \cdot \cos \alpha}{3} + a \frac{c \sin \alpha}{2} \times \frac{a + b + c \cos \alpha}{3}$$

und

$$X = \frac{a^2 + ab + b^2 + (a + 2b) c \cos \alpha}{3(a + b)}.$$

103 Der Schwerpunkt eines beliebigen Vierecks (Fig. 79) kann auf folgende Weise geometrisch gefunden werden. Man ziehe die Diagonale ac und bestimme die Schwerpunkte s und t der beiden Dreiecke abc und adc. Ihre Verbindungslinie st enthält den Schwerpunkt des Vierecks. Man ziehe dann auch die zweite Diagonale db und bilde dadurch die Dreiecke bad und bcd. In der Verbindungslinie uv ihrer Schwerpunkte muss ebenfalls der Schwerpunkt des Vierecks enthalten sein. Der Durchschnittspunkt der beiden Linien st und uv ist folglich der gesuchte Schwerpunkt.

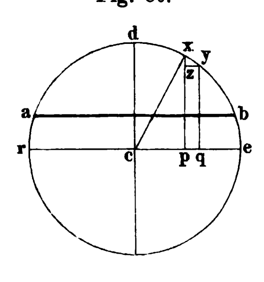
Fig. 79.



Nach demselben Verfahren lässt sich der Schwerpunkt einer jeden vieleckigen Figur bestimmen. Aber freilich wird die Construction um so weitläuftiger, je mehr Seiten das Vieleck hat.

104 Krumme Linien lassen sich immer als Aneinanderreihungen sehr kurzer Stücke von geraden Linien betrachten. Die Berechnung des Schwerpunktes einer Curve läuft daher im Allgemeinen darauf hinaus, die Summe der Momente einer unendlich grossen Anzahl gerader Linien, oder richtiger Linienelemente festzustellen, und diese Summe dann dem Momente des Schwerpunktes gleichzusetzen. Auf den Kreisbogen lässt sich dieses Verfahren wegen der vollkommenen Gleichförmigkeit seiner Krümmung in sehr einfacher Weise in Anwendung bringen.

Fig. 80.



Es soll der Schwerpunkt eines Bogens adb (Fig. 80) aufgesucht werden. Man bestimme den Kreismittelpunkt c, ziehe von demselben senkrecht gegen die Bogensehne ab den Halbmesser $cd = r$ und gleichlaufend mit ab den Durchmesser rce. Man wähle die Linien ce und cd als Coordinatenaxen. Von der letztern wird der Bogen in zwei genau gleiche Stücke geschnit-

ten; der Schwerpunkt muss folglich in derselben liegen. Es erübrigt noch seinen Abstand vom Mittelpunkte c kennen zu lernen.

Man denke sich den Bogen von d aus nach beiden Seiten in seine Elemente zerlegt; xy sei ein solches, und xp sein Abstand vom Kreisdurchmesser re; so ist mit Beziehung auf re als Drehaxe: $xy \, . \, xp$ das Moment des Bogenelementes xy.

Fig. 80.

Wird der Halbmesser cx und dann die Gerade yz gleichlaufend mit ab gezogen, so entstehen die ähnlichen Dreiecke xyz und xcp, deren ähnlich liegende Seiten proportional sind. Man darf daher setzen:

$$xy : yz = cx : xp,$$

worans folgt:

$$xy \, . \, xp = yz \, . \, cx = pq \, . \, r;$$

mit Worten ausgedrückt: das Moment eines beliebigen Bogenelementes ist gleich dem Producte der Multiplication des Kreishalbmessers mit einem dem Elemente entsprechenden Abschnitt des Kreisdurchmessers oder auch der Bogensehne. (Die Linie pq kann man auch als die Projection des Bogenelementes auf die Sehne bezeichnen.)

Da diese Folgerung für jedes Bogenelement mit gleichem Rechte Geltung hat, so ist jetzt leicht zu erkennen, dass die Summe der Momente aller Bogenelemente, d. h. das Moment des ganzen Bogens gleich ist seiner Sehne multiplicirt mit dem Kreishalbmesser, oder gleich $r \, . \, ab$. Da nun dieses Moment auch dem Producte vom Gewichte des Bogens in den Abstand s seines Schwerpunktes vom Mittelpunkte gleich sein muss, so ergiebt sich, dass

$$s = \frac{r \, . \, ab}{\text{Bogen } adb}.$$

Setzen wir den Bogen $adb = r\varphi$, so ist die Sehne $ab = 2r \sin {}^1/_2 \varphi$, folglich

$$s = \frac{2r \, . \, r \sin {}^1/_2 \varphi}{r\varphi} = \frac{2r \sin {}^1/_2 \varphi}{\varphi}.$$

Im Sinne unseres Verfahrens gilt φ für jeden Bogen zwischen 0 bis 180°. Der Schwerpunkt eines Bogens von mehr als 180° ergiebt sich aus der Erwägung, dass die Sehne ab den Kreis in zwei Stücke theilt, deren Gewichte einander um den Durchmesser re im Gleichgewicht halten, deren Momente folglich gleich sind. Es ist daher $r(2\pi - \varphi)s' = r\varphi s$, folglich auch

$$r(2\pi - \varphi) s' = 2rr \sin {}^1/_2 \varphi$$

und

$$s' = \frac{2r \sin {}^1/_2 \varphi}{2\pi - \varphi}.$$

Indem man für φ nach einander die folgenden Werthe in die Gleichung einsetzt, berechnen sich die unter s angegebenen Abstände des Schwerpunktes:

$$\varphi = {}^1/_3\,\pi; \quad s = \frac{3\,r}{\pi} \quad = 0{,}9554\,r,$$

$$= {}^1/_2\,\pi; \quad = \frac{2\,r\sqrt{2}}{\pi} = 0{,}9008\,r,$$

$$= \pi; \quad = \frac{2\,r}{\pi} \quad = 0{,}6370\,r,$$

$$2\,\pi - \varphi = {}^3/_2\,\pi; \quad = \frac{2\,r\sqrt{2}}{3\,\pi} = 0{,}3003\,r.$$

Wird der Schwerpunkt der ganzen Kreisperipherie gesucht, so hat man $2\,\pi - \varphi = 2\,\pi$ also $\varphi = 0$ zu setzen. Es ist dann auch $\sin {}^1/_2\,\varphi = 0$ und $s = 0$, wie es sein muss, da in diesem Falle der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte zusammenfällt.

105 Kreisausschnitte kann man sich als Zusammensetzungen gleichschenklicher und gleichhoher Dreiecke vorstellen, deren Basen durch Bogenelemente gebildet sind und deren Scheitelpunkte in dem Kreismittelpunkte zusammenfallen. Die Schwerpunkte aller dieser Dreiecke liegen daher, vom Scheitelpunkte des Ausschnittes an gerechnet, im Abstande ${}^2/_3\,r$. Wenn man demnach in einem beliebigen Ausschnitte $a\,c\,b$ (Fig. 81) vom Punkte c als Mittelpunkt den Kreisbogen $p\,q$ mit dem Halbmesser $p\,c = {}^2/_3\,a\,c = {}^2/_3\,r$ zieht, so kann man diesen Bogen als eine schwere Linie ansehen, in welcher das ganze Gewicht des Ausschnittes vereinigt und über alle Punkte derselben gleichförmig vertheilt ist. Der Schwerpunkt des Bogens $p\,q$ ist also gleichbedeutend mit dem des Ausschnittes $a\,c\,b$.

Fig. 81.

Setzt man den Bogen $a\,d\,b = r\,\varphi$, so ist Bogen $p\,q = {}^2/_3\,r\,\varphi$ und Sehne $p\,q = {}^2/_3 \,.\, 2\,r \sin {}^1/_2\,\varphi$; folglich der Abstand des gesuchten Schwerpunktes (des Ausschnittes) vom Kreismittelpunkte an und in der Linie $c\,d$ gerechnet (104),

$$s = {}^2/_3\,\frac{2\,r \sin {}^1/_2\,\varphi}{\varphi}.$$

Z. B. der Schwerpunkt eines Ausschnittes von 60^0 oder $\varphi = {}^1/_3\,\pi$, liegt in der Entfernung $s = \frac{2\,r}{\pi} = 0{,}637\,r$ vom Kreismittelpunkte; der Schwerpunkt des Halbkreises (d. h. wenn $\varphi = \pi$ gesetzt wird) befindet sich in der Höhe von $s = \frac{4\,r}{3\,\pi} = 0{,}424\,r$ über dem zugehörigen Kreisdurchmesser $r\,e$.

Will man den Schwerpunkt eines zwischen zwei concentrischen Bögen adb und pq (Fig. 81), sowie zwei Halbmessern ac und bc liegenden Stückes einer Kreisfläche ausfindig machen, so kann man berücksichtigen, dass das Moment dieses Ringstückes, bezogen auf den Kreisdurchmesser re gleich ist dem Unterschiede der Momente der Ausschnitte acb und pcq.

Setzen wir $ac = r$ und $pc = r'$, so ist der Flächeninhalt,

als Gewichtsausdruck des Ausschnittes $acb = {}^1/_2\, r^2 \varphi$,

der Flächeninhalt des Ausschnittes $pcq = {}^1/_2\, r_,^2 \varphi$,

und der Unterschied beider, d. h. der Flächeninhalt des Ringstückes $= {}^1/_2\, \varphi\, (r^2 - r_,^2)$. Folglich das Moment des letztern

$$^1/_2\, \varphi\, (r^2 - r_,^2)\, s = {}^1/_2\, r^2 \varphi \times \frac{4\, r \sin {}^1/_2\, \varphi}{3\, \varphi} - {}^1/_2\, r_,^2 \varphi \times \frac{4\, r_, \sin {}^1/_2\, \varphi}{3\, \varphi}$$

$$= {}^1/_2\, \varphi\, \frac{4 \sin {}^1/_2\, \varphi}{3\, \varphi}\, (r^3 - r_,^3)$$

und

$$s = \frac{4 \sin {}^1/_2\, \varphi}{3\, \varphi} \times \frac{r^3 - r_,^3}{r^2 - r_,^2}.$$

Z. B. für $\varphi = \pi$ wird $s = 0{,}4244\, \frac{r^3 - r_,^3}{r^2 - r_,^2}$.

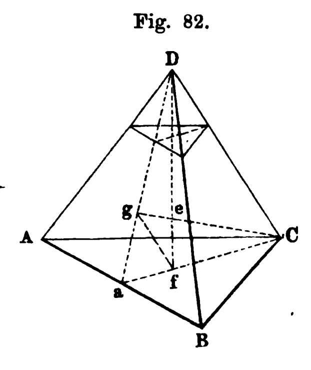
Aehnliche Betrachtungen leiten zur Bestimmung des Schwerpunktes eines Kreissegmentes, sowie eines zwischen zwei Parallelen liegenden Bandes der Kreisfläche.

106 Der Schwerpunkt eines Cylindermantels, d. h. des gekrümmten Theils der Oberfläche eines Cylinders liegt in der Mitte der Cylinderaxe, und fällt mit dem einer Kreisperipherie zusammen, gebildet durch einen Durchschnitt, den man parallel mit der Basis des Cylinders durch die Mitte seiner Axe geführt hat. Denn in dieser Peripherie kann man sich das ganze Gewicht des Mantels gleichsam verdichtet vorstellen. Aus eben diesem Grunde hat man den Schwerpunkt von Abtheilungen dieser Oberfläche, die von je zweien mit der Axe parallel geführten geraden Linien begränzt sind, d. h. den Schwerpunkt von Streifen des Cylindermantels, als übereinstimmend mit dem von Bogenstücken jener Peripherie, die zwischen denselben geraden Linien liegen, zu betrachten. Z. B. der Schwerpunkt des halben Cylindermantels liegt in einer durch die Mitte der Axe, parallel mit der Basis gelegten Ebene, in der Entfernung $s = \frac{2\, r}{\pi}$ von der Mitte. Es ist leicht einzusehen, dass der Schwerpunkt eines Ausschnittes der Cylindermasse sich auf ähnlichem Wege bestimmen lässt; dass z. B. der Schwerpunkt eines Halbcylinders in der Mitte seiner Höhe und in dem Abstande $s = \frac{4\, r}{3\, \pi}$ von der Axe liegt.

Die Kegeloberfläche, gleichwie jeder Ausschnitt derselben ist aus gleich hohen Dreiecken zusammengesetzt, die Bogenelemente zur Basis haben, und deren Spitzen sich in dem Scheitelpunkte des Kegels vereinigen. Es folgt hieraus, dass der Schwerpunkt eines Ausschnittes oder auch des ganzen Kegelmantels in $^1/_3$ der Kegelhöhe liegt, und zwar an gleicher Stelle mit dem eines Kreisbogens, der parallel mit der Basis des Kegels durch die Kegelkrümmung in der erwähnten Höhe gegeben ist.

107 Pyramidal und kegelartig gestaltete Körper haben ihren Schwerpunkt in $^1/_4$ der Höhe. Betrachten wir, um dies zu beweisen, zunächst eine dreiseitige Pyramide $ABCD$ (Fig. 82). Es sei ABC die Basis derselben. Man ziehe aus der Mitte a der Seite AB dieses Dreiecks die Geraden aC und aD, und nehme af gleich $^1/_3\, aC$, $ag = {^1/_3}\, aD$. Es ist f der Schwerpunkt des Dreiecks ABC (Nro. 101), der Basis unserer Pyramide, g der Schwerpunkt des Dreiecks ABD, der einen Seitenfläche dieser Pyramide. Eine Linie fD vom Schwerpunkte der Basis gegen den Scheitel der Pyramide geführt, muss den Schwerpunkt dieses Körpers enthalten. Denn wenn man auf den drei Seitenflächen der Pyramide in beliebiger Höhe Parallele zu den drei Seiten der Basis zieht, so werden Dreiecke umgränzt, welche der Basis ähnlich sind und durch die Ebene DaC gleich wie die Basis selbst in gleich grosse Stücke geschnitten werden, deren Theilungslinien durch die Linie fD in ungleiche Stücke zerlegt werden, die sich verhalten müssen wie $af : fC$ also wie $1 : 2$. Die Linie fD geht also durch die Schwerpunkte aller dieser ähnlichen Dreiecke, die in ihrer Gesammtmenge gleichsam die Pyramide zusammensetzen; sie geht folglich durch den Schwerpunkt der Pyramide selbst.

Fig. 82.



Aus denselben Gründen muss letzterer in der Linie gC enthalten sein. Der Durchschnittspunkt e der beiden Linien fd und gc muss folglich der gesuchte Schwerpunkt sein.

Indem man die Punkte f und g durch eine gerade Linie verbindet, entsteht das Dreieck afg, welches aCD ähnlich ist. Denn beide Dreiecke haben den Winkel bei a gemeinschaftlich, und zufolge der Construction verhält sich $af : ag = aC : AD$. Es ist $af = {^1/_3}\, aC$, daher auch $gf = {^1/_3}\, DC$. Zudem sind beide Linien gleichlaufend; woraus sich weiter ergiebt, dass einerseits die Winkel gfe und fDC, andererseits die Winkel fge und gCD als Wechselwinkel einander gleich, somit die Dreiecke fge und DCe einander ähnlich sind. In ähnlichen Dreiecken sind die ähnlich liegenden Seiten proportional, daraus folgt endlich

$$ef : eD = fg = DC = 1 : 3,$$

oder auch

$$ef = {}^1/_3\, eD = {}^1/_4 fD.$$

Das vom Scheitelpunkte D gegen die Basis der Pyramide herabgesenkte Loth wird von einer durch den Punkt e gelegten wagerechten Ebene in zwei Abtheilungen gebracht, die sich verhalten müssen wie $fe : eD$. Es ist also der lothrechte Abstand des Schwerpunktes von der Basis gleich $^1/_4$ der Höhe der Pyramide.

Jede vier- oder mehrseitige Pyramide kann in eine Anzahl dreiseitiger, sämmtlich von gleicher Höhe zerlegt werden. Da nun alle diese ihre Schwerpunkte in $^1/_4$ der Höhe, also in gleicher Höhe haben, so muss auch ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt in $^1/_4$ der Höhe liegen. Dasselbe gilt für Kegel jeder Art, da man sie ebenfalls als eine Zusammensetzung zahlloser dreiseitiger Pyramiden ansehen kann.

Es ist klar, dass zur genauen Bestimmung der Lage des Schwerpunktes von Pyramiden und Kegeln man nur den Schwerpunkt der Basis mit dem Scheitelpunkte durch eine Gerade zu verbinden, und von dieser, von der Basis an gerechnet, den vierten Theil zu nehmen hat.

108. Aufgabe. Es ist die Lage des Schwerpunktes eines abgestutzten Kegels zu bestimmen, wenn dessen Höhe h sowie die Durchmesser R und r der untern und obern Basis gegeben sind. Der gesuchte Punkt befindet sich, wie leicht zu sehen, in der Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Basen. Es handelt sich also nur noch um die Berechnung seines Abstandes von der Grundfläche. Bezeichnen wir zu diesem Zwecke die Höhe des fehlenden Kegelstückes mit x, also den Abstand seines Schwerpunktes von der Grundfläche mit $h + \frac{x}{4}$, die Höhe des ganzen Kegels mit $h + x$, und demgemäss den Abstand seines Schwerpunktes mit $\frac{h + x}{4}$; ferner das Gewicht des ganzen Kegels mit K, das des fehlenden Stückes mit k, endlich das Gewicht des abgestutzten Kegels mit $K - k$, so ist

$$(K - k)\, s = K \frac{h + x}{4} - k\left(h + \frac{x}{4}\right).$$

Nun verhält sich $K : k = R^3 : r^3$, woraus folgt:

$$k = K \frac{r^3}{R^3} \quad \text{und} \quad K - k = K \frac{R^3 - r^3}{R^3}.$$

Indem man diese Werthe in die Gleichung einsetzt, dann den gemeinschaftlichen Factor K ausscheidet, verwandelt sie sich in

$$\frac{R^3 - r^3}{R^3}\, s = \frac{h + x}{4} - \frac{r^3}{R^3}\left(h + \frac{x}{4}\right),$$

wofür auch gesetzt werden kann:

$$4\,(R^3 - r^3)\,s = R^3\,(h + x) - r^3\,(4\,h + x)$$
$$= h\,R^3 - 4\,h\,r^3 + (R^3 - r^3)\,x.$$

Der Werth von x lässt sich aus der Betrachtung ableiten, dass

$$x : h + x = r : R, \text{ folglich } x = \frac{h\,r}{R - r}.$$

Indem auch dieser Ausdruck an die Stelle von x und dann

$$\frac{R^3 - r^3}{R - r} = R^2 + R\,r + r^2$$

gesetzt wird, erhält man

$$4\,(R^3 - r^3)\,s = h\,(R^3 - 4\,r^3 + R^2\,r + R\,r^2 + r^3)$$

und

$$s = \frac{h}{4}\,\frac{R^4 - 3\,r^3 + R^2\,r + R\,r^2}{R^3 - r^3}.$$

Endlich, indem Zähler und Nenner durch $R - r$ dividirt wird

$$s = \frac{h}{4}\,\frac{R^2 + 2\,R\,r + 3\,r^2}{R^2 + R\,r + r^2}.$$

Ein Ausdruck genau von derselben Gestalt belehrt über die Lage des Schwerpunktes eines Pyramiden-Stumpfes, wenn neben seiner Höhe das Grössenverhältniss der Grundfläche und Oberfläche durch die Länge von zwei ähnlich liegenden Seiten gegeben ist.

109 Geometrisch bestimmbare Körper aller Art lassen sich in Pyramiden oder Kegel auflösen, und bieten dadurch ein Hülfsmittel die Lage ihrer Schwerpunkte zu berechnen. Selbst auf Körper mit gekrümmter Oberfläche ist diese Betrachtungsweise anwendbar, indem man sich dieselben aus Kegeln mit elementarer Grundfläche zusammengesetzt denkt. Hier sollen nur noch die in mehrfacher Beziehung bemerkenswerthen Schwerpunktsverhältnisse sowohl der Kugel wie von Theilen der Kugel hervorgehoben werden.

Der Schwerpunkt der ganzen Kugel sowie der ihrer Schale (Oberfläche) fällt, wie wir wissen, mit ihrem Mittelpunkte zusammen.

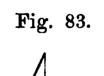
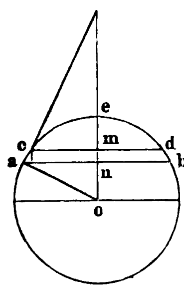


Fig. 83.



Bei Abschnitten und Zonen der Kugeloberfläche findet sich der Schwerpunkt genau in der Mitte der Höhe. Dies lässt sich auf folgende Weise darthun. Man denke sich unter $a\,b\,c\,d$ (Fig. 83) einen vom Kugelmittelpunkte o ausgeführten senkrechten Durchschnitt einer Kugelzone, unter $o\,e$ ein ebenfalls von o aus gegen die beiden die Zone begränzenden Kreisflächen gefälltes Loth. Da dieses durch die Mittelpunkte beider Kreise geht, so muss der Schwerpunkt der Zone nothwendig zwischen m und n liegen. Es sei $a\,o = r$, Winkel $a\,o\,e = \frac{1}{2}\,\varphi$, daher $a\,b = 2\,r\,sin\,\frac{1}{2}\,\varphi$ und die Peripherie der kreisförmigen Grundfläche der Zone $= 2\,r\,\pi\,sin\,\frac{1}{2}\,\varphi$.

Nimmt man die Höhe $mn = h$ der Zone so gering an, dass ac als gerade Linie gelten kann, so ist $ac = \frac{h}{\sin {}^1/_2 \varphi}$; und da unter dieser Voraussetzung ab und cd um keine messbare Grösse verschieden sein können, so darf die durch Umdrehung von ac um die Linie mn als Drehaxe erzeugte Fläche der Zone als Cylinderfläche angesehen werden. Ihr Inhalt ist folglich

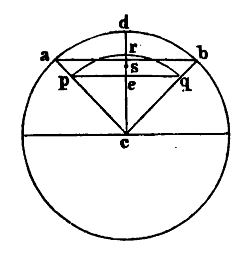
$$\pi . ab . ac = 2 \pi r \sin {}^1/_2 \varphi \times \frac{h}{\sin {}^1/_2 \varphi} = 2 r \pi h.$$

Da dieses Resultat an keine bestimmte Lage einer Kugelzone geknüpft ist, so gilt es für alle, ob näher oder weiter von der Mitte der Kugel liegend; es gilt also auch für eine Summe aneinander gereihter Zonen, d. h. für solche von messbarer Höhe. Wenn man daher durch die Mitte der Höhe einer Kugelzone eine ihren beiden ebenen Gränzflächen gleichlaufende Ebene führt, so schneidet diese die Zone in zwei Theile von gleichem Flächeninhalte, oder als Körper betrachtet, von gleichem Gewichte, je in gleichem Abstande von der Mitte. Die Mitte der Höhe muss folglich der Schwerpunkt sein.

Diese Folgerung gilt mit gleichem Rechte für Segmente der Kugeloberfläche, z. B. für die Oberfläche einer Halbkugel, deren Schwerpunkt also in der Mitte des vom Centrum gegen den Scheitel der Halbkugel gezogenen Radius liegt.

110 Einen Kugelausschnitt kann man sich aus unendlich vielen Kegeln zusammengesetzt vorstellen, deren Scheitel sämmtlich im Kugelmittelpunkte zusammentreffen, und deren Grundflächen aus Elementen der Kugeloberfläche gebildet sind. Die Schwerpunkte aller dieser Kegel fallen in ein Segment einer Kugeloberfläche, deren Halbmesser $= {}^3/_4 r$ (Nro. 107). Der Schwerpunkt eines Kugelausschnittes muss folglich dem eines Stückes Kugelfläche von gleicher Winkelweite und ${}^3/_4 r$ Radius gleich sein.

Fig. 84.



Der Raum eines Kugelausschnittes wird umschrieben, wenn ein beliebiger Kreisausschnitt acd (Fig. 84) in rotirender Bewegung um eine seiner Seiten, z. B. um die Seite cd versetzt wird. Dabei beschreibt die rotirende Seite $ac = r$ eine Kegeloberfläche, der rotirende Bogen ad eine Kugelsegmentoberfläche. Ein ähnliches Segment bildet gleichzeitig der Bogen pr, dessen Radius $pc = {}^3/_4 r$. Der Schwerpunkt des letztern ist zugleich derjenige des Ausschnittes. Er findet sich, wie vorher gezeigt wurde, in s, so dass $se = \frac{re}{2}$ = der halben Höhe des betreffenden Segmentes der Kugeloberfläche.

Es sei Winkel $acd = {}^1/_2\,\varphi$, so ist, da $rc = pc = {}^3/_4\,r$, die Höhe des Dreiecks pcq nämlich $ce = {}^3/_4\,r \cos {}^1/_2\,\varphi$, die Höhe des Segmentes $re = rc - ce = {}^3/_4\,r\,(1 - \cos {}^1/_2\,\varphi)$; ferner

$$se = \frac{re}{2} = {}^3/_8\,r\,(1 - \cos {}^1/_2\,\varphi)$$

und endlich der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte

$$sc = se + ec = {}^3/_8\,r\,(1 - \cos {}^1/_2\,\varphi) + {}^6/_8\,r \cos {}^1/_2\,\varphi$$
$$= {}^3/_8\,r\,(1 - \cos {}^1/_2\,\varphi + 2 \cos {}^1/_2\,\varphi) = {}^3/_8\,r\,(1 + \cos {}^1/_2\,\varphi).$$

Z. B. der Schwerpunkt der Halbkugel, da in diesem Falle ${}^1/_2\,\varphi = 90^0$, also $\cos {}^1/_2\,\varphi = 0$, ist $s = {}^3/_8\,r$.

Um den Schwerpunkt eines Stückes der Kugelmasse zu ermitteln, dessen Rauminhalt durch Rotation der Fläche $aprd$ um die Linie rd beschrieben wird, das also zwischen zweien concentrischen Kugeloberflächensegmenten von gleicher Winkelweite, aber ungleichen Kugelhalbmessern liegt, setze man das Moment dieses Stückes, bezogen auf den Mittelpunkt c, gleich dem Unterschiede der Momente der beiden zugehörigen Kugelausschnitte. Nun verhalten sich die Gewichte beider Ausschnitte

$$p : p' = r^3 : r_,^3, \quad \text{daher ist} \quad p' = p\,\frac{r_,^3}{r^3}$$

und der Unterschied

$$p - p' = p\,\frac{r^3 - r_,^3}{r^3}.$$

Da nun die Abstände der Schwerpunkte beider Ausschnitte, und zwar der des grössern

$$s = {}^3/_8\,r\,(1 + \cos {}^1/_2\,\varphi),$$

der des kleinern

$$s_, = {}^3/_8\,r'\,(1 + \cos {}^1/_2\,\varphi)$$

bekannt sind, so hat man, wenn der Abstand des gesuchten Schwerpunktes vom Mittelpunkte mit S bezeichnet wird,

$$\frac{r^3 - r_,^3}{r^3}\,S = {}^3/_8\,r\,(1 + \cos {}^1/_2\,\varphi) - {}^3/_8\,r_,\,(1 + \cos {}^1/_2\,\varphi)\,\frac{r_,^3}{r^3},$$
$$= {}^3/_8\,(1 + \cos {}^1/_2\,\varphi)\,\frac{r^4 - r_,^4}{r^3};$$

folglich

$$S = {}^3/_8\,(1 + \cos {}^1/_2\,\varphi)\,\frac{r^4 - r_,^4}{r^3 - r_,^3}.$$

Es ist demnach der Schwerpunkt einer hohlen Halbkugel

$$S = {}^3/_8\,\frac{r^4 - r_,^4}{r^3 - r_,^3}.$$

Auf ganz ähnlichem Wege findet man den Abstand eines Kugelsegmentes vom Kugelmittelpunkte,

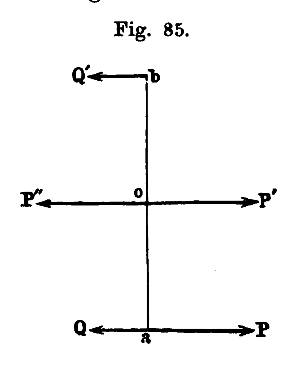
$$S = {}^3/_4\,r\,\frac{(1 + \cos {}^1/_2\,\varphi)\,\sin^2 {}^1/_2\,\varphi.}{2 - (1 + \cos {}^1/_2\,\varphi)\,\cos {}^1/_2\,\varphi}.$$

111 Da der Schwerpunkt eines Körpers gleichsam den Mittelpunkt seiner Masse bildet, da man sich in ihm die Gesammtmenge seiner schweren Theile vereinigt denken kann, so gewährt die Einführung dieses Begriffes den grossen Vortheil, dass die Bewegung eines Körpers, so weit sie von der Schwere abhängig ist, sich als diejenige eines einzigen Punktes, des Schwerpunktes, betrachten lässt, dessen Bahn diejenige aller übrigen beherrscht und bestimmt. Also bei der Bewegung fallender Körper in ihrer Abhängigkeit von der Schwere, gleich wie bei der Bewegung aller Weltkörper in ihrer Abhängigkeit von der Gravitation unterrichtet uns die Bahn und Bewegungsform ihrer Schwerpunkte, in Verbindung mit der Grösse der in denselben concentrirten Massen, über Alles was unter den bezeichneten Einflüssen irgend Bemerkenswerthes vorgehen kann. Wir haben das Recht, Wechselwirkungen der Körper aus der Ferne als Wirkungen zwischen materiellen Punkten anzusehen, an welchen wir uns die wirklich vorhandenen Massen zusammengedrängt vorstellen.

Aber auch umgekehrt dürfen wir eine jede gegen den Schwerpunkt gerichtete Kraft so betrachten, als sei dieselbe gleichmässig über alle Massentheile des betreffenden Körpers vertheilt, d. h. als sei sie die Resultirende von parallelen Kräften, von welchen alle Massentheile im proportionalen Verhältnisse ihrer Grössen gleichzeitig und in gerader Linie getrieben werden. So bei den Zugkräften, wenn ihre Richtung durch den Schwerpunkt des gezogenen Körpers geht, so bei dem durch Elasticität oder Dampfspannung ausgeübten Drucke u. s. w. In allen solchen Fällen also, wenn Bewegung erfolgt, kann sie als diejenige eines einzigen materiellen Punktes, nämlich des Schwerpunktes, und als abhängig von dem Drucke eines Gewichtes in der Rechnung behandelt werden.

112 Wenn der Angriffspunkt einer Kraft ausserhalb des Schwerpunktes liegt, der betreffende Körper jedoch freie Beweglichkeit bezitzt, so erfolgt die Bewegung gerade so als sei der Druck unmittelbar gegen den Schwerpunkt gerichtet, nur ist dieselbe dann von einer Rotation um den Schwerpunkt begleitet.

Fig. 85.



Um dieses eigenthümliche Verhalten zu verstehen, nehme man o (Fig. 85) als Schwerpunkt des zu bewegenden Körpers, a als Angriffspunkt der Kraft; ab sei eine durch den Schwerpunkt winkelrecht gegen die Richtung der Kraft $P = Pa$ geführte Gerade. Man denke sich im Punkte o zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte $P' = P'' = P$, ihren Richtungen nach parallel mit aP angebracht. Dieselben sind ohne Einfluss auf die von der Kraft P ausgehende Bewegung (Nro. 93). Die Kraft P'' lässt sich durch die ihr parallelen Kräfte

$Q = Q' = \frac{P}{2}$ ersetzen, von welchen die eine in a, die andere in b angebracht ist, beide in gleichem Abstande vom Schwerpunkte o. Da nun Q der Hälfte von P das Gleichgewicht hält, so entsteht ein Paar von Gegenkräften, nämlich die Kraft $\frac{1}{2} P$, welche in a ihren Sitz hat, und $Q' = \frac{1}{2} P$, welche in b angreift (Nro. 91). Zugleich wird der Punkt o durch die Kraft $P' = P$ getrieben, gerade so, als sei die excentrisch angreifende Kraft in den Schwerpunkt versetzt worden. Ein anschauliches Beispiel dieser Bewegungsart bietet die bewegliche Rolle (Fig. 63), aus deren Mittelpunkte oder Schwerpunkte ein Gewicht herabhängt. Während dieses durch eine an der Peripherie der Rolle, also excentrisch angreifende Kraft in gerader Linie gehoben wird, rotirt die Rolle um ihren Mittelpunkt.

Die Wirksamkeit der Pulvergase im Rohr einer Büchse, gleich wie in dem einer Kanone, obschon in Wirklichkeit gleichmässig durch den ganzen Querschnitt des Rohrs vertheilt, concentrirt sich zu einem Drucke entlang der Axe desselben. Liegt der Schwerpunkt der Kugel ebenfalls in dieser Linie, so wirkt diese Kraft gleichmässig auf alle Massentheile des Geschosses. Liegt aber der Schwerpunkt des letztern seitwärts von der Axe, so wirkt die Kraft excentrisch und hat ein Streben zur Folge, die Kugel, während sie dieselbe in gerader Linie forttreibt, zugleich um ihren Schwerpunkt zu drehen. Diesem die Gleichartigkeit der Bewegung störenden Einflusse sind insbesondere Langgeschosse unterworfen, weil die Kraft der verdichteten Gase, wenn auch mit verminderter Stärke, noch eine kurze Zeit fortdauert, nachdem die Kugel das Rohr verlassen hat, und weil der Widerstand der äussern Luft in gauz gleicher Weise wie die Kraft der gespannten Gase, das Geschoss excentrisch trifft.

In dem gezogenen Rohre erhält das Geschoss eine Rotationsgeschwindigkeit um die Axe, durch welche dem Nachtheile des excentrischen Druckes vorgebeugt werden kann. Wir werden auf den Grund dieses Verhaltens später zurückkommen.

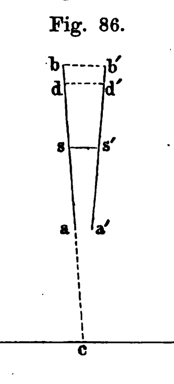
113 **Die Guldinische Regel** *) ist ein sehr bemerkenswerther, auf die Lehre vom Schwerpunkte gegründeter, eigentlich geometrischer Lehrsatz, der aber wegen seines Ursprunges in Lehrbüchern der Geometrie keine passende Stelle findet. Er drückt aus: dass der Flächeninhalt einer durch Rotation einer Linie um eine feste Axe erzeugten Fläche und ebenso der körperliche Inhalt eines durch Rotation einer ebenen Fläche um eine feste Axe erzeugten Körperraumes bestimmt wird, indem man den Inhalt einerseits der Linie, andererseits der Fläche mit dem Wege multiplicirt, welchen während der Drehung der Schwerpunkt der Linie oder der Fläche beschreibt. Der Beweis kann auf folgende Art geführt werden.

---

*) Nach dem Namen des Jesuiten Paul Guldin, der im Jahre 1643 als Professor der Mathematik in Grätz starb.

Es sei c (Fig. 86) ein Drehpunkt, ab eine mit demselben in fester Verbindung stehende Linie, s der Schwerpunkt derselben. Während die Linie durch Drehung um den festen Punkt c in die veränderte Stellung $a'b'$ übergeht, beschreibt ihr Schwerpunkt den Weg ss'. Jedes ihrer Elemente durchschreitet gleichzeitig eine Fläche, ähnlich wie das Element bd die Fläche $bdd'b'$. Nimmt man den Weg ss' sehr kurz an, etwa nur von elementarer Länge, so dürfen kleine Abschnitte der Linien ab und $a'b'$ als gleichlaufend und die kleinen Flächenstücke von der Art wie $bdd'b'$ als Parallelogramme angesehen werden. Der Inhalt eines irgend beliebigen derselben wird also aufgefunden, indem man die Grösse des betreffenden Linienelementes mit der zwischen seinen beiden Stellungen liegenden Entfernung multiplicirt.

Fig. 86.



Dieselbe Betrachtung lässt sich fast wörtlich auch auf Flächen ausdehnen, die in eine drehende Bewegung um den Punkt c gesetzt werden, nur mit dem Unterschiede, dass es jetzt Flächenelemente sind, die rotiren und dass jedes derselben ein kleines Parallelepipedon beschreibt.

Bezeichnet man die Linien- oder Flächenelemente mit f, f', f'' u. s. w., ihre Wege, um aus einer Stellung in die andere zu gelangen, mit h, h', h'' u. s. w., so ergiebt sich der ganze Inhalt der beschriebenen Fläche oder des beschriebenen Raumes

$$= fh + f'h' + f''h'' + \cdots$$

Indem man sich jetzt erinnert, dass die Werthe f, f', f'' u. s. f. physikalisch genommen Körper sind, folglich Gewicht besitzen, so kann man sich auch vorstellen, dass die Linie oder Fläche $ab = F$, mit Beziehung auf die frühere Lage, in der veränderten Stellung $a'b'$ ein Moment $F . ss'$ gewonnen hat, und dass unter demselben Gesichtspunkte die Abstände h, h', h'' u. s. f. nichts anderes sind als die Hebelarme der Gewichte f, f', f'' u. s. w. bezogen auf ab als Drehaxe, dass also die Producte fh, $f'h'$ u. s. f. die Momente dieser Gewichte in ihrer veränderten Lage vorstellen. Da nun die Summe der Momente irgend einer Anzahl paralleler Kräfte gleich ist dem Momente des Schwerpunktes, so folgt, dass

$$fh + f'h' + f''h'' + \cdots = F . ss' = F . s,$$

wenn man unter s den Weg des Schwerpunktes versteht.

Diese Schlüsse lassen sich von jeder Stellung, welche die Linie während der Drehung annehmen mag, auf die unmittelbar vorhergehende, sehr wenig entfernte Stellung in Anwendung bringen. Der Inhalt F, multiplicirt mit dem Wege des Schwerpunktes von F, giebt folglich auch für messbare Wege des Schwerpunktes und selbst für die ganze Umdrehung desselben um die Axe den von F erzeugten Rauminhalt. Gerade dies hatte aber bewiesen werden sollen.

Beispiele: 1) Es sei $ab = l$ (Fig. 87) eine gerade Linie, $cs = a$ der Abstand ihres Schwerpunktes von der Drehaxe xx', und Winkel $cos = \alpha$ derjenige Winkel, welchen beide Linien einschliessen. Für den Fall einer ganzen Umdrehung des Schwerpunktes durchläuft derselbe den Weg $2\pi a$. Der beschriebene Flächeninhalt ist folglich $= 2\pi a \, . \, l = F$. Derselbe ist, wie man sieht, von der Neigung der Linien ab und xx' gegen einander ganz unabhängig.

Er bildet den Mantel eines abgestutzten Kegels, wenn α einen beliebigen spitzen Winkel vorstellt. Setzt man $\alpha = 0^0$, so bedeutet F den Mantel eines Cylinders von der Höhe l. Für $\alpha = 90^0$ entsteht der Inhalt des zwischen zweien concentrischen Kreisen liegenden Ringes. Setzt man noch die weitere Bedingung $cs = a = ca = {}^1/_2\, l$, so erhalten wir den Flächeninhalt des ganzen Kreises πl^2. Für die Bedingung, dass die Linie l lang genug ist, um die Axe an einem Punkte o zu berühren, muss $a = \frac{l}{2} \sin \alpha$ sein. Die beschriebene Fläche ist dann der ganze Kegelmantel $= \pi l^2 \sin \alpha$.

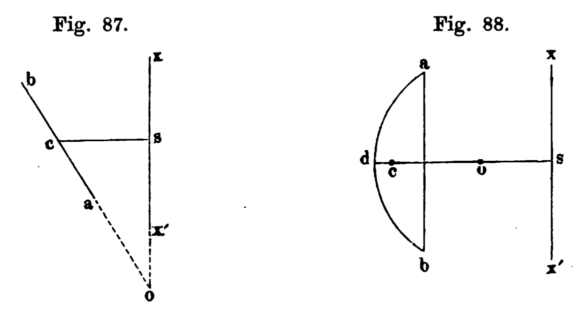


Fig. 87. Fig. 88.

2) Die rotirende Linie sei ein Kreisbogen adb (Fig. 88), dessen Sehne ab der Drehaxe xx' parallel läuft. Es sei ferner $od = r$, Bogen $adb = r\varphi$, $ab = 2r \sin {}^1/_2\, \varphi$, $os = a$ und der senkrechte Abstand des Schwerpunktes von der Axe,

$$cs = a + \frac{2r \sin {}^1/_2\, \varphi}{\varphi} \text{ (Nro. 104)};$$

so ergiebt sich nach der Guldin'schen Regel der Quadratinhalt der durch eine ganze Umdrehung erzeugten ringartigen Oberfläche

$$F = 2\pi \left(a + \frac{2r \sin {}^1/_2\, \varphi}{\varphi}\right) r\varphi = 2\pi r\,(a\varphi + 2r \sin {}^1/_2\, \varphi).$$

Dieser Ausdruck verwandelt sich für $\varphi = \pi$ in

$$F = 2\pi r\,(a\pi + 2r).$$

Setzt man ausserdem $a = o$, in welchem Falle der Kreismittelpunkt des erzeugenden Halbkreisbogens eine Kugeloberfläche beschreiben muss, wird

$$F = 4\pi r^2.$$

3) Denkt man sich mit Bezugnahme auf Fig. 88 ein Kreissegment adb als erzeugende Fläche, so ist der Abstand ihres Schwerpunktes von der Drehaxe

$$cs = a + \frac{4\, r \sin {}^1\!/_2\, \varphi}{3\, \varphi} \text{ (Nro. 105).}$$

Daher der Inhalt des gebildeten körperlichen Raumes, indem man sich erinnert, dass der Flächeninhalt eines Kreissegmentes

$$= {}^1\!/_2\, \varphi r^2 - {}^1\!/_2\, r^2 \sin \varphi = {}^1\!/_2\, r^2 (\varphi - \sin \varphi);$$

$$V = 2\pi \left(a + \frac{4\, r \sin {}^1\!/_2\, \varphi}{3\, \varphi}\right) {}^1\!/_2\, r^2 (\varphi - \sin \varphi)$$

$$= \pi r^2 (\varphi - \sin \varphi) \left(a + \frac{4\, r \sin {}^1\!/_2\, \varphi}{3\, \varphi}\right).$$

Indem man z. B. $\varphi = \pi$ setzt, wird $\sin \varphi = 0$, $\sin {}^1\!/_2\, \varphi = 1$ und $V = \pi r^2 (a \pi + {}^4\!/_3\, r)$.

Für $\varphi = \pi$ und $a = 0$ erhält man den Kugelinhalt

$$V = {}^4\!/_3\, \pi r^3.$$

Setzt man endlich noch $\varphi = 2\pi$, wodurch das erzeugende Kreissegment sich in einen ganzen Kreis verwandelt, dessen Mittelpunkt von der Axe um die Länge a entfernt liegt, so ist, da jetzt $\sin 2\pi = 0$ und $\sin \pi = 0$, der cubische Inhalt des gebildeten Ringes

$$V = 2 a \pi \,.\, \pi r^2.$$

4) Wir wollen noch die Annahme stellen, die erzeugende Fläche $abcd$ (Fig. 89) sei ein Paralleltrapez, dessen eine Seite $bc = h$ auf der Basis lothrecht stehe. Es sei $ab = a$, $dc = b$ und die Drehung gehe um die Linie cb als Drehaxe vor sich. Es ist in diesem Falle der Abstand des Schwerpunktes

Fig. 89.

$$so = \frac{a^2 + ab + b^2}{3\,(a + b)} \text{ (Nro. 102),}$$

und da der Flächeninhalt des Trapezes $= \frac{(a+b)h}{2}$, so erhält man das Volum des durch Rotation erzeugten abgestutzten Kegels

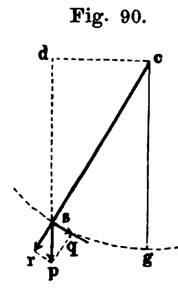
$$V = 2\pi \frac{a^2 + ab + b^2}{3\,(a + b)} \cdot \frac{(a + b)\, h}{2} = {}^1\!/_3\, \pi h\, (a^2 + ab + b^2).$$

114 **Standfähigkeit.** Von der Lage des Schwerpunktes hängt die grössere oder geringere Fähigkeit eines Körpers ab, äusseren Einflüssen, die eine Drehung desselben zu bewirken streben, Widerstand zu leisten. Körper, die nur in einem Punkte oder durch eine gerade Linie gestützt sind, können sich zwar in einer Gleichgewichtslage befinden, aber sie stehen nicht fest. Ist ihr Schwerpunkt unmittelbar gestützt, so können sie um diesen Punkt herum bekanntlich in jeder Lage im Gleichgewichte

verharren, und werden aus derjenigen, in welcher sie sich zufällig befinden, durch den geringsten Druck verdrängt, der nicht gegen den Schwerpunkt selbst gerichtet ist. Ihre Lage bleibt also stets eine ungesicherte.

Liegt die Stütze über dem Schwerpunkte, so kann der betreffende Körper zwar auch durch die geringste Kraft aus dieser Lage um ein Weniges verrückt werden, kehrt aber, sowie die äussere Einwirkung nachlässt, stets wieder in die frühere Gleichgewichtsstellung zurück. Diese ist also, obwohl keine feste, doch eine gesicherte. Es ist dies der Fall aller als hängend bezeichneter Körper. Sei c (Fig. 90) der Stützpunkt oder Aufhängepunkt eines Körpers, g die Lage des Schwerpunktes im Zustande des Gleichgewichtes; dieser Punkt sei aber nach s verrückt worden, so erhält die Schwerlinie die Lage dsp. Das im Punkte s concentrirt gedachte Gewicht $p = sp$, welches in der Richtung der Schwerlinie keine Stütze mehr findet, kann in die Seitenkräfte sr und sq zerlegt werden, von welchen nur die erstere gegen den Stützpunkt gerichtet ist, die letztere aber eine freie Wirksamkeit behauptet und dadurch den Punkt s gegen g zurücktreibt. Setzen wir die Entfernung $sc = l$ und Winkel $scg = \varphi$. Da die Kraft sq in der Richtung der Tangente des Punktes s, also winkelrecht auf sc wirksam ist, so kann man sagen, diese Kraft wirke an dem Hebelarme l, und ihr statisches Moment sei $l \, . \, sq = p \sin \varphi \, . \, l$. Es ist aber auch $l \sin \varphi = dc$ gleich dem winkelrechten Abstande des Drehpunktes von der Schwerlinie, oder auch des Schwerpunktes von der Richtungslinie seiner Gleichgewichtslage. So oft man also einen hängenden Körper aus seiner Ruhelage bringt, wird er durch eine Kraft zurückgerufen, deren Moment gleich ist dem Gewichte p des Körpers, multiplicirt mit dem Abstande des Schwerpunktes von seiner Schwerlinie in der Ruhelage.

Fig. 90.



Befindet sich der Stützpunkt lothrecht unter dem Schwerpunkte, so treten zwar momentan die Bedingungen des Gleichgewichtes ein, dasselbe ist jedoch unbeständig (labil), denn durch die geringste Verrückung aus dieser Gleichgewichtslage gebracht, fährt der Körper in demselben Sinne fort sich zu bewegen, beziehungsweise sich zu senken, und kehrt in die anfängliche Stellung freiwillig nicht wieder zurück, indem sein Schwerpunkt bei freier Beweglichkeit erst dann wieder genügende Unterstützung findet, wenn er lothrecht unter dem Stützpunkte angekommen ist.

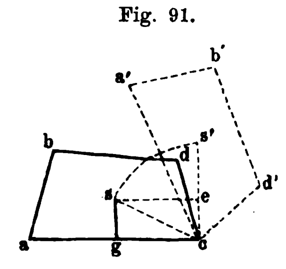
Sowohl in diesem wie in dem vorher betrachteten Falle hängender Körper hat das im Schwerpunkte vereinigte Gewicht in der Gleichgewichtslage kein Moment, dieses bildet sich vielmehr erst nach der Verrückung. Während aber die demselben entsprechende Arbeit im früher

erörterten Falle einer weitern Verrückung des Schwerpunktes entgegenwirkt, begünstigt sie im zweiten Falle die Fortbewegung.

115 Um durch die Lage des Schwerpunktes fest zu stehen oder um eine beständige (stabile) Gleichgewichtslage behaupten zu können, müssen die Körper wenigstens durch drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, unterstützt sein, und die Schwerlinie muss zwischen diese Stützen fallen, denn ein so gestützter Körper setzt jedem Bestreben, denselben um eine der Kanten seiner (durch die drei Stützpunkte bezeichneten) Grundfläche zu drehen und umzuwerfen, ein Widerstandsmoment, d. h. eine zur Arbeit bereite Kraft entgegen, die nicht erst durch die Verrückung des Schwerpunktes aus der Gleichgewichtslage erzeugt wird, sondern vorher schon vorhanden ist.

Man stelle sich unter *abcd* (Fig. 91) einen senkrechten Durchschnitt eines feststehenden Körpers vor. Es sei *s* die Lage seines Schwerpunktes, *sg* die Schwerlinie, welche eine Linie *ac* der horizontalen Grundfläche des Körpers im Punkte *g* lothrecht durchschneidet. Mit Beziehung auf den Punkt *c* als Drehpunkt hat das Gewicht *P* dieses Körpers ein statisches Moment $P \cdot gc$, dem ein ebenso grosses Moment einer von Aussen einwirkenden Kraft entgegengesetzt werden muss, nur dem Widerstande gegen die Drehung um den Punkt *c* das Gleichgewicht halten zu können. Man nennt den Ausdruck

Fig. 91.

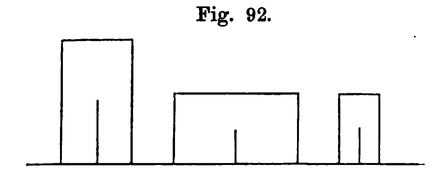


$$P \cdot gc = P \cdot b$$

das Moment der Standfähigkeit oder der Stabilität des betreffenden Körpers.

Es ist klar, dass ein und derselbe Körper nach verschiedenen Seiten ein ungleiches Standfähigkeitsmoment besitzt, wenn der Abstand der Drehkante von der Schwerlinie nicht überall derselbe ist, und dass ebenso in verschiedenen Lagen desselben die Festigkeit seines Standes eine verschiedene sein kann. So besitzt ein und dasselbe Parallelepipedon nach Breite und Länge seiner Basis und in den drei in Fig. 92 dargestellten Lagen eine sehr ungleiche Standfähigkeit.

Fig. 92.



Wenn die Standfähigkeit eines Körpers überwunden wird und die Drehung um eine Kante *c* (Fig. 91) seiner Grundfläche erfolgt, so beschreibt der Schwerpunkt bei fortgesetzter Drehung nach und nach einen Bogen *ss'*. So lange er zwischen den Gränzen *s* und *s'* dieses Bogens +, muss der Körper, sich selbst überlassen, in die frühere Lage

zurückkehren. Im Augenblicke der Ankunft im Punkte s', senkrecht über dem Drehpunkte c, tritt ein Zustand des unbeständigen Gleichgewichtes ein und die Gränze einer gesicherten Lage des Körpers nach dieser Seite ist erreicht, denn bei der geringsten Fortbewegung im frühern Sinne gewinnt er ein Moment, welches das Umfallen, d. h. den Uebergang zu einer veränderten Gleichgewichtslage begünstigt. Die Gränze der gesicherten Lage entspricht dem höchsten Punkte, zu welchem der Schwerpunkt, also das Gewicht des Körpers während der Drehung gehoben wird. Die ganze Steighöhe, oder der in der Richtung der Schwere zurückgelegte Weg ist es'. Das Multiplicationsproduct $P \cdot es'$ bezeichnet folglich den erforderlichen Arbeitsaufwand, um einen durch sein Gewicht feststehenden Körper aus seiner gesicherten Lage zu bringen. Das Product $P \cdot es'$ ist also das Maass der Standfähigkeit. Setzen wir $gc = b$; $gs = h$; Winkel $scs' = \varphi$; folglich

$$sc = \frac{b}{\sin \varphi} \quad \text{und} \quad tng\, \varphi = \frac{b}{h},$$

ferner

$$es_{,} = cs_{,} - ce = sc\,(1 - \cos\varphi) = b\,\frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$= b\,\frac{2 \sin {}^1/_2\, \varphi \, \sin {}^1/_2\, \varphi}{2 \sin {}^1/_2\, \varphi \, \cos {}^1/_2\, \varphi} = b\, tng\, {}^1/_2\, \varphi.$$

Es ist demnach das Arbeitsmoment der Standfähigkeit oder das Gesammtmaass des Widerstandes gegen das Umwerfen eines Körpers (auch seine dynamische Standfestigkeit)

$$S = P b\, tng\, {}^1/_2\, \varphi.$$

D. h. gleich dem statischen Momente des festen Standes, multiplicirt mit der Tangente des halben zum Umwerfen erforderlichen Drehungsbogens. Zur Bestimmung dieses Bogens, wenn er nicht direct messbar ist, kann die Gleichung $tng\, \varphi = \frac{b}{h}$ oder auch

$$tng\, {}^1/_2\, \varphi = \frac{\sqrt{(b^2 + h^2)} - h}{b}$$

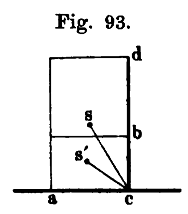
benutzt werden.

Die Gleichung S zeigt, dass das Feststehen nicht bloss vom Gewichte eines Körpers und dem wagerechten Abstande seines Schwerpunktes von der Drehkante, sondern auch von der Höhenlage des Schwerpunktes abhängig ist. Sie erklärt, warum zwei Körper bei gleichem Momente der Standfähigkeit nicht nothwendig auch eine gleich gesicherte Lage behaupten; warum z. B. ein mit lockeren Gegenständen hoch beladener Wagen der Gefahr umzuwerfen mehr ausgesetzt ist, als ein mit Eisenschienen ebenso schwer beladener Wagen.

In Fig. 93 (a. f. S.) sind zwei Stellungen eines und desselben Parallelepipedons angedeutet, und zwar in einem senkrecht auf die Grundfläche

und die Drehkante c geführten Durchschnitte durch den Schwerpunkt. Die Breite ac bleibt in beiden Lagen unverändert, während die Höhe cd und Dicke bc verwechselt werden. Wenn der Körper aufrecht steht, befindet sich sein Schwerpunkt in s und es ist Winkel $\varphi = scd$. Sobald er aber der Länge nach aufliegt, senkt sich der Schwerpunkt nach s' und Winkel φ und mit ihm die gesicherte Lage wird vergrössert.

Fig. 93.



116 Zahlreiche bewegliche Gegenstände des Gebrauches in den Haushaltungen sowohl wie in den Gewerben und zu wissenschaftlichen Zwecken, wie transportable Lampen und Leuchter, Träger, Halter u. s. f. dürfen nicht umfallen. Man versieht sie daher, um ihre Standfähigkeit zu vergrössern, mit weit aus einander stehenden Füssen, oder wo dies nicht thunlich ist, beschwert man sie, dem Boden so nahe wie möglich, mit eingesetzten Bleistücken. Aus demselben Grunde giebt man dem Fusse von Tischen mit weit überragender Platte ein bedeutendes Gewicht. Ein solcher Tisch muss gleichwohl umfallen, wenn auf die Tischplatte in die Nähe des Randes ein schwerer Körper gelegt wird, dessen statisches Moment, bezogen auf den zunächst befindlichen Rand des Fusses, nur im mindesten grösser ist als das Moment des Tisches, bezogen auf dieselbe Drehkante.

Mauern, die einen einseitigen Druck auszuhalten haben, indem sie z. B. eine Erhöhung lockern oder halbflüssigen Erdreichs begränzen, sollen, auch abgesehen von ihrem bei trocknem Zustande vorhandenen Zusammenhange mit den Fundamenten, dem einseitigen Drucke einen genügenden Widerstand bieten. Ihre Standfähigkeit muss danach berechnet werden. Behufs dieser Rechnung ist zu bemerken, dass durch Verdopplung der Dicke einer Mauer zugleich deren Gewicht und der Abstand des Schwerpunktes von der Drehkante verdoppelt, folglich das Widerstandsmoment vervierfacht wird.

Sehr häufig sucht man die Standfestigkeit der Mauern durch Böschungen zu vergrössern. Der Höhendurchschnitt einer geböschten Mauer zeigt gewöhnlich die Gestalt eines Paralleltrapezes (Fig. 89), dessen eine Seite bc senkrecht steht, während die gegenüberliegende ad eine geneigte Lage hat. Hierdurch wird, wie wir wissen (Nro. 102), der Schwerpunkt der Grundfläche genähert und sein horizontaler Abstand von der Drehkante vergrössert. Will man die Stabilität einer geböschten Mauer mit der einer ganz senkrechten vergleichen, so hat man sich zu erinnern, dass der wagerechte Abstand ga des Schwerpunktes vom Fusspunkte a (Fig. 89) der Böschung durch

$$x = \frac{a^2 + ab + b^2 + (a + 2b)\, c \cos \alpha}{3\,(a + b)}$$

ausgedrückt ist. Da nun, gleiches Gewicht beider Mauern vorausgesetzt,

der analoge Abstand bei der senkrechten Mauer durch den Ausdruck $\frac{a+b}{4} = \frac{(a+b)^2}{4(a+b)}$ gegeben ist, so verhalten sich die Standfestigkeiten beider Mauern wie

$$\frac{a^2 + ab + b^2 + (a + 2b)\, c \cos \alpha}{3} : \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}.$$

Bei dieser Rechnung hat man sich, wie bemerkt, die geneigte Seite der Mauer nach Aussen zu denken. Bei umgekehrter Stellung ist $\alpha = 90^0$, daher $\cos \alpha = 0$. Die Böschung wirkt also dann etwas weniger günstig. Der wirkliche Vorgang dürfte jedoch meistens diesem Resultate der Rechnung nicht entsprechen, weil die geneigte Seite der Mauer, gegen das Erdreich gewendet, das sie zurückhalten soll, davon bedeckt wird und dadurch nur eine grössere Widerstandsfähigkeit gewinnt.

Die Standfähigkeit des menschlichen Körpers ist in Folge der geringen Ausdehnung seiner Fussflächen nicht gross, doch wissen wir dieselbe gegen starke äussere Eindrücke durch Ausbreitung der Füsse zu vergrössern. Auch verschaffen wir uns durch fortdauernde Uebung eine grosse Gewandtheit, dem Schwerpunkte, dessen Sitz sich ungefähr in der Mitte des Unterleibes befindet, immer eine solche Lage zu ertheilen, dass er gestützt bleibt. So insbesondere beim Tragen von Lasten, sei es auf den Schultern oder auf dem Rücken, in der einen oder der andern Hand.

Die Vierfüssler, deren Schwerlinie ungefähr in die Mitte zwischen die vier Füsse fällt, besitzen eine verhältnissmässig mehr gesicherte Stellung und bedürfen daher einer weit geringern Uebung, um sich in derselben zu erhalten.

Wälzende Reibung. Kugeln auf ebener wagerechter Oberfläche, **117** deren Schwerpunkt genau im Mittelpunkte seinen Sitz hat, verhalten sich wie Körper, die in ihrem Schwerpunkte gestützt sind; sie verharren im Gleichgewichte in jeder Lage, die man ihnen geben mag, denn das durch den Mittelpunkt herabgesenkte Loth trifft stets den Stützpunkt. Nur solche Kugeln, deren Schwerpunkt ausserhalb des Mittelpunktes liegt, werden hin- und herrollen und das Gleichgewicht endlich in einer Stellung finden, in welcher ihr Schwerpunkt in die gerade Verbindungslinie zwischen Mittelpunkt und Stützpunkt fällt.

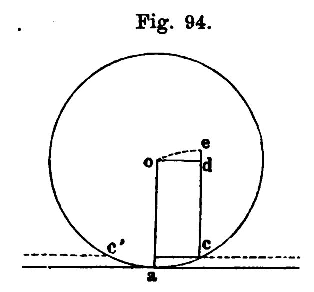
Walzen und Rollen zeigen ein ganz ähnliches Verhalten mit Bezugnahme auf ihre Stützlinie auf ebener wagerechter Oberfläche.

Obgleich hiernach Kugeln, Walzen und Rollen (Räder) sehr leicht aus einer Lage in die andere überführbar sind, so gehorchen sie doch derartigen äusseren Einwirkungen nicht ganz ohne Widerstreben. Man erklärt sich dies aus dem Umstande, dass selbst die glattesten Körperoberflächen, genauer zumal mit bewaffnetem Auge betrachtet, niemals

ganz ohne Unebenheiten sind, dass folglich Körper mit gekrümmter Oberfläche, selbst auf ganz ebener Unterlage, streng genommen nicht auf einem Punkte, sondern auf einer Fläche ruhen. Was also bei ganz rauhen Oberflächen dem Auge leicht sichtbar entgegentritt, dass nämlich eine Rolle während des Umwälzens einen gewissen Grad der Standfähigkeit behauptet, in Folge deren sie von einer Unebenheit über die andere weggehoben werden muss, das denkt man sich auch da noch vorhanden, wo es das Auge nicht mehr mit gleicher Deutlichkeit wahrzunehmen vermag.

Stellen wir uns unter dem Kreise Fig. 94 den Umfang eines Rades vor, dessen Radius $oa = r$. Dasselbe ruht auf seiner Bahn nicht auf einem einzigen Punkte a, sondern mit dem Bogenstücke cac', dessen Sehne cc' durch den Halbmesser oa senkrecht durchschnitten wird. Während des Fortschreitens in der Richtung c' nach c wird das Rad über den Punkt c gewälzt, um dann in eine veränderte, ähnliche Stellung wie die eben betrachtete zu gelangen u. s. f. Dabei findet ein wiederholtes Steigen des Schwerpunktes um die Höhe de statt, und es entsteht eine diesem Widerstande entsprechende Arbeit, deren Grösse, wie vorher (Nro. 115) gezeigt wurde, für das Fortschreiten um die Wegesstrecke $c'c$ ausgedrückt werden kann durch

Fig. 94.



$$S = Pb\, tng\, {}^1\!/_2\, \varphi \quad \text{und} \quad tng\, \varphi = \frac{b}{h}.$$

Es bedeutet, auf unsern Fall angewendet, P das Gewicht des Rades und eines etwa darauf lastenden Druckes, $h = r$, $b = \frac{c'c}{2}$ und Winkel $\varphi = ocd$.

Da b nach Annahme hier so klein ist, dass es sich mit Sicherheit gar nicht mehr messen lässt, so kann man $tng\, \varphi$ mit Bogen φ verwechseln. Es ist daher

$$tng\, \varphi = Bog\, \varphi = \frac{c'c}{2r},$$

folglich

$$tng\, {}^1\!/_2\, \varphi = \frac{c'c}{4r}.$$

Hiernach ergiebt sich die Arbeit für den Weg $c'c$

$$S = P \,.\, b \cdot \frac{c'c}{4r},$$

folglich die Arbeit für einen Weg gleich der Einheit desjenigen Längen-[...]sses, nach welchem r bestimmt wurde:

$$\frac{S}{c'c} = W = \frac{b}{4} \cdot \frac{P}{r}.$$

Die Länge $c'c$ lässt sich nicht unmittelbar messen; um dieselbe kennen zu lernen, muss sie durch Versuche bestimmt werden. Setzen wir $\frac{b}{4} = \beta$, so ist

$$W = \beta \frac{P}{r}.$$

Diesen Widerstand für die Einheit der Wegeslänge, der bei der Umwälzung eines Rades hervortritt, nennt man die wälzende Reibung. Dieselbe verhält sich wie der auf das wälzende Rad lastende Druck und umgekehrt wie der Halbmesser des Rades. Der Coefficient β hängt von der besondern Beschaffenheit des Radreifes und der Bahn ab, und würde also in jedem Falle besonders zu ermitteln sein. In dieser Beziehung fehlt es jedoch bis jetzt sehr an befriedigenden Erfahrungen.

Achter Abschnitt.

Von der Reibung und deren Einfluss auf die Bewegung.

118 So oft ein Körper über die Oberfläche eines andern gleitet, bemerkt man einen Widerstand, dessen Ueberwindung ein gewisses Maass von Kraft in Anspruch nimmt. Der Grund dieses Verhaltens ist unverkennbar, wenn Körper mit rauhen Oberflächen sich über einander bewegen. Man bemerkt dann, dass sie sich ihre Rauhigkeiten wechselseitig abstossen und abreiben und dadurch nach häufiger Wiederholung sich abglätten. In der That sind hierauf mancherlei Vorrichtungen gegründet, die im Haushalte und in den Gewerben vorkommen, so das Feilen, Raspeln und Schleifen, das Zerreiben in der Reibschale mit dem Mörser, gleich wie die Arbeit des Mühlsteines, das Reinigen und Poliren zahlreicher Geräthschaften aus Metall und Holz, der Spiegelplatten u. s. w. In allen diesen und ähnlichen Fällen ist es der Zusammenhang fester Theile, ihre Cohäsion, um deren Lösung es sich handelt, und der Widerstand der dabei wahrgenommen wird, ist gegen das Abreiben materieller Theilchen gerichtet.

Man hat indessen längst erkannt, dass die gleitende Fortbewegung nicht nothwendig mit einer wechselseitigen Abnutzung der Oberflächen verbunden ist, und dass ein sehr in Betracht kommender Widerstand auch dann noch sich äussern kann, wenn nach vorausgegangener sorg-

fältiger Abglättung zweier Flächen, ein Abreiben derselben aneinander, höchstens noch spurenweise oder selbst gar nicht mehr vorkommt. Die Bezeichnungsweise Reibung ist gleichwohl auch in diesem Falle als Name des beobachteten Widerstandes beibehalten worden.

119 Die Reibung in diesem Sinne ist es nun vorzugsweise, welche die Mechanik in Betracht zu ziehen hat und mit welcher wir uns in diesem Abschnitte beschäftigen wollen. Ein gründliches experimentelles Studium derselben hat zur Erkenntniss gewisser Erfahrungsgesetze geleitet, welche es möglich machen, den Reibungswiderstand in allgemeiner Weise in die Rechnung einzuführen. Es sind die folgenden.

1) Die Reibung ist proportional dem Drucke, welchen der gleitende Körper auf seine Unterlage ausübt; bei Körpern also, die auf wagerechter Bahn gleiten, proportionel ihrem Gewichte.

2) Die Reibung ist unabhängig von der Grösse der reibenden Flächen.

3) Sie ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Bewegung.

Wenn hiernach in einem gegebenen Falle der Reibungswiderstand als Bruchtheil der Einheit des Druckes (beziehungsweise der Gewichtseinheit), der sogenannte Reibungscoefficient bekannt ist, so bedarf es nur, denselben mit dem von dem gleitenden Körper ausgeübten Drucke zu multipliciren, um die Grösse der Kraft in Erfahrung zu bringen, deren es bedarf, um dem durch das Gleiten erzeugten Widerstande das Gleichgewicht zu halten. Die Grösse der reibenden Fläche, gleich wie die Geschwindigkeit der Bewegung kommen dabei nicht weiter in Betracht. Wir wollen den Reibungscoefficienten allgemein durch das Zeichen μ ausdrücken.

120 Zwischen den Oberflächen verschiedener Körper ist die Reibung ungleich gross, kann aber bei allen durch Dazwischenbringen der sogenannten Schmiermittel, d. h. feiner, weicher Stoffe, insbesondere von Fetten und Oelen sehr bedeutend vermindert werden. Bei glatten aber trockenen Flächen hängt die Reibung von der besondern Natur der Stoffe ab. Hölzer, wenn sie trocken über einander gleiten, zeigen meistens einen grossen Widerstand, der selten unter 0,3 ihres Gewichtes sinkt, aber auch in häufigen Fällen fast bis zu 0,5 ansteigen kann.

In der Regel zeigen sie dann die grösste Reibung, wenn die Fasern beider übereinander gleitenden Flächen gleichlaufend sind, eine geringere, wenn sich die Fasern durchkreuzen, den geringsten, bis zu 0,2 herabgehend, wenn die Fasern des einen Stückes vertical auf denen des andern stehen. Bei den Hölzern bemerkt man auch noch die Eigenthümlichkeit, dass wenn sie auch nur eine kurze Zeit ruhend, und unter gewissem Drucke auf einander gelegen haben, der Uebergang zur Bewegung eine grössere Kraftäusserung erfordert, als nachher die Erhaltung derselben.

Man nennt diese, bei der Frage des Einflusses der Reibung auf die Bewegung übrigens sehr untergeordnete Erscheinung, Reibung der Ruhe. Man beobachtet sie auch, wenn glatte Holz- und Metallflächen gegen einander gepresst waren, aber niemals zwischen den Oberflächen der Metalle.

Holz- und Metallflächen trocken über einander gleitend, verhalten sich ähnlich wie Holz auf Holz. Dagegen zeigen Metallflächen einen merklich geringern Widerstand, der 0,25 des Druckes gewöhnlich nicht übersteigt und oft, zumal bei Anwendung ungleichartiger Metallflächen wie Stahl auf Messing, bis zu 0,15 herunter geht.

Ueberall da wo Maschinentheile in einander eingreifen, sucht man die Reibung zwischen rein erhaltenen Oberflächen, die sogenannte trockne Reibung möglichst zu vermeiden, weil ohne die Beihülfe der Schmiermittel der Widerstand nicht nur an und für sich grösser ist, sondern auch während des Gebrauchs gewöhnlich rasch zunimmt. Denn selbst bei anscheinend vollendeter Glätte zweier Körperoberflächen, die trocken über einander gleiten, ritzen sie sich, schon in Folge sich einnistender Staubtheilchen, nach und nach auf und werden rauh. Durch nachhaltige Anwendung von Schmiermitteln wird dieser Nachtheil fast ganz beseitigt, und bei fortdauernd reichlicher Zuführung derselben werden die Unterschiede in der Oberflächenbeschaffenheit ungleichartiger reibender Flächen grösstentheils aufgehoben. Durch Benutzung der besten Schmiermittel sinkt der Widerstand auf 0,06 bis 0,08 des Druckes.

Die geeignetsten Schmiermittel für Hölzer sind gereinigter Talg und Schweineschmalz. Metalle pflegt man mit denselben Fetten zu schmieren. Olivenöl und Knochenöl zeigen sich noch geeigneter zur Verminderung der Reibung, gleichwohl sind sie nur da empfehlenswerth, wo passende Vorkehrungen gegen das Abfliessen der flüssigen Stoffe getroffen werden können. Auch das Steinöl hat sich neuerdings als sehr brauchbares Ersatzmittel für vegetabilische und thierische Fette und Oele erwiesen.

Hat man die glatten Oberflächen zweier Körper mit einem fettigen Stoffe auch nur abgerieben, so dass eben die fühlbaren Spuren davon noch zurück bleiben, so ist dies nicht ohne Einfluss, denn der Reibungswiderstand verringert sich bei allen Körperoberflächen, die man in der Art behandelt hat, auf 0,12 bis 0,15 des Druckes.

Zum Zwecke bequemerer Uebersicht finden sich die wesentlichsten der vorstehenden Erfahrungsergebnisse in der folgenden kleinen Tafel zusammengestellt. Grösse des mittlern Widerstandscoefficienten beim Gleiten von

		μ	ϱ *)	$\sin\varrho$ *)
Holz auf Holz oder Metall	trocken	0,40	21° 48′	0,37137
Metall auf Metall	trocken	0,20	11° 19′	0,19623
	fühlbar fettig	0,15	8° 32′	0,14838
	reichlich in Schmiere erhalten	0,07	4° 1′	0,07000
	reichlich in Schmiere erhalten	0,06	3° 26′	0,06000

*) Von der Bedeutung der zwei letzten Spalten dieser Tafel kann erst später die Rede sein.

121 Da die Kenntniss der Grösse des Reibungswiderstandes durchaus Sache der Erfahrung ist, so hat man zur Bestimmung derselben kein anderes Mittel, als den Versuch. Es sind zu diesem Zwecke verschiedene Verfahrungsweisen ersonnen und in Anwendung gebracht worden.

Man denke sich eine glatte, ganz ebene Fläche von 1 bis 2 Meter Länge, auf einer passenden Unterlage fest aufliegend, mit Schraubenfüssen versehen, um genau horizontal eingestellt werden zu können. Sie dient als Bahn für eine bewegliche Scheibe ebenfalls mit gut geglätteter Fläche, deren Reibungswiderstand mit Beziehung auf den Stoff der Bahn aufgesucht werden soll. Um diese Scheibe auf ihrer Unterlage in gleitende Bewegung zu setzen, wird ein Faden daran befestigt, der in wagerechter Lage fortgeleitet, am einen Ende des Apparates um eine feste Rolle geschlungen ist und eine Wageschale trägt, die sich mit Gewichten beschweren lässt, so weit erforderlich, um die durch einen Anstoss in Bewegung gesetzte Scheibe im Gleiten, jedoch ohne auffallende Zunahme ihrer Geschwindigkeit, zu erhalten. Die Oberfläche der Scheibe muss hinlänglichen Raum bieten, um durch aufgelegte Gewichte nach Erforderniss den Druck auf die Bahn verstärken zu können.

Das Gewicht, welches bei irgend einem Versuche in die Schale gelegt werden musste, um die Scheibe in Bewegung zu erhalten, dividirt durch das Gewicht der Scheibe sammt Belastung führt zur Kenntniss des Reibungscoefficienten für den besondern Fall des Versuches.

Angenommen z. B., Bahn und Scheibe waren beide aus Birnbaumholz verfertigt, und letztere äusserte in Folge ihrer Belastung einen Druck von 12 Kilogramm gegen die erstere, als man, um das Gleiten dauernd zu machen, 4,8 Kilogramm in die Schale bringen musste, so sagt uns der Quotient $\frac{4,8}{12} = 0,4$, dass für den Fall des Gleitens von Birnbaumholz auf Birnbaumholz der Reibungswiderstand eines beliebigen Gewichtes P gleich ist $0,4\,P$. Es ist leicht zu sehen, wie durch Abwechselung in der Grösse des Druckes das erste der drei vorher erwähnten Gesetze, und wie dann durch Veränderung des Flächeninhaltes der Scheibe die Richtigkeit des zweiten geprüft werden kann. Um auch das dritte einer Prüfung zu unterwerfen, kann man den Zugfaden um die Rolle einer Fallmaschine leiten, und die daran hängende Schale mit Gewichten über die Gränze des Gleichgewichtes hinaus belasten. Die hierdurch bewirkte beschleunigte Bewegung muss, wenn das Gesetz richtig ist, eine gleichförmig beschleunigte sein. So findet es sich denn auch, wenn die reibenden Flächen mit Fett reichlich getränkt sind. Bei der trocknen Reibung dagegen zeigen sich bedeutende Abweichungen.

Handelt es sich darum, die Reibung zwischen verschiedenen Stoffen kennen zu lernen, so muss man natürlich Bahn wie Scheibe aus denselben verfertigen lassen. Zur Herstellung der erstern sind schmale Streifen oder Schienen, je zwei parallel neben einander herlaufend, vollkommen reichend.

Ein anderes Verfahren, das sich dadurch auszeichnet, dass es in sehr einfacher Weise gestattet, den Einfluss veränderter Geschwindigkeit zu studiren, besteht darin, dass man die Bahn, anstatt dieselbe auf einer Unterlage zu befestigen, auf zwei Walzen legt, welche gleich der Bahn selbst aus verschiedenen Stoffen gebildet sein können. Sie sind so mit einander verbunden (verkuppelt), dass sie mittelst eines Triebwerkes gleichzeitig nach gleicher Richtung eine gleiche Anzahl Umdrehungen machen müssen. Das Triebwerk durch die Hand geleitet, kann schneller oder weniger schnell in Bewegung gesetzt und dadurch wieder die Geschwindigkeit der Walzen beliebig verändert werden.

So wie die Walzen gedreht werden, kommt auch die auf ihnen ruhende und genau horizontal eingestellte Bahn in Bewegung, und wir haben den Vorgang des Wälzens, ähnlich wie man denselben häufig, um schwere Gegenstände vorwärts zu schieben, auf Werkstellen angewendet sieht. Hindert man das Vorschreiten der Bahn, so verwandelt sich der Vorgang des Wälzens alsbald in den des Gleitens, von der frühern Art, in welcher wir dasselbe betrachteten, nur dadurch sich unterscheidend, dass, was wir vorher als Bahn bezeichneten, jetzt die Rolle der Scheibe übernimmt, und dass diese jetzt über eine kreisförmige Fläche, nämlich die Umfangsfläche der Walze gleitet. Die Kraft welche in diesem Falle das Vorschreiten hindert, ist also dem Widerstande der Reibung gleich. Um sie zu messen, wird am (im Sinne der Bewegung) hintern Ende der ebenen auf den Walzen liegenden Fläche ein Faden angehängt, der wie bei dem vorher beschriebenen Apparate um eine feste Rolle geht und eine Wagschale trägt. Durch Einlegung von Gewichten kann man es nun für jede gegebene Geschwindigkeit leicht dahin bringen, dass das Gleichgewicht der Ruhe erhalten bleibt.

122 Der auf dem einen oder andern Wege gefundene Reibungswiderstand führt den Namen d e r g l e i t e n d e n R e i b u n g, zur Unterscheidung von der früher (Nro. 117) besprochenen w ä l z e n d e n R e i b u n g. Beide unterscheidet man übrigens sehr leicht durch die Art des Vorganges, denn während die gleitende Fläche immer dieselbe bleibt, in steter Folge aber mit anderen Stellen ihrer Unterlage oder Bahn in Berührung kommt, bemerkt man, dass bei dem Wälzen die Berührungsstellen beider Flächen sich in stetigem Wechsel befinden.

Die Ursache der wälzenden Reibung findet man in den Unebenheiten, welche selbst bei ganz glatten Oberflächen nicht fehlen und jedenfalls wegen der Nachgiebigkeit der Theile eines jeden Körpers, durch äussern Druck auf seiner Oberfläche erzeugt werden. Sie haben die Folge, dass die gekrümmte Oberfläche eines Rades nicht auf einer Linie sondern auf einer Fläche seiner Unterlage ruht, und so eine wenn auch geringe Stabilität annimmt.

Auf derselben Ursache beruht ohne Zweifel auch der Widerstand der gleitenden Reibung. Denn die Rauhigkeiten an den Berührungs-

flächen zweier gegen einander drückender Körper müssen in einander eingreifen und, auch ohne sich wechselweise abzureiben, einen Widerstand erwecken; weil da, wo die Abnutzung ausbleibt, ein Heben des einen Körpers über die Unebenheiten des andern eine nothwendige Vorbedingung des Fortschreitens ist.

Die Bewegung gegen den Widerstand der gleitenden Reibung gleicht hiernach dem Aufsteigen auf einer schiefen Ebene. Der Reibungswiderstand kann sogar dieser Analogie entsprechend in die Rechnung eingeführt werden.

Im Sinne dieser Erklärungsweise ergeben sich die Reibungsgesetze als einfache Folgerungen, denn die Kraft, welche einem Körper während dessen Bewegung auf einer schiefen Ebene das Gleichgewicht hält, ist unabhängig von der Grösse der Berührungsfläche, gleich wie von der Geschwindigkeit. Auch versteht man jetzt warum die Schmiermittel, indem sie die Unebenheiten der Berührungsflächen ausgleichen, folglich die Tiefe des wechselseitigen Eingreifens und die Abnutzung vermeiden, den Reibungswiderstand auf seinen kleinsten Werth zurückführen.

123 **Feststehen durch Reibung.** Wir haben in dem vorhergehenden Abschnitte die Standfähigkeit der Körper durch ihr Gewicht, oder mit Beziehung zur Lage des Schwerpunktes kennen gelernt.

Die Festigkeit des Standes ist aber in gewissem Sinne auch von der gleitenden Reibung abhängig. Diese kann zwar niemals das Umfallen eines Körpers hindern, wenn dessen Schwerlinie ausserhalb der Stützfläche fällt, wohl aber tritt sie einer Verschiebung parallel mit der Basis entgegen, wenn der Stand eines Körpers vermöge der Lage seines Schwerpunktes gesichert ist.

Der Widerstand eines Körpers gegen Verschiebung ist gleich seinem Gewichte multiplicirt mit dem betreffenden Reibungscoefficienten.

Ohne diesen Verschiebungswiderstand würden frei stehende Körper durch den geringsten Anstoss zum Gleiten gebracht werden, und das Feststehen wäre unmöglich. Genügt doch schon in vielen Fällen eine Verminderung des Reibungscoefficienten durch die Wahl der Unterlage, um die Festigkeit des Standes zu gefährden. Man vergleiche nur den Grad der Sicherheit des Stehens auf rauhem Boden und auf spiegelnder Eisfläche.

124 **Kraft zum Gehen.** Auch das Gehen wird durch die Reibung wesentlich erleichtert, ja überhaupt erst möglich gemacht. Denn bei jedem Schritte wird das Gewicht des Körpers eine kurze Zeit nur von dem einen Fusse getragen, und der gegen denselben ausgeübte Druck, sobald er aus dem Lothe in eine schiefe Richtung übergeht, spaltet sich in eine senkrechte und in eine horizontale Seitenkraft, welche letztere den durch Reibung nicht festgehaltenen Fuss nothwendig zum Ausgleiten bringen muss. Nur die Reibung hindert dieses Ausgleiten und gestattet, dass das vorschreitende Bein in pendelartiger Bewegung durch die natür-

liche Ruhelage des Körpers schwingt, während das andere gegen den Boden gestemmt, einer Drehung des Schwerpunktes zur Stütze und gleichsam als Drehungshalbmesser dient. Diese Drehung beginnt bei jedem Schritte mit einem Heben bis zur lothrechten Stellung über der Stütze, und endigt mit einer gleichen Senkung des Schwerpunktes. Die Sehne des Kreisbogens, welche er dabei beschreibt, bezeichnet von Schritt zu Schritt die Grösse des horizontalen Fortschreitens. Der Schwerpunkt vollführt dabei zugleich eine oscillirende Bewegung winkelrecht zur Hauptrichtung seiner Bahn, indem er aus seiner natürlichen Gleichgewichtslage abwechselnd immer nach der Seite des stützenden Fusses geworfen wird. Seine Bahn ist demnach, wenn auch eine bestimmte Hauptrichtung einhaltend, doch im Detail betrachtet eine sehr zusammengesetzte Curve, deren Projection sowohl in der verticalen, wie in der horizontalen Ebene eine durch allmälige Uebergänge sich schlängelnde Linie bildet.

Man könnte vermuthen, dass der einmal in Bewegung gesetzte Körper, zum Fortschreiten auf wagerechter Ebene eines weitern Impulses nicht mehr bedürfe, wenn nicht die allgemeine Erfahrung uns anders belehrte. Auch finden sich bei näherer Erwägung sogar mehrere Hindernisse, welche der Fussgänger fortdauernd zu überwinden hat. Zunächst ist es einleuchtend, dass der bei einer jeden Bewegung eines Körpers über die Oberfläche eines andern auftretende Widerstand auch hier nicht ganz fehlen kann. Er lässt sich, wenn der Schritt frei und nicht schleppend ist, wohl am passendsten mit dem der wälzenden Reibung vergleichen. Gering auf festem Boden, vermehrt er sich doch, wie man weiss, sehr bedeutend auf weichem, sandigem Grunde, denn jeder bleibende Eindruck im Boden, jede Verschiebung und Abnutzung seiner Theile bedeutet eine mechanische Arbeit, welche, gleich wie sie vom Körper bewirkt wird, schliesslich auch seinen Kräften zur Last fällt. Rechnet man hierzu eine gewisse Anstrengung, um den Körper in aufrechter Stellung zu erhalten, die Reibung in den Gelenken der Glieder und den Widerstand der Luft, so erklärt es sich, dass selbst unbelastete Fussgänger nach und nach ihre Körperkräfte erschöpfen. Denn diese Hindernisse zusammen genommen beanspruchen ein gewisses Maass der Muskelthätigkeit, welches fortdauernd verwendet werden muss, um den Körper im Gleichgewichte der Bewegung zu erhalten, ähnlich wie das sinkende Gewicht einer Wanduhr den gleichförmigen Gang ihres Triebwerkes sichert.

Die zum Gehen verwerthete Arbeit kann auch als eine Arbeit der Schwere betrachtet werden, weil der bewegten Körpermasse die Geschwindigkeitsverluste schon durch das (gleichsam auf einer schiefen Ebene von sehr geringer Neigung vor sich gehende) Sinken des Schwerpunktes, d. h. des gesammten Körpergewichtes, immer wieder ersetzt werden können, die Muskelthätigkeit also nur zur Aufgabe hat, den Schwerpunkt regelmässig wieder zur frühern Höhe zu schaffen.

Derselbe Fussgänger kann sich bekanntlich nach Willkür sehr un-

gleich anstrengen, z. B. den Körper mehr oder weniger auffallend heben, ohne dass Beschleunigung der Bewegung die nothwendige Folge vergrösserter Anstrengung sein muss. Diese war also in solchen Fällen überflüssig, und muss in zwecklos vermehrten Bewegungshindernissen aufgegangen sein. Mit dem geringsten Aufwande von Arbeit gehen zu können ist eine Kunst, die man bei allen, welche sie besitzen, an der Leichtigkeit ihres Ganges erkennt, eine Kunst, die, wer immer sich gesunder Glieder erfreut, wenn nicht durch Erfahrung sich aneignet, doch aneignen könnte.

125 **Zugkraft der Menschen und Thiere.** Wenn ein Arbeiter eine Last schleppt, so muss diese an dem Sinken und Heben des Körpers Theil nehmen, und dadurch die Arbeit des Gehens verhältnissmässig erschweren. Doch ist dies nicht die einzige mit dem Transport von Gewichten verknüpfte Anstrengung, indem wie bekannt, schon das blosse Halten einer Last, ja selbst das Aufrechtstehen ohne Belastung, ausser derjenigen des eignen Körpers, nach und nach die Muskelkräfte aufzehrt.

Bei der Verwendung der Körperkräfte zum Drücken oder Ziehen in horizontaler Richtung kommen, den vorher erörterten sehr ähnliche Bedingungen in Betracht. Der zu überwindende Widerstand ist nur ein Zusatz zu den bereits vorhandenen Hindernissen des Fortschreitens; einer vermehrten Reibung zu vergleichen, welche die Füsse erfahren. Er kann also nur durch ein verstärktes Senken und beziehungsweise Heben des Schwerpunktes, d. h. durch vermehrte Arbeit während der Fortbewegung ausgeglichen werden.

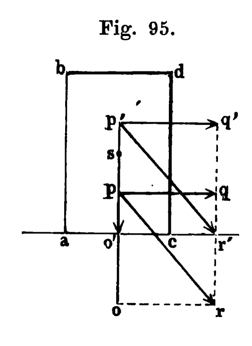
Auf denselben Bedingungen beruht auch das Fortschreiten der Pferde und anderer Vierfüsser, sowie ihre Benutzung als Zugkraft.

126 Es ist bemerkenswerth, dass der Körperbau des Pferdes die Verwerthung seiner Kräfte zum Ziehen vorzugsweise und weit mehr begünstigt, als dies verhältnissmässig bei dem menschlichen Arbeiter der Fall ist. Da nämlich die Schwerlinie des Pferdes in die Mitte zwischen seine Vorder- und Hinterfüsse fällt, also in einen Abstand von jedem der beiden Fusspaare, der mehr beträgt, als die ganze Länge der menschlichen Fussplatte, so ist das Standfähigkeitsmoment des Pferdes nicht nur absolut, sondern auch verhältnissmässig zur Körperkraft weit grösser als das des Menschen. Die Standfähigkeit ist aber die äusserste Gränze für die Grösse des Momentes der Zugkraft, d. h. des Productes der Zugkraft mit dem Abstande ihres Angriffspunktes von dem Drehpunkte. Ein Arbeiter der seine Muskelthätigkeit über diese Gränze hinaus anstrengen wollte, würde in demselben Augenblicke, da beim Versuche des Fortschreitens seine Füsse neben einander gelangten, rückwärts fallen müssen.

Man erkennt hieraus, dass auch die Lage der Angriffsstellen der Zugkraft nicht gleichgültig ist. Es sei $abcd$ (Fig. 95) der Durchschnitt eines auf horizontaler Fläche ruhenden Körpers, s sein Schwerpunkt; a und c bezeichnen die Gränzpunkte seiner Stützen, und $P \cdot oc$ das

Standfähigkeitsmoment mit Bezugnahme auf c als Drehpunkt. Eine Kraft Q die in dem Punkte p angreift, ziehe in der Richtung von p nach q, gleichlaufend mit der Grundfläche, und es sei $P : Q = po : pq$, so erhält die Resultirende der beiden Kräfte P und Q die Richtung pr. Sie durchschneidet also die Grundfläche zwischen den Stützen a und c, und der Körper behauptet seine Stellung. Wenn aber die Kraft Q mit derselben Stärke wie vorher bei p jetzt bei p' ihre Angriffsstelle hat, also $Q : P = p'q' : p'o' = pq : po$ sich verhält, so durchschneidet die Resultirende beider Kräfte die Grundfläche in r', d. h. ausserhalb des Drehpunktes c. Der Körper muss folglich umfallen.

Fig. 95.



Die gewöhnliche und auch die wirksamste Angriffsstelle für die von einem Arbeiter ausgeübte Zugkraft ist die Schulterhöhe, ungefähr 1,5 Meter über dem Boden. Nehmen wir beispielsweise das Gewicht des Arbeiters zu 75 Kilo und seine auf die Dauer nach aussen nutzbare Muskelkraft zu 14 Kilo. Die Schwerlinie trifft bei aufrechtem Stande des Körpers in die Fussfläche in höchstens 0,14 Meter Abstand von dem Absatze des Fusses. Um das um die Schulter gelegte Zugseil bis zu 14 Kilo spannen zu können, muss die von dem Arbeiter ausgeübte Kraft ein statisches Moment $= 14 \,.\, 1{,}5 = 21$ erhalten. Wenigstens ebenso viel muss die Standfähigkeit seines Körpers betragen, d. h. der Hebelarm derselben muss von dem Absatze des Fusses an gerechnet eine Länge von $\frac{21}{75} = 0{,}28$ Meter annehmen. Der Arbeiter, um mit der vollen Kraft von 14 Kilo ziehen zu können, ist daher genöthigt, seinen Körper so weit vorzubeugen, dass die Schwerlinie die Spitze des Fusses erreicht und selbst darüber hinausfällt. Das Fortschreiten in einer so unbequemen Stellung ist aber an und für sich schon anstrengender und die Körperkräfte rascher erschöpfend.

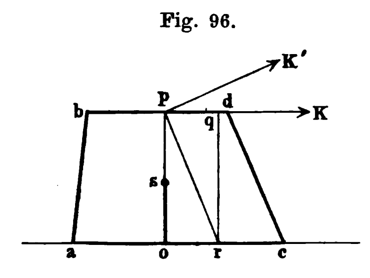
127 Die Frage, ob ein auf dem Boden frei liegender Körper, den man durch Druck oder Zug in Bewegung zu setzen sucht, zum Gleiten kommen oder umfallen wird, steht in engster Beziehung zu den Erörterungen des vorhergehenden Paragraphen. Denn auch hier kommt die Höhe des Angriffspunktes der von aussen thätigen Einwirkung nicht weniger als die Grösse der Standfähigkeit in Betracht. Ein Blick auf die Fig. 95 lässt alsbald erkennen, dass ein Körper vom Gewichte P, der durch eine Kraft $Q = \mu P = pq$ gleitend fortgezogen werden kann, wenn diese Kraft im Punkte p angreift, umfallen muss, sobald dieselbe Kraft den Punkt p' als Angriffsstelle wählt.

Räder und Rollen haben, wie wir wissen, nur eine geringe Standfähigkeit, und die Kraft, welche sie in Bewegung zu setzen sucht, hat ihre Angriffsstelle meistens in verhältnissmässig bedeutender Höhe, im

Mittelpunkte oder am Scheitel, so kommt es, dass zum Hervorbringen des Wälzens ein Druck ausreicht, der nur $^1/_{20}$ bis $^1/_{24}$ von demjenigen beträgt, welcher für das Gleiten nothwendig sein würde.

128 Wenn ein Körper durch die zur Hervorbringung des Gleitens nöthige Zugkraft nicht umgeworfen werden kann, so ist, immer gleiche Richtung des Zuges vorausgesetzt, die Höhe des Angriffspunktes ohne Bedeutung. Denn es sei *abcd* (Fig. 96) der betreffende Körper, *s* sein Schwerpunkt, die Linie pK, gleichlaufend mit der Bahn *ac*, die Richtung der Zugkraft μP, und es verhalte sich das Gewicht des Körpers $P : \mu P = po : pq$, so ist pr die Richtung und verhältnissmässige Grösse der Resultirenden beider Kräfte. Dieselbe lässt sich in ihrem Angriffspunkte r wieder in die Seitenkräfte $qr = P$ und $or = \mu P$ zerlegen; woraus ersichtlich, dass die Zugkraft, so lange unter ihrer Einwirkung die Standfähigkeit des bewegten Körpers ungefährdet bleibt, immer so angesehen werden kann, als befände sich ihr Angriffspunkt am Boden. Eine wirklich höher liegende Angriffsstelle hat keinen andern Einfluss, als dass dadurch die Schwerlinie gleichsam nach vorn gerückt (in der Figur von po nach qr), d. h. ein Theil des Druckes von den hinteren Theilen der Grundlage weggenommen und auf die vorderen übertragen wird. Die Grösse der Reibung kann dadurch bekanntlich nicht geändert werden.

Fig. 96.



Bildet die Zuglinie pK' mit derjenigen der Bahn einen Winkel α, so zerfällt die Zugkraft Q in die Componenten $Q \cos \alpha = \mu P$, gleichlaufend mit der Bahn und $Q \sin \alpha$ winkelrecht gegen die Bahn. Durch die letztere wird der Druck auf die Bahn, je nachdem der Zug aufwärts oder abwärts geneigt ist, vermindert oder vermehrt.

129 **Die gleitende Reibung als Gränze der Zugkraft.** Körper, die sich in fortschreitender Bewegung befinden, können dabei einen andern Körper nur dann nach sich ziehen, wenn ihre gleitende Reibung grösser oder wenigstens ebenso gross ist, als der durch die Zugkraft zu wältigende Widerstand. So kann man den einen Fuss nur dadurch in eine schleifende Bewegung versetzen, dass man das Hauptgewicht des Körpers auf dem andern ruhen lässt. Aus demselben Grunde beruht die Möglichkeit des Fortziehens eines Schlittens auf dessen vergleichungsweise geringerer gleitenden Reibung. Ein Pferd, wie gross immerhin seine Körperkraft sein möge, kann auf glatter Eisfläche keine verhältnissmässige Zugkraft ausüben. Wohl aber lässt sich dieselbe durch Schärfen der Hufeisen und dadurch vergrösserten Reibungswiderstand bedeutend

verstärken. Das Gewicht eines Pferdes multiplicirt mit dem Coefficienten der Reibung, die seine Füsse auf der Strasse erfahren, bezeichnet die Gränze seiner möglichen Zugkraft. Seine Leistungsfähigkeit kann daher vergrössert werden, wenn die Hufeisen in eine rauhe Bodenfläche eingreifen, die Last dagegen mit geringer Reibung über eine glatte Bahn gleitet.

Da die Fortbewegung von Lasten auf wagerechten Strassen nur wegen der Reibung eine Kraft in Anspruch nimmt, so ist jede Vorkehrung, durch welche die Reibung vermindert wird, einem wirklichen Gewinne an Kraft gleich zu setzen. Die folgende Zusammenstellung über die Leistungsfähigkeit eines Pferdes unter verschiedenen Bedingungen giebt eine sehr deutliche Anschauung von diesem Kraftgewinne.

Ein Pferd trägt auf seinem Rücken	125	Zollpfund
Dasselbe zieht auf einer mit Eisen beschlagenen Schleife	320	„
Dasselbe zieht auf einem Wagen mit eisernen Axen		
auf Feldwegen	1200	„
auf guten Landstrassen	3000	„
auf der Eisenbahn	30000	„

130 Die Zugkraft der Locomotiven ist in ähnlicher Weise wie die der Pferde von der gleitenden Reibung ihres Gewichtes abhängig. Jedoch nur der Theil dieses Gewichtes kommt hierbei in Betracht, welcher auf die Axen der Treibräder drückt, d. h. derjenigen Räder, welche mit den Kolben der Dampfmaschine, durch Vermittlung von Treibstange und Kurbel, in einer solchen Verbindung stehen, dass die Bewegungen der einen die der andern immer nach sich ziehen müssen. Man erblickt bei den kleineren Dampfwagen ein Paar, bei den grösseren zwei Paar solcher Räder, in der Art zusammenhängend (verkuppelt), dass ihre Umdrehungen stets gleichzeitig und in genau gleichen Zeitabschnitten erfolgen müssen. Die beiden Räder im einen Falle oder die vier Räder im andern haben daher auch genau dieselben Grössen. Es begreift sich hiernach, dass bei regelmässigem Gange der Maschine das geradlinigte Fortschreiten auf der Bahn, für je einen Hin- und Hergang des Dampfkolbens, gleich ist dem Umfange eines Treibrades. Unsere Dampfwagen sollen aus Gründen grösserer Sicherheit wenigstens sechs Räder haben. Wenigstens zwei von diesen hängen gewöhnlich nicht mit den Dampfkolben zusammen und lassen sich mit voller Freiheit nach der einen oder andern Seite um ihre Axen drehen. Wenn eine Locomotive zwei Paar Treibräder besitzt, so hat es keine Schwierigkeit, ihren Bau so anzuordnen, dass die ganze Last auf ihren beiden Axen ruht. Bei den Locomotiven mit einem Paar Treibräder wird aber immer ein Theil des Gewichtes von den Axen der freien Räder getragen. Sobald der Dampfkolben sich zu bewegen beginnt, folgen die Räder und der Wagen sucht fortzuschreiten. Sind

noch andere Wagen angehängt, so werden diese nachgezogen, aber nicht ohne Widerstand zu äussern, einer Kraft vergleichbar, welche die Locomotive rückwärts zu ziehen sucht. Bei einer gewissen Grösse dieses Widerstandes verzögert er den Lauf des Wagenzuges und bringt endlich den Dampfwagen zum Stehen. Bei hinlänglicher Kraft der Dampfmaschine können zwar die Treibräder auch dann noch im Sinne des Fortschreitens gedreht werden, allein ohne gleichwohl den Standort zu verändern; es kommen nach und nach alle Punkte ihrer Radumfänge mit denselben Stellen der Bahn in Berührung, es entsteht also eine gleitende Reibung, deren Grösse durch den Gesammtwiderstand der anhängenden Wagen gegeben ist. Eine thätige Kraft von derselben Grösse oder nur um Weniges grösser und in gleichem Sinne wie jener Widerstand des angehängten Wagenzuges wirksam würde den Dampfwagen ungeachtet der entgegengesetzten Umdrehung seiner Treibräder rückwärts ziehen, also die gleitende Reibung der letzteren überwinden. Man kann daher aussprechen: Die gleitende Reibung der Locomotive bezeichnet die Gränze der Kraft, welche ihre Dampfmaschine als Zugkraft zu verwerthen im Stande ist. Hinlängliche Stärke der Dampfmaschine vorausgesetzt, wächst mithin ihre Zugkraft mit der Grösse des auf den Treibrädern lastenden Druckes, und ein Dampfwagen, der eine sehr grosse Kraft ausüben soll, muss nicht nur eine starke Maschine, sondern auch ein sehr bedeutendes Gewicht besitzen.

131 Auf unseren Eisenbahnen bewegen sich eiserne Räder auf Schienen von Eisen. Der Coefficient der trocknen Reibung von Eisen auf Eisen beträgt erfahrungsmässig nicht unter 0,20. Derselbe könnte aber allerdings in besonderen Fällen, z. B. in Folge des Herabfliessens von Oel durch das fühlbar Fettigwerden der Schienen, weiter bis zu 0,15 heruntergehen. Setzen wir diese Gränze, so beträgt die gleitende Reibung einer Locomotive wenigstens 15 Procent, oder nahe $^1/_7$ des auf ihre Treibräder ausgeübten Druckes. So lange der Widerstand der angehängten Wagen zusammengenommen weniger beträgt, können sie fortgezogen werden.

132 **Transport durch Menschen und Thiere auf wagerechtem Wege.** Das Fortschaffen von Lasten auf dem Rücken oder den Schultern des Menschen oder auf dem Rücken des Pferdes ist, wie bekannt, eine anstrengende, im Umfange überdies sehr beschränkte und dadurch wenig fördernde Art des Transportes. Das daraus zu erhoffende Arbeitsergebniss (Effect) wird zudem noch bedeutend vermindert, wenn Lehrgänge damit verbunden sind, d. h. wenn der Arbeiter den jedesmaligen Rückweg, ohne etwas zu tragen, zurückzulegen hat. Gegenstände, deren Beschaffenheit ein Traggefäss erfordert, geben, sobald das Gewicht dieses Gefässes nicht ganz ausser Betracht fällt, eine neue Veranlassung zur Minderung des Effectes.

133 Um die Leistungsfähigkeit eines Lastträgers unter verschiedenen Umständen im Voraus berechnen zu können, hat Franz Joseph von

Gerstner in seinem Handbuche der Mechanik vom Jahre 1832 eine ihm eigenthümliche Formel aufgestellt, welche er Kraftformel nennt, und auf deren Grundlage die tägliche Leistung sich bestimmt:

$$E = P \, . \, v \, . \, z = K \left(2 - \frac{v}{c}\right) \left(2 - \frac{z}{t}\right) v \, . \, z.$$

In dieser Gleichung bedeuten die Zeichen P, v und z die wirklich angewendete Tragkraft, Geschwindigkeit und Arbeitszeit, die Zeichen K, v und t die entsprechenden Mittelwerthe, die, wenn sie sich während der ganzen Arbeitszeit einhalten lassen, nach Annahme zu einem Maximum des Effectes führen sollen. Zugleich ist die Voraussetzung gemacht, dass unter der Bedingung $v = 2\,c$ oder $z = 2\,t$ gar kein Effect erzielt werden kann. Dies will sagen: dass ein Arbeiter, der mit der doppelten normalen Geschwindigkeit geht, ausser dem eignen Körper auf die Dauer nicht noch ein anderes in Betracht kommendes Gewicht mit sich führen kann, und dass schon das blosse Aufrechterhalten des Körpers während der doppelten normalen Arbeitszeit eine so grosse Anstrengung erfordert, dass dann die Körperkräfte nicht zugleich auch noch zu anderen Zwecken dauernd verfügbar bleiben. Uebrigens bestehen die beiden Factoren $\left(2 - \frac{v}{c}\right)$ und $\left(2 - \frac{z}{t}\right)$ ganz unabhängig von einander, und jeder für sich kann eine Aenderung der Kraft P herbeiführen.

Die Gerstner'sche Formel hat keineswegs eine allgemeine Anerkennung gefunden und ihre Brauchbarkeit bedarf noch sehr einer gründlichen Prüfung durch die Erfahrung. Doch ist nicht in Abrede zu stellen, dass sie bei Ueberschlagsberechnungen, z. B. von Erdarbeiten, in nicht allzu weit gesteckten Gränzen angewendet, einen nützlichen Anhalt bieten kann.

134 Als Grundlage zur Bestimmung der mittlern Leistungsfähigkeit des Menschen wurde früher (Nro. 56) angenommen: $K = 14$ Kilogramm, $c = {}^3/_4$ Meter bei $t =$ 8stündiger Arbeitszeit. Danach wäre der grösste tägliche Effect, als Durchschnittszahl aus dem Arbeitsergebnisse einer grossen Anzahl männlicher Arbeiter abgeleitet:

$$E = K \, . \, c \, . \, t = 302\,400 \text{ Meter-Kilogramm.}$$

Dieser Effect mindert sich jedoch im Sinne vorstehender Formel, sobald die Beschaffenheit der Arbeit eine Abweichung von den mittleren Werthen K, c und t nothwendig macht. Z. B. beim Transporte von Baumaterialien auf kurze Strecken sind Lehrgänge unvermeidlich. Der Weg wird zweimal zurückgelegt und führt doch nur einmal zu einer nützlichen Arbeit. Es könnte scheinen, dass in einem solchen Falle der Effect auf die Hälfte des Maximums heruntergehen müsse; die Formel lehrt jedoch, dass dann durch richtige Wahl der Verhältnisse ein dem grössten Werthe viel näher kommendes Ergebniss erzielt werden könne.

Die Rückwege können ohne Vergrösserung der Anstrengung mit grösserer, nach dem Ausspruche der Formel mit doppelter Geschwindigkeit $= 2c$ gemacht, und dadurch kann ein längerer Zeitraum für die nützliche Arbeit gewonnen werden. Ein weiterer Vortheil lässt sich erwarten aus einer Verminderung der Geschwindigkeit v während des Transportes, folglich einer verringerten Anzahl der Gänge bei gleichzeitiger Vermehrung der Traglast P.

Es sei n die Anzahl der Gänge und w die Länge des Weges, welcher bei jedem Gange einmal mit Belastung, das andere Mal ohne Belastung zurückgelegt werden muss, so ist nwP die nützliche Arbeit, und es handelt sich nun darum, dieselbe unter den gegebenen Umständen möglichst gross zu machen. Die Zeit eines Hinweges ist $= \frac{w}{v}$, die Zeit eines Rückweges $= \frac{w}{2c}$, daher die ganze Arbeitszeit

$$z = n\left(\frac{w}{v} + \frac{w}{2c}\right) = n\,\frac{w}{2c}\left(\frac{2c+v}{v}\right)$$

und

$$nw = \frac{2cvz}{2c+v}.$$

Da ferner $P = K\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right), = \frac{K}{c}(2c - v)\left(2 - \frac{z}{t}\right)$, so ergiebt sich

$$nwP = 2K\,\frac{(2c-v)\,v}{2c+v}\left(2 - \frac{z}{t}\right)z.$$

Dieser Ausdruck erhält seinen grössten Werth*) für $z = t$, also bei achtstündiger Arbeitszeit und indem zugleich $v = 0{,}828\,c$ gesetzt wird. Unter diesen Bedingungen findet sich dann

$$P = \frac{K}{c}(2c - 0{,}828\,c) = 1{,}172\,K$$

und

$$n = \frac{2c\,.\,0{,}828\,c\,.\,t}{(2c + 0{,}828\,c)\,w} = \frac{1{,}656\,c\,.\,t}{2{,}828\,w} = 0{,}5856\,\frac{c\,.\,t}{w},$$

mithin

$$nwP = 0{,}5856\,.\,1{,}172\,K\,.\,ct = 0{,}6863\,K\,.\,c\,.\,t.$$

135 Der Soldat auf dem Marsche hat gewöhnlich eine Last zu tragen, welche seine mittlere Tragkraft K bedeutend überschreitet; während die seiner Körperkraft entsprechende mittlere Geschwindigkeit des Fortschreitens eingehalten wird. Die Zeit, welche auf den Marsch verwendet werden kann, ohne die Kräfte mehr zu erschöpfen, als durch kräftige Nahrung täglich sich wieder ersetzt, findet sich hiernach aus der Gleichung

$$P = K\left(2 - \frac{c}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right).$$

---

*) Indem man nach bekannten Regeln die Maximalwerthe von z und v, und zwar beide unabhängig von einander aufsucht.

Sie leitet zu dem Werthe

$$z = t\,\frac{2\,K - P}{K}.$$

Da zum Kriegsdienste vorzugsweise die kräftigeren jungen Männer ausgesucht werden, so lassen sich die Mittelwerthe K und c in diesem Falle höher in Anschlag bringen, als vorher für männliche Arbeiter überhaupt im Durchschnitt angenommen worden war. Setzen wir nun mit Gerstner für Soldaten $K = 17$ Kilogramm und $c = 1$ Meter bei $t =$ 8stündiger Arbeitszeit; und nehmen wir an, dass der Soldat auf dem Marsche anstatt mit 17, mit 25 Kilogramm belastet sei, so ergiebt sich $z = 8\,\frac{34 - 25}{17} = 4{,}235$ Stunden. Der während dieser Zeit zurückgelegte Weg ist

$$z\,.\,60\,.\,60\,.\,1 = 4{,}235\,.\,3600 = 15\,246 \text{ Meter},$$

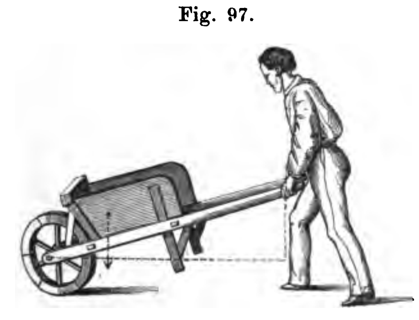
oder da 7416 Meter gleich einer geographischen Meile,

$$\frac{15\,246}{7416} = 2{,}056 \text{ Meilen}.$$

Im Sinne obiger Grundannahmen müssten grössere Märsche mehrere Tage hinter einander fortgesetzt, die Truppen erschöpfen, während bei einer Belastung von nur 17 Kilo, auf guten Wegen, täglich 4 Meilen ohne übermässige Anstrengung zurückgelegt werden könnten. Da Strassen und Wege selten ganz horizontal liegen, sondern viel gewöhnlicher Steigungen und Senkungen mit einander abwechseln, so ist dadurch eine neue Veranlassung vergrösserter Anstrengung gegeben, so dass, selbst dann wenn man die berechneten Zahlen streng einhalten wollte, von Zeit zu Zeit Rasttage nöthig wären.

136 **Verführen von Lasten mit Schiebkarren.** Zur Förderung durch Menschenhände wird sehr häufig der Schiebkarren (Fig. 97 und Fig. 98) gebraucht, insbesondere für kurze Wegesstrecken, auf schmalen, übrigens festen Pfaden; so bei Berg- und Hüttenarbeiten, bei Erdarbeiten, zum Herbeischaffen von Baumaterialien etc. Der Schiebkarren kann als einarmiger Hebel aufgefasst werden, dessen Drehpunkt durch die Axe des Rades dargestellt ist. Der winkelrechte Abstand derselben von der Schwerlinie des beladenen Karrens bildet den Hebelarm der Last, der Abstand von der Richtung der durch die Hände ausgeübten Tragkraft den Hebelarm der Kraft. Ist das Verhält-

Fig. 97.



niss beider Hebelarme wie $1 : m$, so haben die Hände $\frac{1}{m}$ der Last zu tragen, während $\frac{m-1}{m}$ auf dem Boden ruhen. Der Karrenführer transportirt also mittelst dieser Geräthschaft eine $m$mal grössere Last, als er

Fig. 98.



selbst zu tragen hat; und gerade darauf beruht ihr Vorzug. Der auf den Boden drückende Theil der Ladung bewirkt zwar Reibung; ihr Einfluss ist jedoch vergleichungsweise so unbedeutend, dass wir denselben in der folgenden Rechnung als unwesentlich vernachlässigen wollen. Dagegen kann das Gewicht des Karrens selbst nicht unberücksichtigt bleiben, denn so viel, als von demselben der Arbeiter zu tragen hat, entgeht dem nützlichen Effecte und muss also von diesem in Abzug gebracht werden.

Es sei Q die Ladung und g das Gewicht des leeren Karrens, so ist, auf achtstündige Arbeitszeit berechnet, die Tragkraft des Arbeiters

$$P = \frac{Q + g}{m} = K\left(2 - \frac{v}{c}\right) = \frac{K}{c}\,(2\,c - v),$$

folglich

$$Q = \frac{m\,K}{c}\,(2\,c - v) - g \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

und der Nutzeffect

$$E = Q\,v\,z = \left\{\frac{m\,K}{c}\,(2\,c - v)\,v - g\,v\right\}\,z.$$

Dieser Werth erreicht mit Beziehung auf die Gerstner'sche Formel ein Maximum für

$$v = c\left(1 - \frac{g}{2\,m\,K}\right).$$

D. h. der Nachtheil der Mitführung des Karrens als Antheil der Last vermindert sich, indem man die Geschwindigkeit des Fortschreitens um

etwas verringert, und dafür nach Ausweis von Gleichung (1) die Ladung Q vergrössert.

Gewöhnlich muss jedoch der Schiebkarren leer zurückgebracht werden, und dann gelangt man zu ähnlichen Folgerungen wie die in Nro. 134 betrachteten.

Beziehen wir uns wieder auf achtstündige wirkliche Arbeitszeit und setzen die Kraft für die Bewegung des beladenen Schiebkarrens wie vorher

$$P = \frac{Q + g}{m} = \frac{K}{c}(2c - v),$$

die Kraft zur Rückbewegung des leeren Karrens

$$P' = \frac{g}{m} = \frac{K}{c}(2c - v').$$

Die erste dieser Gleichungen führt, wie wir schon gesehen haben, zu dem Ausdrucke

$$Q = \frac{mK}{c}(2c - v) - g \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

aus der zweiten folgt:

$$v' = c\left(2 - \frac{g}{mK}\right) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Zeit für einen Hinweg $= w$ ist: $\frac{w}{v}$, die Zeit für einen Rückweg: $\frac{w}{v'}$; also, wenn $n =$ der ganzen Anzahl Ladungen, die ganze Arbeitszeit

$$z = n\left(\frac{w}{v} + \frac{w}{v'}\right) = nw\,\frac{v + v'}{vv'},$$

und die gesammte unter Belastung zurückgelegte Wegeslänge:

$$nw = \frac{v}{v + v'}\,v'z \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Durch Multiplication von (1) mit (3) ergiebt sich der Nutzeffect

$$E = nwQ = v'z\,\frac{v}{v + v'}\left\{\frac{mK}{c}(2c - v) - g\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

Derselbe gewinnt seinen grössten Werth für

$$v = -v' + v'\sqrt{\frac{2c + v'}{v'} - \frac{cg}{mKv'}} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Setzt man beispielsweise $K = 14$ Kilo, $c = 0{,}75$ Meter, das Gewicht des Karrens $g = 15$ Kilo und $m = 4$; so berechnet sich die Geschwindigkeit für den Rückweg ohne Ladung (2)

$$v' = 1{,}30 \text{ Meter},$$

die Geschwindigkeit mit beladenem Karren (5)

$$v = 0{,}54 \text{ Meter},$$

ferner (3), da nach Annahme $z = t$ sein soll, die Wegeslänge

$$nw = 10993 \text{ Meter},$$

die Grösse der vortheilhaftesten Ladung (1)

$$Q = 56{,}68 \text{ Kilo};$$

das Gewicht der Ladung sammt Karren $Q + g = 71{,}68$, die vom Karrenführer ausgeübte Kraft,

für den Hinweg $$P = \frac{Q + g}{m} = 17{,}92 \text{ Kilo}$$

für den Rückweg $$P' = \frac{g}{m} = 3{,}75 \text{ Kilo.}$$

Die wirkliche Grösse seiner Arbeit beträgt daher

$(P + P')\,nw = 21{,}67 . 10\,993 = 238\,220 = 0{,}7878\,Kct$ Meter-Kilogramm, also wenig mehr als $^3/_4$ des Maximums (Nro. 134). Gleichwohl hat sich der daraus hervorgehende Nutzeffect, d. h. die Grösse der fortgeführten Last, bis zum Betrage (4)

$$nw\,Q = 10\,993 . 56{,}68 = 623\,100 = 2{,}06\,Kct \text{ Meter-Kilogramm}$$

erhoben. Weiter oben hatten wir gefunden, dass der Transport ohne Beihülfe des Schiebkarrens unter ähnlichen Umständen zu einem Effecte von nur 0,6863 Kct Meter-Kilogramm führte.

Da $nw = 10\,993$, also fast $= 11\,000$ Meter gefunden wurde, so ergiebt sich unter der Bedingung des günstigsten Arbeitsverhältnisses die Anzahl der Fuhren während einer wirklichen Arbeitszeit von acht Stunden

$$n = \frac{11\,000}{w}.$$

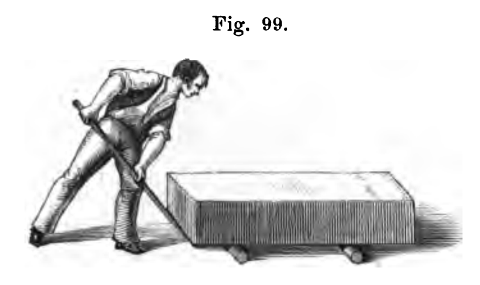
Z. B. auf eine Entfernung von 100 Meter kommen auf einen Arbeiter durchschnittlich 110 Fuhren.

137 Um diese Berechnungen beispielsweise auf eine Erdarbeit anzuwenden, wollen wir annehmen, es sollen 100 Cubikmeter fester Erde ausgehoben und auf 100 Meter Entfernung mit dem Schiebkarren verführt werden. Ein Cubikmeter noch fest liegender Erde wiegt ungefähr 2100 Kilo. Die tägliche Leistung eines Arbeiters beträgt 6231 Kilo 100 Meter weit. Um die 100 Cubikmeter Erde auf die verlangte Entfernung zu transportiren, sind demnach $\frac{2100 \,.\, 100}{6231} = 33{,}7$ Tagelöhne in Rechnung zu bringen.

Dieses Rechnungsergebniss ist begreiflicher Weise von dem Verhältnisse der Hebelarme des Schiebkarrens abhängig. Es würde sich weniger günstig herausstellen, wenn man als Transportmittel den Schiebkarren Fig. 98 gewählt und $m = 3$ gesetzt hätte. In so weit es äussere Verhältnisse, namentlich die Festigkeit des Weges gestatten, sucht man daher den zur Aufnahme der Erde bestimmten Kasten der Radaxe möglichst nahe zu bringen und dadurch den Hebelarm der Last zu verkürzen. Das Einsinken des Rades in den Boden und die dadurch bewirkte grössere Reibung verhindert man durch die Anordnung einer Bohlenbahn.

Fortschieben auf Walzen. Auf kurzen Wegesstrecken, jedoch nur auf wagerechtem, ebenem und hartem Grunde benutzt man zuweilen das Verschieben auf Walzen (Fig. 99). Die Last ruht auf zwei Walzen. Durch einen Druck in Bewegung gesetzt, zieht sie sich gleichsam von ihren Unterlagen ab, während diese über den Boden rollen. Es kommen also fortwährend andere Punkte der Rollen mit anderen Punkten einerseits der Last, andererseits des Bodens in Berührung, so dass zwei wälzende Reibungen entstehen. Durch jede Umdrehung der Walzen schreitet die Last um eine deren Umfang gleiche Strecke vorwärts. Da sie sich aber gleichzeitig von den Walzen abzieht, muss sie denselben Weg noch einmal zurücklegen. Die Geschwindigkeit ihres Fortschreitens ist also doppelt so gross als die der Walzen. Es folgt hieraus, dass letztere gegen die erstere mehr und mehr zurückbleiben und dass bald die jeweilig hinterste Walze ganz frei wird. Man muss sie dann während des Fortganges der Arbeit vorn wieder unterschieben. Der hierbei zu wältigende Widerstand vermindert sich, nachdem was wir über die wälzende Reibung in Erfahrung gebracht haben, umgekehrt wie der Durchmesser der Walzen. Er wird durchschnittlich $^1/_{20}$ der gleitenden Reibung, und wenn man diese zu 0,5 veranschlagt, höchstens $^1/_{40}$ vom Gewichte der Last betragen. 138

Fig. 99.

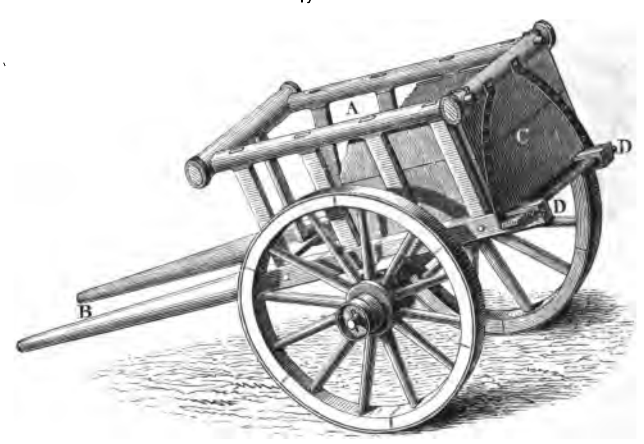


Es könnte zwar scheinen, dass dieser Widerstand zweimal in Rechnung gebracht werden müsse, allein man darf nicht vergessen, dass dafür auch die Wegesstrecke sich verdoppelt, um welche die Last fortschreitet. Dergestalt, dass für eine bestimmte Wegeslänge w, um welche ein Gewicht p mit Rollen fortgeschoben werden soll, die dafür erforderliche Arbeit zu $\frac{w \cdot p}{40}$ in Rechnung zu nehmen ist.

Fuhrwerke auf wagerechter Bahn. Auf geebneten und hinlänglich breiten Wegen findet an der Stelle des Schiebkarrens eine vortheilhaftere Verwendung der Karren mit zwei Rädern (Fig. 100, a.f.S.) statt. Derselbe kann, wie man weiss, je nach seiner Grösse, bestimmt sein von einem oder mehreren Menschen gedrückt, oder auch von einem Pferde gezogen zu werden, in welchem Falle letzteres in der Scheere eingespannt ist. Er unterscheidet sich von dem Schiebkarren wesentlich noch dadurch, dass der zur Aufnahme der Ladung bestimmte Kasten auf der Radaxe sitzt. In Folge dessen hat man freie Hand, die Anordnung so zu treffen, dass die Schwerlinie des beladenen Wagens zwar immer noch zwischen das vordere Ende der Scheere und die Radaxe, der 139

letztern jedoch so nahe fällt, dass der Arbeiter nur noch einen kleinen Theil der Last (nur so viel als nöthig, damit der Wagen nicht nach der andern Seite überschlagen kann) zu tragen hat, und bei weitem den


Fig. 100.



grössten Theil seiner Kraft zur Wältigung der Reibungshindernisse frei behält. Denn letztere bilden unter diesen Umständen die eigentliche oder doch den Haupttheil der Last und dürfen daher nicht mehr, wie es bei dem Schiebkarren wohl gestattet war, unberücksichtigt bleiben.

Bezüglich des kleinern Theiles vom Gewichte des beladenen Wagens, welches der Arbeiter, z. B. das eingespannte Pferd, zu tragen hat, bildet der zweirädrige gleich dem Schiebkarren einen einarmigen Hebel, dessen theoretische Angriffspunkte in einer geraden durch die Radaxe parallel mit der Bahn geführten Linie liegen. Wenn, so wie in Fig. 100 dargestellt ist, die Richtung der Zugkraft, in die Ebene der Scheere fallend, ihre unmittelbare Angriffsstelle oberhalb der Axe findet, so combinirt sich diese Kraft mit dem durch die Schwerlinie gehenden Druck zu einer Resultirenden, welche die Hebellinie in einem Punkte durchschneidet, der von der Axe weiter entfernt liegt als der Durchschnittspunkt der Schwerlinie, und welche aus diesem Grunde den senkrechten Druck auf das vordere Ende der Scheere vergrössert. Mit anderen Worten: dadurch dass die Zugkraft oberhalb der Axe angreift, wird ein Theil des Druckes der Ladung von der hintern Abtheilung des Wagens weggenommen und auf die vordere übertragen, also die Schwerlinie scheinbar vorgerückt. Eine bedeutende Höhe der Scheere über der Radaxe könnte aus diesem Grunde nachtheilig werden, wenn auch die Grösse der Zugkraft an und für sich dabei keine Aenderung erfährt. Andererseits kann dadurch, im Falle die Schwerlinie der Radaxe sehr nahe liegt, auf steigender Strasse der Gefahr eines Umkippen des Wagens nach hinten vorgebeugt werden.

140 Bei dem Wagen mit vier Rädern fällt die Schwerlinie immer zwischen die Axen, und die Zugkraft hat wesentlich nur die der Bewegung entgegen stehenden Hindernisse zu überwinden. Die Richtung der Zugkraft, gleichlaufend mit der Strasse, darf man sich immer so vorstellen, als gehe sie durch die Radaxen, mag nun ihre wirkliche Angriffsstelle darüber oder darunter liegen. Man erkennt dies alsbald aus dem Umstande, dass der von der Kraft zurückgelegte Weg von dieser Angriffsstelle unabhängig ist. Das Anbringen der Räder hat zunächst nur die Folge, dass die gleitende Reibung der Schleife in die wälzende des Rades verwandelt worden ist, ohne dass darum die erstere beseitigt werden konnte. Denn die in der Mitte des Rades befindliche kreisrunde Fläche, die Nabe, welche den Axenzapfen und mit ihm das Gewicht des Wagens aufnimmt, bildet gleichsam die Bahn, deren sämmtliche Punkte nach einer vollen Umdrehung mit der aufliegenden Stelle der Axe in Berührung kommen, und welche dem zu Folge eine Art gleitender Reibung, die sogenannte drehende oder Zapfenreibung erzeugen.

Allerdings sind jedoch die Bedingungen möglichst günstig gestellt, um diese Reibung auf ihren kleinsten Werth zurückzuführen, indem man Nabe und Zapfen aus Eisen ausführen, dieselben sorgfältig abdrehen und glätten, und während der Bewegung beide reichlich in Schmiere halten kann.

141 Noch ein anderer Umstand trägt bei, den Einfluss der Zapfenreibung zu mindern. Es sei p der durch den Zapfen sich fortpflanzende Druck, μ der Reibungscoefficient, ϱ der Radius der Nabe, so ist für eine ganze Umdrehung des Rades die Widerstandsarbeit der drehenden Reibung $= 2\pi\varrho\mu p$. Der Weg welchen unterdessen die Zugkraft zurückgelegt hat, ist durch den Umfang $2\pi R$ des Rades gegeben. Wird daher die zur Wältigung obigen Widerstandes erforderliche Kraft mit P' bezeichnet, so ist ihre Arbeit für jede Umdrehung des Rades $2\pi R P' = 2\pi\varrho\mu p$, daher

$$P' = \mu p \frac{\varrho}{R}.$$

Man erkennt hieraus, dass die Grösse der Kraft P' wesentlich von dem Verhältnisse des Durchmessers der Nabe zu dem des Rades abhängig ist, und dass sie unter sonst gleichen Verhältnissen um so kleiner wird, je grösser der letztere im Vergleiche zum erstern.

Obgleich hohe Räder gegenwärtig fast nur noch auf dem Lande und in solchen Gegenden gefunden werden, deren Verkehrsverbindungen mangelhaft sind, so ist doch nicht zu verkennen, dass sie einen günstigen Einfluss, nicht nur auf die Verminderung der Arbeit, der gleitenden Reibung in der Nabe, sondern auch der wälzenden auf der Strasse äussern. Wir wissen schon, dass die Grösse der letzteren (Nro. 117) für die Einheit der Wegeslänge ganz allgemein durch den Ausdruck $\frac{\beta p}{R}$ bestimmt ist.

Die Arbeit der Zugkraft P für die wälzende und gleitende Reibung zusammengenommen und für eine Radumdrehung ist daher

$$2\pi R P = 2\pi R \frac{\beta p}{R} + 2\pi \varrho \mu p,$$

folglich

$$P = \frac{\beta p}{R} + \mu p \frac{\varrho}{R} = \frac{p(\beta + \mu \varrho)}{R}.$$

Diese Rechnung gilt zwar zunächst nur für ein Rad; da jedoch die wälzende sowohl wie die gleitende Reibung dem Drucke proportional und von der Grösse der Berührungsfläche unabhängig ist, so ist es auch im Principe gleichgültig, auf wie viele Räder eines Wagens und in welchem Verhältnisse sein Gewicht sich vertheilt. Sind demnach alle Räder eines Wagens von gleicher Grösse, so genügt es für p in vorstehender Gleichung das Gesammtgewicht desselben zu setzen, um sie zur Berechnung des Widerstandes, den der ganze Wagen erfährt, einzurichten. Allerdings setzt diese Annahme einen ebenen, glatten und festen Weg voraus, Bedingungen, von welchen unsere Strassen, mit Ausnahme der Eisenbahnen gewöhnlich sehr weit abweichen.

142 Auf einem festen ebenen Landwege ohne bedeutende Steigungen rechnet man $1/_{25}$ für das Verhältniss $\frac{P}{p}$, d. h. der Zugkraft zu der Last, wobei jedoch der letzteren das Gewicht des Wagens zugerechnet ist. Dieses Verhältniss sinkt aber, wenn bei anhaltender feuchter Witterung, (d. h. im mittlern Europa in einem grossen Theile des Jahres), der Boden erweicht ist und die Räder tiefe Gleisen ziehen, bis zu $1/_6$ und weiter herab.

Auf sandigem, kiesigem Boden ist zwar der Widerstand weniger wechselnd, vermindert sich aber überhaupt nicht unter $1/_8$ bis zu $1/_{12}$ der Last. Diesen Hemmnissen der Bewegung suchte man in früherer Zeit durch hohe Räder und breite Radfelgen und Reife möglichst vorzubeugen. Die Radreifen der schweren Güterwagen hatten nicht unter 10 Centimeter Breite, man sah aber auch deren von 15 und selbst 20 Centimeter.

Die Fuhrwagen auf dem Lande hatten früher wie noch jetzt Vorder- und Hinterräder von ungleicher Höhe. Dieser Unterschied ist unvermeidlich, weil, wie man weiss, die vordere Radaxe, mit welcher die Deichsel zusammenhängt, unter dem Wagenkasten steht, und mit diesem nur durch einen eisernen Zapfen verbunden ist, um welchen herum sie sich drehen lässt. Man erleichtert durch diese Einrichtung das Wenden des Wagens und das Ausweichen auf der Strasse. Noch vor dreissig Jahren hatten die Räder solcher Wagen ganz allgemein 150 bis 180 Centimeter Durchmesser. Die Achsen und Naben waren von Holz, erstere jedoch mit Eisen beschlagen und in letztere von beiden Seiten eiserne Hülsen eingesetzt. Der lichte Durchmesser betrug 10 Centimeter. Bei der noch jetzt im Gebrauch befindlichen Wagenschmiere (durch Zusammen-

schmelzen von Talg mit Thran gebildet) kann man den Reibungscoefficient nicht geringer als zu $\mu = 0{,}12$ in Rechnung nehmen. Danach bestimmt sich die für die Zapfenreibung nothwendige Kraft von

$$P' = \frac{0{,}12\,.\,10}{150}\,p = \frac{p}{120} \cdot \text{ bis } P' = \frac{0{,}12\,.\,10}{180}\,p = \frac{p}{150}.$$

Dieser Widerstand war ein so kleiner Bruchtheil vom gesammten Widerstande, dass er gegen diesen kaum in Betracht kam. Dessen ungeachtet findet man gegenwärtig auch auf dem Lande sehr häufig eiserne Axen und Naben. Die Axen oder eigentlich Axenzapfen sind conisch sich nach aussen verjüngend. Sie verbinden dadurch grosse Festigkeit und Haltbarkeit mit geringer mittlerer Dicke. Denn nur die letztere kommt bei der Reibung in Betracht, weil der Druck sich auf die ganze Länge des Zapfens gleichmässig vertheilt, so dass die Reibungsarbeit des ganzen Zapfens gleich ist der Summe der Arbeiten seiner verschiedenen Abtheilungen, bei deren jeder derselbe Druck in Betracht kommt. Diese Summe ist aber wieder gleich dem mittlern Umfange $2\pi\varrho$ des Zapfens, multiplicirt mit dem ganzen Drucke. Den mittlern Durchmesser des Zapfens wie der Nabe kann man durchschnittlich zu 5 Centimeter annehmen. Die Räder pflegt man jetzt nicht mehr so hoch zu machen als früher. Ihr Durchmesser hält durchschnittlich 120 Centimeter. Sie besitzen dadurch eine grössere Festigkeit und erleichtern das Auf- und Abladen. Gleichwohl ist die Zapfenreibung noch verringert und beträgt nur

$$P' = \frac{0{,}12\,.\,5}{120}\,p = \frac{p}{200}.$$

Nimmt man nun das günstigste Verhältniss der Zugkraft auf Landwegen, so ist

$$\frac{P}{p} = {}^1/_{25} = \frac{2\beta + 0{,}12\,.\,5}{120},$$

woraus folgt der entsprechende Coefficient der wälzenden Reibung *)

$$2\beta = 4{,}2 \quad \text{oder} \quad \frac{P}{p} = \frac{4{,}2 + 0{,}6}{120}.$$

D. h. der Widerstand auf dem Boden ist siebenmal grösser als die Zapfenreibung, und zwar unter den günstigsten Bedingungen. Denn bei ungünstiger Witterung kann sich ersterer sogar auf das 15- bis 20fache des letztern vermehren.

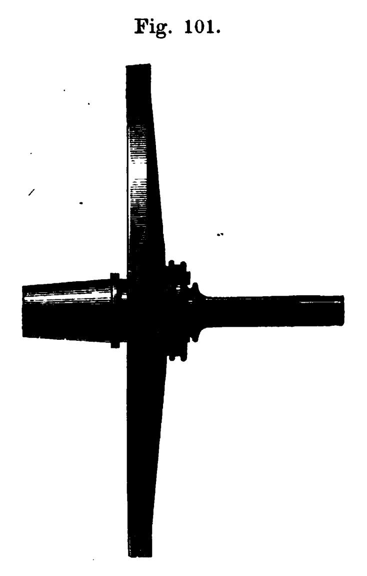
143 Auf gut erhaltenen Kunststrassen ist während des besten Standes derselben, und wenn sie durch das Fahren geglättet sind, das Verhältniss $\frac{P}{p} = {}^1/_{36}$ und sinkt gewöhnlich nicht unter ${}^1/_{24}$. Nur während der Zeit des frischen Aufschüttens von Steinen kann es wohl sein, dass die La-

*) Der Coefficient musste mit 2β bezeichnet werden, weil im Nenner des Bruches $\frac{P}{p}$ auch $2R$ steht.

dung eines Wagens bis zum achtfachen der Zugkraft vermindert werden muss. Es kann jedoch in diesem Falle durch genügende Verkleinerung der Steine sowie richtige Wahl in der Zeit des Aufschüttens der damit verknüpfte Nachtheil bedeutend vermindert werden. Die Widerstände auf der Strasse sind also auch auf unseren Chausseen noch immer sehr gross, indem sie durchschnittlich das 3,4fache der Axenreibung ausmachen. Da sie jedoch selbst bei ungünstiger Witterung nicht mehr betragen, als auf guten Landwegen während der günstigsten Jahreszeit, so erkennt man, dass eine gut erhaltene Strassenverbindung, wie dieselbe z. B. im Grossherzogthum Hessen selbst den kleinsten Ortschaften nicht fehlt, einem sehr grossen Gewinn an Kraft gleich zu schätzen ist.

144 Die Speichen der Wagenräder, welche dazu dienen, die Verbindung der Nabe mit den Felgen oder mit dem Radkranze herzustellen, liegen gewöhnlich nicht in der durch den letztern bestimmten Kreisebene, sondern bilden die Oberfläche eines sehr stumpfen Kegels, dessen Scheitel dem Wagenkasten zugewendet ist und mit der Radaxe zusammenfällt. Diese Einrichtung dient keineswegs zur Vermehrung der Haltbarkeit. Ihr Zweck ist, die Radreifen von dem Wagenkasten weit genug entfernt zu halten, um ein Anstreifen und auf kothigen Wegen wohl auch das Beschmutzen zu verhüten. Aus demselben Grunde sind die Axenzapfen, insbesondere bei den leichteren Fuhrwerken, nicht horizontal gestellt, sondern nach vorn etwas geneigt (Fig. 101). Das Rad, winkelrecht gegen den Zapfen gerichtet, bekommt auf diese Weise eine schiefe Stellung, wodurch der jedesmalige obere Theil desselben sich ziemlich weit vom Wagenkasten entfernt. Allerdings hat diese Anordnung zur Folge, dass der Reifen eine nach aussen etwas conisch sich verjüngende Gestalt erhalten muss. Seine äusseren Theile beschreiben daher während der Umdrehung kleinere Kreise als die inneren, dem Wagen näher liegenden, und da sie sich doch gleichzeitig umdrehen müssen, so entsteht neben der wälzenden Reibung auf der Strasse zugleich auch etwas gleitende Reibung.

Fig. 101.



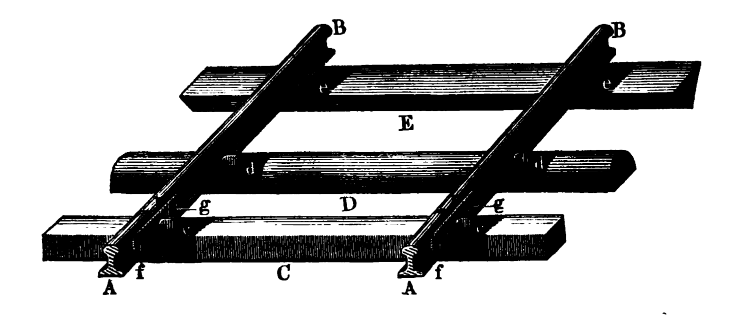
Auf den Eisenbahnen sieht man keine conisch gebauten Räder, weil der Grund, der ihre Anwendung auf Feldwegen und Landstrassen, sowie auch auf dem Pflaster der Städte veranlasste, wegfällt.

145 Wir haben bei den vorhergehenden Vergleichungen der wälzenden Reibung auf der Strasse mit der gleitenden in den Naben die geringen Geschwindigkeiten bis zu 1 Meter vorausgesetzt, welche bei den Frachtwagen, die von einem Führer begleitet sind, der zu Fuss nebenher geht, gewöhnlich eingehalten werden. Bei rascheren Bewegungen können durch die Unebenheiten des Weges, das Eindrücken von Geleisen, das Uebersteigen von Steinen, die hier und da auf den Strassen zerstreut liegen, sowie durch das Anstossen an denselben, noch bedeutend grössere Widerstände hinzutreten. Nach älteren Erfahrungen des Grafen Rumford vermehrte sich auf gepflasterter Strasse die Anstrengung der Zugkraft, bei allmäliger Zunahme der Geschwindigkeit von 1 bis zu 2,5 Meter, um das Doppelte und selbst Dreifache des anfänglichen Betrages. Nach derselben Autorität soll der auf sandigem Wege zwar an und für sich sehr grosse Widerstand, bei verschiedenen Geschwindigkeiten nur geringe Aenderungen erfahren. Aehnliches zeigt sich auch auf guten, trocknen Landwegen, insbesondere aber auf Steinbahnen von der Art, wie man sie in den Städten von Oberitalien antrifft, auf welchen lange und glatte Steine so dicht an einander gefügt sind, dass die Räder, ohne merklich anzustossen, darüber wegrollen.

146 Wenn der Wagen sammt Ladung nicht unmittelbar auf den Radaxen sitzt, sondern durch Vermittlung von Federn auf denselben ruht, wird ein sehr grosser Theil des durch Unebenheiten der Strasse und durch Stösse drohenden Verlustes an Zugkraft vermieden, weil die von den Federn getragene Masse durch die Unebenheiten weniger gehoben wird und bei den Stössen fast unbetheiligt bleibt, wodurch deren Einfluss sehr vermindert wird.

147 Der Widerstand, der selbst auf den besten Landstrassen durch Unebenheiten, Geleise, Staub, Anhäufung von Koth, durch Steine, insbesondere aber durch das frische Beschütten herbeigeführt wird, verschwindet auf den Schienen der Eisenbahnen, mit einziger Ausnahme solcher Stellen, an welchen zwei Schienen zusammenstossen. Aber auch hier hat man

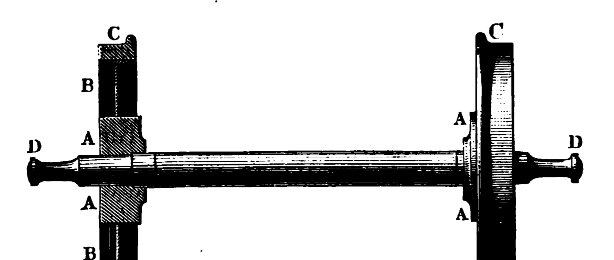
Fig. 102.



durch den Gebrauch langer Schienen, durch das Verkuppeln des Endes (Fig. 102, a. vor. S.) der einen mit dem Anfange der folgenden Schiene, sowie dadurch, dass alle Wagen auf Federn gesetzt sind, den Widerstand auf ein sehr kleines Maass zurückzuführen gewusst.

Die Räder sind bekanntlich, um das Abgleiten von den Schienen zu verhindern, auf der Innenseite mit einem hervortretenden Rande, dem Spurkranze versehen (Fig. 103), der zwischen Rad und Schiene einen sehr kleinen Spielraum lässt, damit Reibung an den Seitenwänden der

Fig. 103.



Schienen vermieden werde. Sobald indessen durch irgend welche zufällig eingetretene seitliche Bewegung die Räder das Geleise zu verlassen suchen, stemmen sich die Spurkränze gegen diejenige Schiene, welche augenblicklich das Abgleiten hemmt und bewirken dadurch ein Anstreifen, folglich ein Bewegungshinderniss. Dasselbe ist aus wälzender und gleitender Reibung zusammengesetzt, wird aber dadurch, dass die Spurkränze gegenwärtig etwas conisch abgedreht sind (Fig. 104), fast ganz in wälzende Reibung verwandelt. Sowie nämlich ein Rad gegen seine Schiene getrieben wird, erhebt sich der conisch abgedrehte Spurkranz

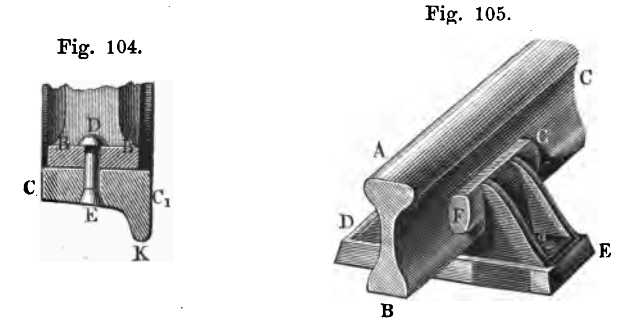


Fig. 104.

Fig. 105.

an dem ebenfalls nach innen etwas geneigten Rande der Schiene (Fig. 105) und das Rad wälzt auf der einzigen für einen Augenblick vorhandenen

Berührungslinie, so lange bis der seitliche Anstoss aufhört. Alsbald tritt es dann in seine natürliche, von dem auf ihm lastenden Drucke abhängige Gleichgewichtsstellung zurück.

148 Die Räder der Eisenbahnwagen drehen sich nicht wie die der Strassenwagen um ihre Axen, sondern sitzen auf den Axen fest, die dann ihrerseits sich in Lagern drehen, die mit dem Wagen fest verbunden sind. Diese Anordnung ist nothwendig, weil die Räder genau senkrecht auf den Schienen stehen müssen und ihre Spurkränze sich an diesen nicht klemmen dürfen. Es ist dies aber nur dadurch erreichbar, dass sie mit ihren Axen fest verbunden werden und ihr Abstand von einander ein- für allemal so bestimmt ist, dass ein kleiner Spielraum zwischen den Schienen bleibt. So oft sie sich in Curven bewegen wird freilich hierdurch etwas gleitende Reibung erzeugt. Denn es ist einleuchtend, dass von zwei Rädern, die auf derselben Axe sitzen, dasjenige, welches sich auf der convexen Seite der Curve dreht, einen grössern Weg als das andere zurückzulegen hat. Da nun gleichwohl beide gleichzeitig eine gleiche Anzahl Umdrehungen machen müssen, so folgt, dass die Bewegung des äussern Rades etwas verzögert, die des innern etwas beschleunigt wird, mithin dem Wälzen sich ein Gleiten zugesellt. Letzteres bezieht sich auf eine Wegeslänge, die dem Längenunterschiede beider Schienen auf der gekrümmten Bahnstrecke gleichkommt.

149 Die Axenlager befinden sich ausserhalb der Räder, sind aber diesen sehr nahe gebracht, wodurch die Axen eine grosse Widerstandsfähigkeit gegen das Abbrechen gewinnen. Da überdies Erschütterungen und Stösse von der Heftigkeit, wie die Fuhrwerke sie auf den Strassen zu erleiden haben, auf den Eisenbahnen gewöhnlich nicht vorkommen, so bedürfen die Bahnwagen ungeachtet des mit Einschluss der Ladung sehr bedeutenden Gewichtes von 200 bis 300 Zollcentner, welches sich auf vier Räder vertheilt, keiner Axen von mehr als 5 bis 6,25 Centimeter Dicke. Ihre Lager sind nach aussen genügend gut abgeschlossen, so dass das aus der sogenannten Schmierbüchse, einer oberhalb durch einen Deckel verschliessbaren Höhlung im Zapfenlager stetig über die Axe sich ausbreitende Oel sich doch nur sehr langsam wieder verlieren kann. Dieser regelmässige Oelzufluss bewirkt aber, dass der Coefficient der drehenden Reibung an der Axe sich bis zu $\mu = 0{,}06$ vermindert.

Die Räder erhalten gegenwärtig eine Höhe von 90 bis 105 Centimeter. Grössere Höhen bis zu 120 Centimeter, wie man sie früher hatte, scheinen jetzt nicht mehr vorzukommen. Setzt man $2R = 105$ und nimmt die grösste Axendicke von $2\varrho = 6{,}25$ Centimeter, so ergiebt sich der Widerstand der Axenreibung bei den Eisenbahnwagen

$$= \frac{0{,}06 \,.\, 6{,}25}{105}\, p = \frac{p}{280}.$$

150 Die Angaben über das Verhältniss von Kraft und Last schwanken zwischen $\frac{P}{p} = \frac{1}{200}$ bis $\frac{P}{p} = \frac{1}{280}$ und sogar bis $\frac{1}{300}$. Nehmen wir als einen Mittelwerth

$$\frac{P}{p} = \frac{1}{240} = \frac{2\beta + 0{,}06 \,.\, 6{,}25}{105} = \frac{2\beta + {}^6/_{16}}{105},$$

so findet man $2\beta = {}^1/_{16}$, also

$$\frac{1}{240} = \frac{1 + 6}{16 \,.\, 105}.$$

Der Widerstand an den Radaxen der Eisenbahnwagen ist durchschnittlich sechsmal grösser als der Widerstand an den Schienen. Auf Landwegen und Chausseen hatte sich gerade das Umgekehrte gezeigt, nämlich ein Widerstand auf der Strasse, welcher die Axenreibung um das Drei- bis Siebenfache übertraf. Da das Verhältniss $\frac{P}{p}$ auf guten Landstrassen durchschnittlich ${}^1/_{30}$, auf Eisenbahnen aber ${}^1/_{240}$ beträgt, so ersieht man, dass auf den letzteren die Wirksamkeit der Zugkräfte auf das achtfache verstärkt wird, und zwar gleichmässig in jeder Jahreszeit.

151 **Transport auf schiefen Ebenen.** Die zur Bewegung auf horizontalem Wege erforderliche Kraft ändert sich alsbald, wenn die Strasse eine schiefe Ebene bildet (Nro. 78). Die Reibung vermindert sich in geringem Grade, dagegen erwächst beim Aufsteigen ein neuer grösserer Widerstand im relativen Gewichte der Last (Nro. 80), welches sich der Zugkraft entgegensetzt. Beim Niedersteigen unterstützt das relative Gewicht die Zugkraft.

Der winkelrechte oder Normaldruck gegen eine schiefe Ebene ist (Nro. 77) $N = p\,\frac{b}{l} = p \cos c$. Anstatt des Reibungswiderstandes μp, erhält man daher nur $F = \mu\,\frac{b}{l}\,p = \mu\, p \cos c$. Da nun das relative Gewicht $= R = \frac{h}{l}\,p = p \sin c$; so ergiebt sich die ganze für das Ansteigen erforderliche Kraft

$$P = (h + \mu b)\,\frac{p}{l} = (\sin c + \mu \cos c)\, p.$$

Die entsprechende Arbeit ist: $Pl = (h + \mu b)\, p$.

Wenn dagegen die Bewegung abwärts geht, wird die entsprechende Zugkraft

$$P = (\mu b - h)\,\frac{p}{l} = (\mu \cos c - \sin c)\, p.$$

Beim Niedergange vermindert sich also die Zuglast um den ganzen Werth des relativen Gewichtes; sie wird Null für

$$\mu b = h \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{h}{b} = tng\, c.$$

D. h. es giebt eine Neigung der schiefen Ebene, bei welcher das relative Gewicht der bewegten Masse ihrem Reibungswiderstande gerade das Gleichgewicht hält. Man pflegt den entsprechenden Neigungswinkel den Reibungswinkel zu nennen und setzt in diesem Falle $\mu = tng\, \varrho$.

Dieser Winkel ändert sich natürlich mit der Grösse des Reibungscoefficienten. Auf Seite 145 (Nro. 120) findet man von einigen häufig gebrauchten Coefficienten die entsprechenden Reibungswinkel nebst ihren Sinussen aufgeführt.

Durch die Einführung des Reibungswinkels in die Rechnung sucht man die Reibung auf den beim Aufziehen auf einer schiefen Ebene auftretenden Widerstand zurückzuführen, und diese Auffassungsweise bietet jedenfalls den wesentlichen Vortheil, dass sie zu gleicher Zeit die Anschauung und die Rechnung vereinfacht. Sie gründet sich auf die Vorstellung, dass ein unter Reibung bewegter Körper fortdauernd über Unebenheiten gehoben werden muss, also sich ganz in der Lage des bergaufwärts Steigens befindet, wenn schon die zu diesem Zwecke verwendete Arbeit für die nützliche Verwerthung verloren geht. Der Winkel ϱ giebt nun die Neigung der schiefen Ebene, auf welcher der gleitende Körper fortwährend aufsteigt, ohne gleichwohl sich zu erheben, ähnlich wie ein Arbeiter auf der Tretmühle eine Stufe des Rades nach der andern erklimmt und doch seine Standhöhe nicht verlässt.

Nach dieser Vorstellung ist also auch die Bewegung auf der wagerechten Ebene, wenn sie von Reibung begleitet ist, einem Aufsteigen auf schiefer Ebene zu vergleichen, und da der Neigungswinkel der letztern $= \varrho$, so scheint es, dass die vortheilhafteste Richtung der Zugkraft nicht gleichlaufend mit dem Wege gehen, sondern einen Winkel ϱ mit demselben bilden müsse. Der Reibungswiderstand selbst, da er nichts Anderes ist als das relative Gewicht auf der ideellen schiefen Ebene, wäre bei dieser Richtung der Zugkraft

$$R = p \sin \varrho.$$

Da nun $\sin \varrho$ immer kleiner als $tng\, \varrho$, so ergäbe sich im Sinne jener Vorstellungsweise aufs Deutlichste, dass die vortheilhafteste Richtung der Zugkraft wirklich der Neigung ϱ entspricht.

Der Reibungscoefficient eines mit Eisenschienen beschlagenen Schlittens auf Strassenpflaster ist 0,44. Danach würde ein Pferd bei 60 Kilo mittlerer Kraft und 1,25 Meter mittlerer Geschwindigkeit auf der Schleife 136 Kilo fortzuziehen im Stande sein, wenn die Zugrichtung der Strasse parallel geht; denn man findet $136 \,.\, 0{,}44 = 60$. Nun ist $0{,}44 = tng\, 23^0 45'$ und $\sin 23^0\, 45' = 0{,}40$. Giebt man der Zugleine eine Neigung von $23^0\, 45'$ gegen die Strasse, so steigt die Last, welche nunmehr das Pferd und zwar ohne veränderte Anstrengung fortzuziehen vermag, auf

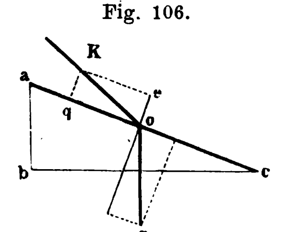
$$p = \frac{P}{\sin \varrho} = \frac{60}{0{,}40} = 150 \text{ Kilo}.$$

Befindet sich die Last p auf einer schiefen Ebene, auf welcher sie gegen den Widerstand der Reibung gehoben werden soll, so ist für den Fall, dass die Zugrichtung der schiefen Ebene parallel geht, wie schon vorher gezeigt wurde, die Zugkraft

$$P = (\sin c + \mu \cos c)\, p.$$

Wenn aber die Zugrichtung aufwärts gehend mit derjenigen der schiefen Ebene einen Winkel $Koq = \alpha$ (Fig. 106) einschliesst, so ist (Nro. 78) die der schiefen Ebene parallele Componente der Zugkraft $oq = P \cos \alpha$, während durch ihre auf der schiefen Ebene senkrechte Componente $oe = P \sin \alpha$ der Druck auf diese vermindert wird. Man erhält daher in diesem Falle:

Fig. 106.



$$P \cos \alpha = (\sin c + \mu \cos c)\, p - \mu P \sin \alpha;$$

oder auch

$$P\,(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) = (\sin c + \mu \cos c)\, p.$$

Diese Gleichung verwandelt sich, indem für μ dessen Werth

$$tng\, \varrho = \frac{\sin \varrho}{\cos \varrho}$$

gesetzt wird, in

$$P \times \frac{\cos \alpha \cos \varrho + \sin \alpha \sin \varrho}{\cos \varrho} = \frac{\sin c \cos \varrho + \cos c \sin \varrho}{\cos \varrho}\, p,$$

oder auch

$$P = \frac{\sin c \cos \varrho + \cos c \sin \varrho}{\cos \alpha \cos \varrho + \sin \alpha \sin \varrho}\, p = p\, \frac{\sin (c + \varrho)}{\cos (\alpha - \varrho)}.$$

Nimmt man $\alpha = \varrho$, d. h. wird die Zugkraft nach dem Reibungswinkel gerichtet, so wird $\cos (\varrho - \varrho) = 1$, und man erhält

$$P = p \sin (c + \varrho).$$

Eine Kraft also, welche, eine Last der schiefen Ebene aufwärts ziehend, ihre Zugrichtung dem Reibungswinkel anpasst, hat mit einem Widerstande zu kämpfen, gerade als ob keine Reibung vorhanden, dagegen $c + \varrho$ der Neigungswinkel der schiefen Ebene wäre.

Man würde zu demselben Resultate unmittelbar gekommen sein, wenn man von der Vorstellung ausgehend, welche zu dem Begriffe des Reibungswinkels leitete, sich gesagt hätte: durch den Einfluss der Reibung schieben sich gleichsam zwei schiefe Ebenen zusammen, so dass ihre Neigungswinkel sich addiren. Muss ein Körper dieser zusammengesetzten schiefen Ebene aufsteigen, so ist folglich die erforderliche Zugkraft $= p \sin (c + \varrho)$, d. h. dem von dem Winkel $c + \varrho$ abhängigen relativen Gewichte entsprechend.

Auf einem Schlitten können nach der weiter oben berechneten Aufgabe durch ein Pferd 150 Kilo über wagerecht gelegtes Pflaster fort-

gezogen werden. Der entsprechende Reibungswinkel beträgt $23^0\ 45'$. Geht die Strasse eine Strecke Weges bergaufwärts, und zwar bei $^1/_{24}$ Steigung, d. h. bei einem Neigungswinkel von $2^0\ 23'$, so muss sich in Folge dessen die Kraftanstrengung des Pferdes vermehren, um dieselbe Last von 150 Kilo aufwärts zu schaffen. Das Minimum der erforderlichen Kraft ist

$$P = 150 \sin (23^0 45' + 2^0 23') = 150 \sin 26^0 8'$$
$$= 0{,}44 \,.\, 150 = 66 \text{ Kilo.}$$

Das Pferd vermag also beide Bewegungshindernisse gleichzeitig mit verhältnissmässig nur wenig vermehrtem Kraftaufwande zu wältigen. Freilich entsteht eine neue Vergrösserung seiner Arbeit dadurch, dass es zugleich sein eigenes Gewicht um $^1/_{24}$ der Wegeslänge zu heben hat.

152 Beim Transport durch Fuhrwerke auf Landstrassen und Eisenbahnen bringt die Regulirung der Zugrichtung nach dem Reibungswinkel keinen in Betracht kommenden Vortheil, weil in Folge des sehr verminderten Widerstandes $tng\,\varrho$ und $sin\,\varrho$ sich der Gleichheit nähern. Findet man z. B. das Verhältniss der Zugkraft zur Last wie 1 zu 24, so ist $^1/_{24} = 0{,}04167 = tng\ 2^0 23' 10''$; es ist aber $sin\ 2^0 23' 10'' = 0{,}04163$. Auch die beim Transport über Anhöhen eintretende geringe Verminderung des Druckes, von welchem die Reibung abhängig ist, kann man ohne Anstand vernachlässigen, weil mit Beziehung auf die auf unseren Landstrassen noch gestatteten Steigungen, der Grössenunterschied von Länge und Basis der schiefen Ebene fast verschwindet, oder, was dasselbe sagt: weil $cos\,c$ sich von der Einheit kaum noch unterscheidet. Man darf daher mit vollkommen ausreichender Annäherung an die Wahrheit die Zugkraft, um einen Wagen einer schiefen Ebene aufwärts zu ziehen, setzen

$$P = p\left(\frac{h}{l} + \mu\right).$$

Es sei z. B. $\mu = {}^1/_{24}$ und die Steigung ebenfalls $= {}^1/_{24}$, so findet man

$$P = {}^1/_{12}\, p.$$

Die Zugkraft wird also durch diese Steigung verdoppelt. Erwägt man, dass dieselbe fortdauernd auch noch um $^1/_{24}$ vom Gewichte des Pferdes vergrössert werden muss, um dem relativen Gewichte desselben das Gleichgewicht halten zu können, so wird es begreiflich, dass letzteres unter den gegebenen Verhältnissen nur mit sehr grosser Anstrengung arbeitet, und dass es diese Anstrengung auf lange Zeit hin und regelmässig nicht würde aushalten können (Nro. 56).

Die Gränzen derjenigen Steigungen, welche, so weit es irgend möglich, nicht überschritten werden sollen, gehen aus diesem Beispiele aufs Deutlichste hervor. Je besser eine Strasse im Allgemeinen angelegt und erhalten ist, um so geringere Steigungen kann sie vertragen. Eine Last die von Pferden auf horizontaler Bahn durch deren mittlere Zugkraft

und bei gewöhnlichem Schritte dauernd bewegt werden kann, müssen sie auch, bei allerdings vermehrter Kraft, aber dafür verringerter Geschwindigkeit, ohne Beihülfe von Vorspann, über mässige Anhöhen wegzuschaffen vermögen.

Steigungen von $^1/_{24}$ trifft man in hügeligem Lande, um nicht von Gebirgsgegenden zu sprechen, noch allenthalben auf den Landstrassen. Nun bezeichnet aber der Bruch $^1/_{24}$ so ziemlich die niedrigste Gränze des Verhältnisses der Zugkraft zur Last. Wenigstens ist es so auf guten Strassen. Gleichwohl wird auf ein Pferd durchschnittlich nicht über 1500 Kilo Last gerechnet, d. h. ungefähr das 24- bis 25fache der Pferdekraft. Da bei dergleichen Erfahrungszahlen die hügelige Beschaffenheit der Strassenanlagen nothwendig mit in Anschlag kommt, so ist zu vermuthen, dass unsere Frachtwagen wohl auf grössere Ladungen würden eingerichtet werden können, wenn im Vergleiche zu den sonstigen Verbesserungen der Wege, auch günstigere Verhältnisse der Steigungen sich einhalten liessen, oder da wo es sein kann, eingehalten würden.

Der Verkehr auf den Eisenbahnen verträgt, wie wir schon wissen (Nro. 79), noch weniger als der auf den Landstrassen bedeutende Steigungen. Aber nicht nur, weil diese wegen des relativen Gewichtes des Wagenzuges eine sehr bedeutende Vermehrung der Kraft in Anspruch nehmen, sondern weil sie zugleich auch dahin wirken, die Zugkraft der Locomotive zu verringern.

Es sei p derjenige Theil vom Gewichte der Locomotive, in Folge dessen Reibung μp sie an den Schienen anhängt, so bezeichnet die gleitende Reibung μp die Gränze der Zugkraft auf horizontaler Bahn. Bei einer Steigung $\frac{h}{l} = sin\, c$ vermindert sich die Reibung bis zu $\mu p \cos c$, und ausserdem nimmt das relative Gewicht $p \sin c$, als Widerstand, einen Theil der Zugkraft für sich in Anspruch. Die Gränze der letztern sinkt daher auf $\mu p \cos c - p \sin c = p(\mu \cos c - \sin c)$ herab; oder wenn man zur Vereinfachung der Rechnung den Reibungswinkel einführt, d. h. $\mu = \frac{\sin \varrho}{\cos \varrho}$ setzt, auf $\frac{\sin (\varrho - c)\, p}{\cos \varrho}$.

Die gleitende Reibung der Räder an den Schienen, von welcher die Adhäsion der ersteren an den letzteren abhängt, sinkt wahrscheinlich nicht unter 0,15. Nun ist $0{,}15 = tng\, \varrho = tng\, 8^0\, 32'$. Es wäre demnach $\varrho = 8^0\, 32'$ derjenige Reibungswinkel, nach welchem die Gränze der Zugkraft auf Eisenbahnen beurtheilt werden müsste. Dies als richtig vorausgesetzt, ist die entsprechende Steigung einer schiefen Ebene, bei welcher die Zugkraft auf Null zurückgehen würde, $\sin 8^0\, 32' = \frac{1}{6{,}74}$. Steigungen von dieser Steile kommen auf keinem für Fuhrwerke brauchbaren Wege vor. Die Locomotive allein würde also eine jede, für andere Wagen noch passende Bergstrasse hinaufklimmen können. Nur in ihrer

Bestimmung, andere Wagen nach sich zu ziehen, vermag sie so bedeutende Steigungen nicht zu ertragen.

Gesetzt, man beabsichtige auf einer Eisenbahn eine schiefe Ebene von der Neigung $^1/_{24} = \sin 2^0\ 23'$ in Aussicht zu nehmen, so würde sich die Gränze der Zugkraft auf derselben berechnen zu

$$\frac{\sin(\varrho - c)\,p}{\cos\varrho} = \frac{\sin(8^0\,32' - 2^0\,23')\,p}{\cos 8^0\,32'} = 0{,}1083,$$

sie würde also von 15 Procent, wie vorher für horizontale Bahnstrecken angenommen wurde, auf weniger als 11 Procent zurückgehen. Nimmt man nun wieder wie früher das Verhältniss der Zugkraft zur Last auf horizontaler Eisenbahn $= {}^1/_{240}$; so beträgt die Last die auf wagerechten Schienen noch in Bewegung erhalten werden kann:

$$L = 240 \,.\, 0{,}150 \,.\, p = 36 \,.\, p.$$

Dagegen auf Schienen von $^1/_{24}$ Steigung, da

$$\frac{L'}{240} + \frac{L'}{24} = \frac{11\,L'}{240} = 0{,}108\,p,$$

nur

$$L' = \frac{240 \,.\, 0{,}108}{11}\,p = \frac{25{,}920}{11}\,p = 2{,}356\,p.$$

Um die Last $36\,p$, zu deren Bewegung in der Horizontalebene nach Annahme eine Kraft von $0{,}15\,p$ ausreichte, auf einer schiefen Ebene von $^1/_{24}$ Steigung aufwärts zu ziehen, würde eine Locomotive von 15- bis 16facher Kraft erfordert werden. Um aber ihre Kraft zu diesem Zwecke vollständig entwickeln zu können, würde sie zugleich die 15- bis 16fache Adhäsion an den Bahnschienen besitzen müssen.

Auf den Eisenbahnen pflegt man aus diesem Grunde unnöthige Steigungen mit grosser Sorge zu vermeiden; wo sie sich aber durch Tunnels oder Umwege nicht umgehen lassen, hilft man sich am besten durch Vorspann sehr schwerer und kräftiger Maschinen. Allerdings sind auch in verschiedener Weise Versuche gemacht worden, die Adhäsion der Locomotive auf künstlichem Wege, z. B. durch Federdruck gegen die Seitenwände der Bahnschienen, oder gegen eine dritte, besonders zu diesem Zwecke hergestellte Schiene zu vergrössern. Ueber den Grad der Brauchbarkeit derartiger Vorkehrungen hat jedoch die Erfahrung bis jetzt nicht entschieden.

Im grossen Eisenbahnverkehre sind schiefe Ebenen von mehr als $^1/_{30}$ Steigung bis dahin nicht zur Anwendung gekommen.

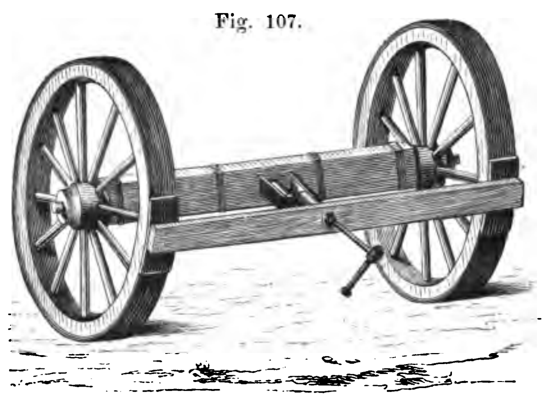
153 Wenn die Bewegung eines Wagens der schiefen Ebene abwärts gerichtet ist, so erscheint sein relatives Gewicht als Triebkraft, und man erhält (Nro. 152)

$$P = p\left(\mu - \frac{h}{l}\right).$$

Es bedeutet hier μ, in gleichem Sinne wie auf Seite 173, den Widerstandscoefficienten des auf der Strasse rollenden Wagens. Ist $\frac{h}{l}$ grösser

als μ, was auf guten, glatt gefahrenen Strassen gewöhnlich schon bei mässigen Steigungen, auf Eisenbahnen sogar schon bei Steigungen, die weniger als $^1/_{280}$ betragen, der Fall ist, so beginnt der Wagen schon durch sein relatives Gewicht abwärts zu rollen und erhält eine mehr und mehr beschleunigte Bewegung. Um diese zu verhindern, oder um die zu diesem Zwecke Widerstand leistende Pferdekraft zu unterstützen, dienen die Hemmungsvorrichtungen. Die wirksamste derselben auf steilen Abhängen ist der Radschuh. Wird dieser einem Rade untergeschoben, so hört es bekanntlich auf sich zu drehen, und ungefähr $^1/_4$ vom Gewichte des Wagens bewirkt gleitende Reibung. Erhalten zwei Räder Hemmschuhe, so verwandelt sich die Hälfte der wälzenden Reibung in gleitende. Da nun die letztere wenigstens das 20fache der erstern beträgt, so wird der Widerstand auf der Strasse schon durch einen Radschuh fünf- bis sechsmal vergrössert. Ein Wagen, der durch sein relatives Gewicht auf einer schiefen Ebene von $^1/_{50}$ Neigung zum Rollen kommt, würde unter dem Schutze eines Hemmschuhes sich erst bei einer Neigung von $^1/_{10}$ freiwillig in Bewegung setzen können. Man erkennt hieraus, dass der Hemmschuh in den meisten Fällen den Widerstand weit mehr als nöthig vermehrt. Gewöhnlich dürfte daher, besonders für schwere Wagen die Bremsvorrichtung (Fig. 107) schon aus dem Grunde vorzuziehen sein, weil

Fig. 107.

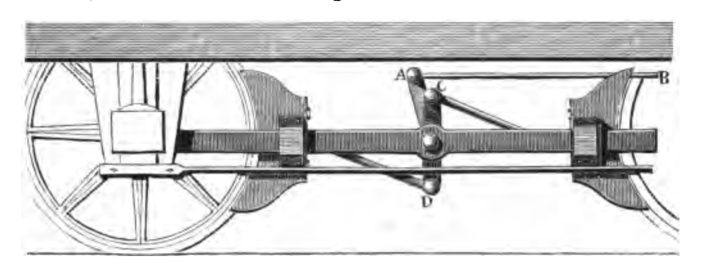


der Widerstand gleichmässig auf beiden Seiten des Wagens wirkt und dadurch der Gefahr einer einseitigen Drehung vorbeugt. Die Bremse, so wie sie mit dem Radreife in Berührung kommt erzeugt, wie man weiss, eine gleitende Reibung, die sich durch Anziehen der Schraube beliebig verstärken lässt, jedoch nie so stark werden darf, dass die beiden gebremsten Räder zum Stillstande kommen, theils weil dies ganz überflüssig ist, theils weil dadurch die gleitende Reibung auf die Strasse übertragen wird und das Abschleifen der reibenden Stelle des Radreifes zur Folge hat.

Bezeichnet man den Druck, welchen die Bremse gegen die Räder ausübt, mit D, die Wegesstrecke, auf welcher sie wirksam ist, mit l, und

setzt man den Reibungscoefficienten $\mu = 0{,}40$, so ist die entsprechende Widerstandsarbeit $= 0{,}40 \,.\, l \,.\, D$. Da nun der Druck, falls es einmal nothwendig erscheinen sollte, bis zum Stillstande der beiden Hinterräder gebracht, d. h. da die gleitende Reibung bis zu einer Grösse erhoben werden kann, die von ungefähr der Hälfte des Wagengewichtes abhängig ist, so ist es einleuchtend, dass eine richtig ausgeführte und in gutem Stande erhaltene Bremsvorrichtung genügende Sicherheit gewährt. In Fig. 108

Fig. 108.



ist die Bremsvorrichtung der Eisenbahnwagen abgebildet. Dieselbe bedarf keiner weitern Erklärung.

154 Wenn ein Wagen auf einem Eisenbahnabhange sich selbst überlassen, durch sein eignes Gewicht aus der Ruhe in Bewegung gesetzt wird und mit zunehmender Geschwindigkeit hinunter läuft, dann auf einer folgenden wagerechten Strecke sich mit wieder abnehmender Geschwindigkeit weiter bewegend an einem gewissen Punkte, dessen Entfernung vom Ausgangspunkte (auf den Schienen gemessen) $= l$, wieder zur Ruhe kommt; so ist offenbar die dem Wagen durch das Gefälle h eingeflösste Geschwindigkeit durch die Bewegungshindernisse auf der Strecke l wieder aufgezehrt worden; oder auch die Arbeit der Schwere, welche durch $p\,h$ ausgedrückt werden kann, wenn p das Gewicht des Wagens vorstellt, ist durch die Widerstandsarbeit $\mu p l$ aufgehoben worden. Es ist daher

$$p\,h = \mu p l$$

folglich

$$\mu = \frac{h}{l}.$$

Der Quotient der Fallhöhe dividirt durch die Wegeslänge giebt den Reibungscoefficienten.

Allerdings stützt sich dieses Rechnungsresultat auf die Annahme, dass die Reibung an den Radaxen und auf den Bahnschienen constante Grössen, auf schiefen und wagerechten Ebenen gleich und unabhängig von der Geschwindigkeit seien. Bezüglich des Hauptheiles der Reibung auf Eisenbahnen, der Axenreibung ist diese Annahme unbedingt richtig. Die wälzende Reibung ist streng genommen zwar auf der schiefen Ebene

etwas geringer als auf der wagerechten. In Betracht jedoch der geringen auf den Bahnen vorkommenden Steigungen darf man diesen Unterschied vernachlässigen. Die Geschwindigkeit hat, wie wir wissen, auf die wälzende Reibung auf Landstrassen einen sehr grossen Einfluss. Derselbe kommt aber auf den Eisenbahnen viel weniger in Betracht und scheint durch die neueren Verbesserungen in den Eisenbahnanlagen fast beseitigt zu sein. Jedenfalls bietet das erläuterte experimentelle Verfahren ein gutes Hülfsmittel zur Bestimmung des mittlern Widerstandscoefficienten.

In diesem Sinne hat Pambour*) bereits im Jahre 1834 eine Reihe von Versuchen auf der Liverpooler Eisenbahn angestellt. Er hatte sich zu diesem Zwecke eine Bahnstrecke ausgesucht, die auf die Länge von 11220 engl. Fuss sich, von einem gewissen Nullpunkte aus, im Ganzen um 39,08 Fuss senkte. Von dieser Senkung fielen jedoch 34,61 Fuss schon auf die ersten 3300 Fuss der Bahnstrecke, deren folgende Abtheilung sich mehr und mehr horizontal verlief.

Beispielsweise folgen hier die näheren Angaben für einige der angestellten Versuche in Verbindung mit den Resultaten, zu welchen sie führten.

Der Zug bestand aus	Gewicht der Wagen in Tonnen	Fahrstrecke l	Fallhöhe h	$\mu = \frac{h}{l}$	n
1 Waggon . .	4,65	7 326	37,16	1 : 197	279
5 Waggons . .	25,58	9 324	38,19	1 : 244	261
5 „ . .	31,31	9 933	38,55	1 : 258	274
14 „ . .	61,35	9 597	35,32	1 : 271	280
19 „ . .	92,00	10 728	38,85	1 : 276	282
25 „ . .	110,00	10 668	38,82	1 : 275	279

Sämmtliche zu den hier ausgewählten Versuchen verwendeten Wagen waren von ziemlich gleichartiger Beschaffenheit. Die in der Tabelle angeführten Gewichte sind die der Wagen sammt Ladung. Die Längenmaasse sind englische Fuss. Ein Tonne = 1000 Kilogramm. Die mittlere Geschwindigkeit wurde bei allen Versuchen als nahe gleich und zu 16 englische Fuss angegeben. Der Reibungscoefficient $\mu = \frac{h}{l}$ zeigte sich bei zunehmender Grösse der bewegten Masse augenscheinlich abnehmend. Pambour bringt dieses Verhalten hauptsächlich auf Rechnung des Wider-

*) Chev. F. M. G. de Pambour, Praktische Abhandlung über Dampfwagen auf Eisenbahnen. Aus dem Englischen. Besonderer Abdruck aus Crelle's Journal für die Baukunst, Bd. X. Berlin 1837.

standes der Luft, der nach seinen Erfahrungen fast nur den vordersten Wagen eines Zuges trifft, so dass, um ein richtiges Urtheil über den Reibungswiderstand gewinnen zu können, man den Widerstand des vordersten Wagens vom Widerstande, den ein ganzer Zug erfährt, in Abzug bringen muss. Es lässt sich diese Annahme ohne Schwierigkeit einer Prüfung unterwerfen, wenn, wie bei den Versuchen obiger Reihe die Geschwindigkeiten gleich bleiben und der vorderste Wagen immer von derselben Art ist. Es sei w der bei den Versuchen als gleich angenommene Widerstand der Luft, und $\frac{1}{n}$ der eigentliche Reibungscoefficient, nämlich das Verhältniss der Kraft zur Last nach Abzug dieses Luftwiderstandes, so erhält man durch Vergleichung z. B. des ersten mit dem letzten Versuche, die Gleichungen

$$\frac{4,65}{n} + w = \frac{4,65}{197}$$

und

$$\frac{110}{n} + w = \frac{110}{275}.$$

Aus denselben ergiebt sich

$$n = 280 \quad \text{und} \quad w = 0,00700 \text{ Tonnen.}$$

Auf ähnliche Weise und indem sämmtliche Versuche obiger Reihe in Rücksicht gezogen werden, findet man für w den Mittelwerth 0,00700. Nachdem diese Zahl als Ausdruck des Widerstandes der Luft von der Grösse des Gesammtwiderstandes, so wie sich derselbe bei jedem einzelnen Versuche ergab, in Abzug gebracht worden, wurden die in der letzten Spalte der Tabelle unter n stehenden Werthe gefunden. Sie bestätigen zwar die von Pambour gemachte Annahme nicht ganz, lassen jedoch vermuthen, dass der mit der Grösse der Masse wechselnde Einfluss der zufälligen Hindernisse auf den Schienen, im Vergleiche zu dem Luftwiderstande nur gering ist. Eine Wiederholung dieser Versuche bei verschiedenen Geschwindigkeiten und mit Rücksicht auf die bedeutenden Verbesserungen der Eisenbahnen seit den letzten 30 Jahren, wäre sehr wünschenswerth.

Neunter Abschnitt.

Vom Nutzeffecte oder vom Wirkungsgrade einfacher Maschinen.

155 **Heben mittelst der schiefen Ebene.** Wir haben den Transport auf schiefen Ebenen bisher nur als Bewegungshinderniss ins Auge gefasst. Das Heben einer Körpermasse kann aber auch der eigentliche Zweck einer Arbeit sein, und in diesem Falle bietet sich die schiefe Ebene als ein Mittel zur Erreichung desselben. Es ist hierzu ein gewisses Maass von Arbeit erforderlich, dessen kleinster Werth, ganz abgesehen von der Beschaffenheit der Hülfsvorrichtungen, erhalten wird, indem man das Gewicht der Last mit der senkrechten Höhe multiplicirt, zu welcher erstere erhoben werden soll.

Man nennt dieses kleinste Arbeitsmaass, als das erstrebte nützliche Ergebniss der Arbeit, den Nutzeffect oder auch schlechthin den Effect. Derselbe unterscheidet sich von der wirklichen Leistung der in Wirksamkeit gesetzten Kraft, in Folge nicht zu vermeidender Bewegunghindernisse häufig sehr bedeutend. Wenn eine Last durch Menschenhände aufwärts getragen wird, so hat der Arbeiter neben dem Gewichte derselben das seines eignen Körpers zu heben. Ist ein Traggefäss erforderlich, so muss auch dieses mit gehoben werden. Wiederholt sich diese Arbeit regelmässig den ganzen Tag hindurch, so dass Leerrückgänge in Betracht gezogen werden müssen, so veranlassen diese, wegen des damit verknüpften Zeitverlustes eine abermalige Verminderung der nützlichen Leistung. Die Frage, wie sich unter solchen Umständen ein möglichst grosser Effect erzielen lasse, gewinnt dadurch ein sehr grosses Interesse. Sie kann mit Zugrundelegung der Gerstner'schen Formel (Nro. 133) in folgender Weise beantwortet werden. Es sei im Sinne dieser Formel die wirklich zur Verwendung gebrachte Arbeitskraft $P = K\frac{2c - v}{c}$; indem die durch einen beliebigen Zeitraum vertheilte wirkliche Arbeitszeit, sowie früher zu $8 = t$ Stunden angenommen wird. Setzen wir ferner das Gewicht eines Arbeiters mit Einschluss eines etwa nothwendigen Traggefässes $= p$; das Gewicht der Last die aufwärts getragen werden soll $= Q$, und das Verhältniss der Höhe zur Länge der schiefen Ebene $= \frac{h}{l} = sin\,\varphi$.

Der Gesammtwiderstand, welchem die Kraft P gleich sein muss, ist zusammengesetzt aus dem Gewichte Q (dessen Transport auch schon auf horizontaler Bahn, wie man weiss, Anstrengung der Muskelthätigkeit erfordert, und dessen Grösse für die Bedingung eines grössten Effectes

die Gränze $Q = K$ nicht überschreiten soll) und aus dem relativen Gewichte $p + Q$ der ganzen gehobenen Masse. Es ist daher

$$P = Q + (p + Q) \sin\varphi = Q(1 + \sin\varphi) + p \sin\varphi,$$

woraus folgt, indem man sich erinnert, dass auch $P = K \frac{2c - v}{c}$,

$$Q = \frac{P - p \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} = \frac{\frac{K}{c}(2c - v) - p \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}.$$

Bezeichnen wir wieder (Nro 134) mit n die Anzahl der Hin- und Hergänge, in welchen die Wegesstrecke l einmal mit Belastung, und dann wieder zurück ledig oder nur mit dem Traggefässe beschrieben wird. Die Zeit eines Hinganges ist $\frac{l}{v}$, die Zeit eines Rückganges $= \frac{l}{2c}$, und indem sich diese Arbeit in regelmässigen Folgen n mal täglich wiederholt, die ganze tägliche Arbeitszeit

$$t = n\left(\frac{l}{v} + \frac{l}{2c}\right) = \frac{nl}{2c} \cdot \frac{2c + v}{v};$$

folglich

$$n = \frac{2ctv}{l(2c + v)}.$$

Der Nutzeffect eines Arbeitstages ist gebildet aus der Summe nQ der täglich gehobenen Lasten, multiplicirt mit der Höhe h zu welcher sie aufsteigen. Daher

$$E = nQh = \frac{2ctvh}{(2c + v)l} \times \frac{\frac{K}{c}(2c - v) - p \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}$$

$$= \frac{\sin\varphi}{1 + \sin\varphi} \cdot \frac{2vt}{2c + v}(2cK - vK - pc \sin\varphi).$$

Nach dieser Gleichung kann die tägliche Leistung berechnet werden, sobald die Geschwindigkeit v beim Hingange, so wie die Steigung $\sin\varphi$ bekannt sind.

Für einen gewissen Werth von v, der grösser ist als Null und jedenfalls die Gränze $v = c$ nicht überschreiten kann (Nro. 133), ereicht E ein Maximum. Aber auch für eine gewisse Steigung der schiefen Ebene wird ein grösster Werth von E erzielt. Es geht dies schon aus der Betrachtung hervor, dass für $\varphi = 0$ auch $\sin\varphi$ und also auch der Effect gleich Null werden muss, während andererseits bei senkrechter Erhebung die menschliche Muskelkraft unfähig ist, ausser dem Gewichte des eignen Körpers, noch irgend in Betracht kommende andere Lasten längere Zeit hindurch zu tragen.

Indem man die Differentialquotienten von E einmal nach v, das andere mal nach φ entwickelt und gleich Null setzt, wird erhalten:

$$4c^2K - 2pc^2 \sin\varphi - 4cKv - Kv^2 = 0$$

und

$$K\frac{2c - v}{cp} - 2\sin\varphi - \sin^2\varphi = 0;$$

oder auch, wenn aus der ersten dieser Gleichungen v und aus der zweiten $\sin\varphi$ isolirt wird:

$$v = 2c\sqrt{\left(2 - \frac{p\sin\varphi}{2K}\right)} - 2c,$$

und

$$\sin\varphi = \sqrt{\left(1 + K\frac{2c - v}{cp}\right)} - 1.$$

Unter der Annahme, dass $K = 14$ Kilo und $c = \frac{3}{4}$ Meter sei, das durchschnittliche Gewicht eines Arbeiters aber 75 Kilo betrage, wird diesen Gleichungen fast genau durch die Werthe $v = 0{,}435$ und $\sin\varphi = \frac{1}{8}$ Genüge geleistet. Setzt man diese Zahlen in die Gleichungen ein, so ergiebt sich

$$P = 20 \text{ Kilo}$$
$$Q = 9{,}34 \text{ Kilo}$$
$$E = 0{,}394 \,.\, t \text{ Meter-Kilogramm.}$$

Der wirkliche Aufwand von Arbeit um diesen Effect zu erreichen, das ist die grösste tägliche Leistungsfähigkeit eines Arbeiters, beträgt:

$$Kct = 14 \,.\, 0{,}75\, t = 10{,}5\, t \text{ Meter-Kilogramm.}$$

Der Nutzeffect verhält sich also zu dem nöthigen Arbeitsaufwande wie 3,94 : 105. Der erstere beträgt demnach noch nicht 4 Procent des letztern.

Der Transport auf der schiefen Ebene, als Hülfsmittel Lasten zu heben, giebt sich dem zu Folge als eine sehr unvortheilhafte Verwerthung menschlicher Arbeitskraft zu erkennen.

156 Wenn der Transport mittelst des Schiebkarrens geschehen soll (Nro. 136), ist die Steigung $\sin\varphi = \frac{1}{8}$ nicht mehr vortheilhaft. Die für den Nutzeffect günstigsten Verhältnisse lassen sich übrigens in ganz ähnlicher Weise wie vorher berechnen. Mit Beibehaltung der in Nro. 136 gewählten Bezeichnungen hat der Arbeiter vom Gewichte des Schiebkarrens sammt Ladung den Bruchtheil $\frac{Q + g}{m}$ zu tragen, und zu dem noch dem relativen Gewichte dieser Masse sowohl wie der seines eignen Körpers das Gleichgewicht zu halten. Es ist daher

$$P = K\frac{2c - v}{c} = \frac{Q + g}{m} + \frac{(Q + g + p)\,h}{l},$$

und indem $\frac{h}{l} = \sin\varphi$ gesetzt wird

$$Q = \frac{K\frac{2c - v}{c} - \frac{g}{m} - (g + p)\sin\varphi}{\frac{1}{m} + \sin\varphi}.$$

Kommen Leerrückwege in Betracht, so findet man die Anzahl der Fuhren wie im vorhergehenden Paragraphen

$$n = \frac{2ctv}{l(2c + v)} \quad \text{und} \quad nh = \frac{2ctv}{2c + v}\sin\varphi.$$

Bei dieser Berechnung wurde die Annahme gestellt, dass die Rückwege mit leerem Karren mit der Geschwindigkeit $2c$ stattfinden können, indem die Bewegung der schiefen Ebene abwärts durch das relative Gewicht des Karrens sowohl wie dasjenige des Arbeiters begünstigt wird.

Es ergiebt sich sonach die nützliche Leistung

$$E = nhQ = \frac{2ctv}{2c + v}\cdot\sin\varphi\cdot\frac{K\frac{2c - v}{c} - \frac{g}{m} - (g + p)\sin\varphi}{\frac{1}{m} + \sin\varphi}.$$

Die Differentialquotienten von E nach v und nach φ bestimmt und beide gleich Null gesetzt, führen zu den Gleichungen

$$4c^2\left\{1 - \frac{g}{2mK} - \frac{(g + p)\sin\varphi}{2K}\right\} - 4cv - v^2 = 0$$

und

$$\frac{K\frac{2c - v}{c} - \frac{g}{m}}{m(g + p)} - \frac{2\sin\varphi}{m} - \sin^2\varphi = 0$$

aus welchen hervorgeht,

$$v = 2c\sqrt{2 - \frac{g + m(g + p)\sin\varphi}{2mK}} - 2c$$

und

$$\sin\varphi = \frac{1}{m}\sqrt{1 + \frac{mK(2c - v) - cg}{c(g + p)}} - \frac{1}{m}.$$

Dem grössten Nutzeffecte kommen unter den Annahmen des vorhergehenden Paragraphen und indem $m = 4$ gesetzt wird, die Werthe $v = {}^3/_8$ Meter und $\sin\varphi = {}^1/_{12}$ sehr nahe. Wählt man diese, so findet man die

Arbeitskraft	$P =$	21	Kilogramm
Ladung	$Q =$	29,25	„
Zahl der Fuhren	$n =$	$\frac{3\,.\,t}{10\,.\,l}$	„
Leistung	$E =$	0,731 . t .	Meter-Kilogramm.

Der Nutzeffect beträgt, wie man sieht, auch im günstigsten Falle nur 7 Procent des Aufwandes an Arbeit, wenn als Grösse von dieser wieder die grösste tägliche Leistungsfähigkeit eines Arbeiters, nämlich 10,5 Meter-Kilogramme in Rechnung gebracht wird. Gleichwohl kann ein Arbeiter

beim Transport auf der schiefen Ebene mittelst des Schiebkarrens mehr leisten, als durch das Tragen mit blossen Händen. Hätte man z. B. zwei Laufbrücken zu gleicher Höhe geleitet, und zwar unter den günstigsten Verhältnissen der Steigung; die eine zum Heben von Baumaterialien mittelst Schiebkarrens, die andere zum Aufwärtstragen derselben Gegenstände, so wird auf dem zuerst genannten Wege fast das Doppelte gefördert werden können.

Wenn der Transport mit dem Schiebkarren nur theilweise aufwärts, auf einer beträchtlich grössern Strecke aber in horizontaler Richtung geschehen soll, so ist es vortheilhaft, die schiefe Ebene möglichst auf die ganze Länge des Weges zu vertheilen, damit der Karren grosse Ladungen einnehmen kann, ohne dass dadurch die Kräfte des Arbeiters übermässig angestrengt werden.

Wenn wir z. B. zu der in Nro. 137 behandelten Aufgabe, dass 100 Cubikmeter Erde ausgehoben und auf 100 Meter Entfernung mit dem Schiebkarren verführt werden sollen, noch den Zusatz machen, dass diese Erde durchschnittlich 2 Meter gehoben werden muss, so ist es nützlich, diese Steigung möglichst auf die ganze Wegeslänge zu vertheilen. Es wird dann $\sin\varphi = {}^2/_{100} = {}^1/_{50}$, und die vortheilhafteste Geschwindigkeit berechnet sich zu $v = 0{,}51$ Meter. Man findet dann weiter die dieser Geschwindigkeit und der Steigung $= {}^1/_{50}$ entsprechende vortheilhafteste Ladung $Q = 48$ Kilo, die Anzahl der Fuhren $n = 109$, und die Gesammtmasse, welche ein Arbeiter täglich 100 Meter weit verführen kann, $nQ = 5232$ Kilo.

Da nun 1 Cubikmeter Erde 2100 Kilo wiegt und 100 Cubikmeter zu transportiren sind, so müssen $\frac{2100\,.\,100}{5232} = 40$ Tagelöhne für die Verführung dieser Erde in Rechnung gebracht werden.

Der für das Ausheben und Aufladen erforderliche Kraftaufwand hängt natürlich sehr von der Beschaffenheit des Erdreiches ab, und lässt sich daher im Voraus nicht genau bestimmen. Doch sind zu diesem Zwecke auf 100 Cubikmeter Erde wenigstens 16 bis höchstens 32 Arbeitstage in Anschlag zu bringen.

Wenn Transporte einer schiefen Ebene abwärts geschehen, unterstützt das relative Gewicht die Betriebskraft und erlaubt daher Vergrösserung der Ladung oder Vermehrung der Geschwindigkeit. Die zweckmässigsten Anordnungen zur Erzielung möglichst grosser Leistungen lassen sich übrigens auch in diesem Falle nach den gegebenen Anleitungen ohne Schwierigkeit voraus bestimmen.

157 **Heben von Lasten durch Menschenhände unter Vermittlung von Rollen, Flaschenzügen und Rädern an der Welle.** Eine sehr einfache, leicht herzustellende und daher sehr häufig benutzte Vorrichtung, um Lasten von mässiger Grösse aufzuziehen, ist die gewöhnliche oder feste Rolle (Fig. 109); sogenannt, weil während des Gebrauches

ihre Scheere an irgend passender Stelle festsitzt oder angehängt ist. — Als Bestandtheil der Fallmaschine, als Hülfsapparat zur Fortleitung der

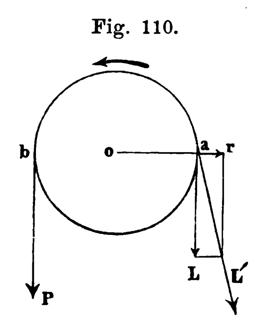
Fig. 109.



Kräfte haben wir die feste Rolle bereits kennen gelernt. In diesen Fällen zeichnete sie sich durch ihre äusserste Beweglichkeit aus. Um ihre Peripherie liess sich ein Druck unter Beihülfe eines Fadens mit unveränderlicher Stärke fortpflanzen und in Folge dessen mit dieser Stärke nach beliebiger Richtung leiten. Gleiche Gewichte, von beiden Seiten herabhängend, hielten einander im Gleichgewicht, während der Ruhe sowohl wie während der Bewegung. Alle diese Erfahrungen gelten jedoch nicht für die zum Heben von Lasten bestimmte Rolle, oder sie gelten doch nur mit Einschränkung. Diese Rolle dreht sich entweder um einen fest liegenden Bolzen, der durch eine Oeffnung in ihrer Mitte geht oder sie sitzt fest auf einer Axe, deren Enden, die Rollzapfen, in geeigneten Lagern ruhen, welche in beiden Wangen der Scheere angebracht sind. Im einen wie im andern Falle entsteht in Folge des Druckes auf die Axe während der Umdrehung eine gleitende Reibung, deren Moment vom Radius des Bolzens oder Zapfens abhängig ist und durch $\mu D \varrho$ ausgedrückt werden kann, wenn man unter D die Grösse des Druckes versteht. Denkt man sich diesen Widerstand an den Umfang der Rolle übertragen, und setzt man sein Moment an dieser Stelle $= F \,.\, R = \mu D \varrho$, so vermehrt er die daselbst vorhandene Last um den Werth $F = \frac{\mu D \varrho}{R}$.

Um die Rolle pflegt man ein Hanfseil zu legen, dessen eines herabhängendes Ende die Last trägt, während auf der andern Seite die Kraft ihre Angriffsstelle findet. Anstatt der Hanfseile werden zum Heben sehr grosser Lasten wohl auch Drahtseile oder Ketten angewendet. Seile sowohl wie Ketten lassen sich nicht biegen, ohne dass Theile derselben über einander gleiten und sich reiben. In Folge dessen erzeugt das Aufwickeln wie das Abwickeln derselben Widerstand. Seile von einiger Dicke besitzen zudem einen gewissen Grad der Steifigkeit, und setzen

Fig. 110.



auch aus diesem Grunde der Biegung, welche während des Umdrehens einer Rolle immer andere Theile ihrer Länge trifft, einen merklichen Widerstand entgegen. Angenommen, die Bewegung der Rolle gehe von a nach b (Fig. 110). An dem Punkte a, an welchem das lothrecht herabhängende, durch das Gewicht L gespannte Seil die Rolle berührt, soll das oberste noch frei hängende Seilelement aufgewickelt, also gekrümmt werden, so äussert dasselbe gegen diese Stelle seiner Länge einen centralen, also gegen die Linie aL winkelrechten Druck ar, der sich

mit L zu einer Kraft $a\,L' = L'$ zusammensetzt, welche tangential gegen das auf a unmittelbar folgende Bogenelement gerichtet ist. Es ist aber $L' = \frac{L}{\cos L\,a\,L'}$, also L' grösser als L, jedoch nur so lange, als Winkel $L\,a\,L'$ unverändert bleibt, verhältnissmässig mit L zunehmend. Jedermann weiss, dass die Biegsamkeit der Seile mit deren Dicke sich vermindert. Der Winkel $L\,a\,L'$ und mit ihm L' muss daher, selbst wenn L unverändert bleibt, mit der Seildicke wachsen. Es ist ferner einleuchtend, dass der Widerstand gegen Biegung mit der Stärke derselben sich vermehren muss. Dasselbe Seil um Rollen von ungleichen Durchmessern gebogen wird aus diesem Grunde bei den kleinsten Rollen den grössten Widerstand zeigen.

Allerdings würde es bei vollkommener Elasticität der Seile mit diesem von ihrer Steifigkeit abhängigen Bewegungshindernisse wenig auf sich haben, denn was auf der einen Seite beim Aufwicklen verloren ginge, würde auf der andern Seite wieder gewonnen werden. Die Seile sind jedoch nicht vollkommen elastisch, insbesondere Hanfseile sind es nur in geringem Grade. Bei diesen, wenn sie gebogen wurden, erfordert es sogar einer gewissen Kraft, sie wieder gerade zu richten. Der Widerstand ist darum auch bei Hanfseilen fühlbarer als bei Drahtseilen.

Man verbindet die beim Aufwicklen von Seilen durch Reibung und unvollkommene Biegsamkeit auftretenden Bewegungshindernisse unter dem gemeinschaftlichen Namen: Widerstand wegen der Steifigkeit. Feste Regeln zur Bestimmung desselben durch Rechnung giebt es nicht, weil derselbe nicht nur mit dem Durchmesser der Rolle und der Dicke des Seiles, sondern auch mit der Dauer seines Gebrauches, der Art seiner Anfertigung und sonstigen Beschaffenheit, ob es insbesondere trocken oder feucht oder fettig ist, bedeutenden Aenderungen unterliegt. Bandförmig geflochtene Seile sowie auch Lederriemen, wenn dieselben um Rollen gelegt werden, veranlassen einen viel geringern Widerstand als cylindrische Seile. Bei Anwendung sehr dünner Fäden als Fortpflanzungsmittel der Kraft verschwindet der Einfluss der Steifigkeit.

Hanfseile von der Art wie dieselben bei Rollen und Flaschenzügen gewöhnlich gebraucht werden, haben eine Dicke von 15 bis 25 Millimeter. Der Widerstand wegen der Steifigkeit wechselt natürlich mit ihrer Dicke sowie auch mit dem Durchmesser der Rollen, kann aber näherungsweise durchschnittlich mit 7,5 Procent der Last in Anschlag gebracht werden.

Das Tragungsvermögen der Seile steht keineswegs in Verhältniss ihrer Querschnittsflächen. Man hat vielmehr gefunden, dass die dickeren Seile verhältnissmässig weniger tragen, als die dünneren. Die Last, welche den ersteren angehängt werden darf, lässt sich also nicht sicher nach derjenigen beurtheilen, welche die letzteren tragen können. Um so gefahrloser kann man im umgekehrten Sinne rechnen, so lange es nicht darauf ankommt, so weit möglich die genauesten Gränzen einzuhalten. Indem man hiernach, natürlich nur als Annäherung, annimmt, dass den

dünneren Seilen im geraden Verhältniss ihrer abnehmenden Querschnitte weniger Belastung anvertraut werden soll, und indem man hierbei zugleich die Erfahrung benutzt, dass gute Hanfseile von 5 Centimeter Dicke 900 Kilo Belastung mit Sicherheit tragen, zeigt die Rechnung: dass einem Seile von 1 Centimeter Dicke im geringsten Anschlage 36 Kilo, von 2 Centimeter Dicke wenigstens 144 Kilo u. s. w. angehängt werden dürfen.

Die Fäden der Hanfseile sind sehr fest verflochten und bilden daher eine Masse von grosser Dichtigkeit, die gewöhnlich im Wasser untersinkt. Gleichwohl kann man nicht voraussetzen, dass das specifische Gewicht eines reinen, trocknen Seiles, dessen Stoff denn doch wesentlich aus Holz besteht, dasjenige der dichteren Holzarten bedeutend übersteige. Das Gewicht von 100 Gramm ist somit wohl das äusserste, was für ein Seil von 1 Centimeter Durchmesser und 1 Meter Höhe, d. h. für einen Cubikinhalt von 78,5 Centimeter angenommen werden darf *). Von dieser Annahme ausgehend würde ein Seil von 2 Centimeter Durchmesser und 1 Meter Länge ungefähr 400 Gramm, bei gleicher Länge und 3 Centimeter Dicke ungefähr 900 Gramm wiegen u. s. f.

Der Druck D, von welchem die Reibung abhängig ist, bildet sich aus dem Gewichte von Last, Kraft, Rolle und Seilen, und muss in jedem Falle besonders ermittelt werden. Angenommen, es soll Wasser aus einem Brunnen aus 20 Meter Tiefe geschöpft werden. Die dazu bestimmte Rolle hat $R = 20$ Centimeter Halbmesser und wiegt 2 Kilo. Der Radius des Rollzapfens hält $\varrho = 1$ Centimeter. Es ist also $\frac{\varrho}{R} = 1/_{20}$. Das Seil bei 1,5 Centimeter Dicke und 24 Meter Länge wiegt 5,5 Kilo. Dasselbe trägt zwei Eimer, von welchen wie man weiss, der eine steigt während der andere sich senkt. Sie wiegen zusammen 9,5 Kilo und jeder fasst, ohne ganz angefüllt zu sein, 18 Kilo Wasser. Beide sind nothwendig, nicht nur zur Abkürzung der Arbeit, sondern auch um sich wechselseitig das Gleichgewicht zu halten; damit die Kraft neben der Last nicht auch noch das Gewicht des Eimers zu heben hat. Da man auf die Menge des geschöpften Wassers 18 Kilo in Anschlag bringen kann, so muss die Kraft jedenfalls etwas mehr als 18 Kilo betragen. Setzen wir indessen zur Abkürzung der Rechnung $P + L = 36$; so findet sich die Grösse des Druckes $D = 36 + 2 + 5{,}5 + 9{,}5 = 53$ Kilo, und wenn der wahrscheinlichste Werth des Reibungscoefficienten in diesem Falle zu $\mu = 0{,}12$ angenommen wird, ist

---

*) Gerstner in seinem Handbuche der Mechanik Bd. I, S. 219 setzt als Mittel aus mehreren Erfahrungen, das Gewicht von 1 Lachter (= 77 Wiener Zoll) eines Seiles von $2^1/_2$ Zoll Dicke gleich 10 Oestreichische Pfund. Da nun 1 Wiener Fuss = 0,316 Meter und 1 Oestreichisches Pfund = 0,56 Kilo, so müssten hiernach 3300 Cubikcentimeter Seilmasse 5600 Gramm wiegen, und ihr specifisches Gewicht betrüge 1,7, müsste also das der schwersten Holzarten, ja selbst das der Holzfaser (1,5) bedeutend übersteigen.

$$\frac{\mu D \varrho}{R} = \frac{0,12 \;.\; 53 \;.\; 1}{20} = 0,318.$$

Den Widerstand wegen der Steifigkeit haben wir schon vorher zu $0,075 \, L = 0,075 \;.\; 18 = 1,350$ veranschlagt. Es ist demnach die Kraft um 18 Pfund Wasser zu heben

$$P = 18 + 1,350 + 0,318 = 19,668 \text{ Kilo.}$$

Der Einfluss der Reibung tritt, wie man sieht, gegen den der Steifigkeit weit zurück. Eine genauere Berechnung des erstern hätte diesen Unterschied nicht wesentlich verändern können. Aehnliches findet man in anderen Fällen, in welchen die feste Rolle zum Heben von Lasten benutzt wird.

Der aus solchen Arbeiten entfallende Nutzeffect ist die zu einer gewissen Höhe h aufgezogene Last L, in obigem Beispiele 18 Kilo auf 20 Meter Höhe. Die verwendete Kraft hat denselben Weg zurücklegen müssen, und es mussten dabei auf je 100 Gewichtstheile Last

$$\frac{19,668}{18} \cdot 100 = 109 \text{ Gewichtstheile}$$

Kraft in Arbeit gesetzt werden. Soll die nützliche Leistung der Kraft in Procenten ihrer eignen Grösse ausgedrückt werden, so dient zu diesem Zwecke die Proportion:

$$19,668 : 18 = 100 : x,$$

woraus sich ergiebt

$$x = 91,5.$$

Man nennt die so gefundene Zahl den Wirkungsgrad der betreffenden Maschine. Derselbe beträgt also bei der Rolle in unserm Beispiele 91,5 Procent des Arbeitsverbrauches.

158 Bewegungshindernisse von derselben Beschaffenheit, wie wir sie bei der festen Rolle kennen gelernt haben, zeigen sich auch bei der beweglichen Rolle und überhaupt bei allen Verbindungen von Rollen und Seilen. Als Gleichung der festen Rolle hatten wir genommen:

$$P = L + 0,075 \, L + \mu D \frac{\varrho}{R},$$

wobei wir als Widerstand wegen der Steifigkeit der Seile, dessen genauere Bestimmung ohne jedesmalige besondere Versuche unmöglich ist, für Rollen und Flaschenzüge einen Durchschnittswerth von 7,5 Procent der Last berechneten. Es kann diese Abkürzung und Beseitigung von theoretischen Annahmen, die ohne sichere Begründung nur das Verständniss erschweren, um so weniger Bedenken erregen, indem ja überall da, wo man eine genauere Zahl in Erfahrung gebracht hat, es keine Schwierigkeit macht, dieselbe an die Stelle der gewählten in die Gleichung einzusetzen. Der Druck D ist aus verschiedenen Gewichten zusammengesetzt; da wir aber nun schon wissen, dass die Zapfenreibung zu den

Bewegungshindernissen der Rolle nur einen geringen Beitrag liefert; in Betracht ferner, dass die Spannung beider Seile während der Bewegung der Rolle zwar nicht gleich, aber doch auch nicht sehr viel verschieden ist, und dass endlich das Gewicht von Rollen und Seilen, die man zu einem Flaschenzuge verbindet, meistens nur gering ist, so wollen wir zum Vortheil einer übersichtlichen Darstellung in der folgenden Erörterung den Druck D dem doppelten Werthe der Kraft gleichsetzen. Es ist demnach

$$P = L + 0{,}075\,L + 2\,\mu\,P\,\frac{\varrho}{R},$$

woraus folgt:

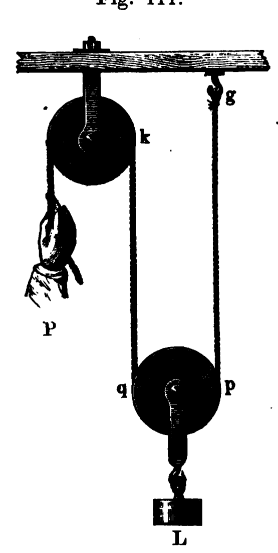
$$P = \frac{1{,}075\,R}{R - 2\,\mu\,\varrho}\,L.$$

Setzt man z. B. wie vorher $L = 18$ Kilo; $\frac{\varrho}{R} = {}^1/_{20}$; $\mu = 0{,}12$; so findet sich $P = 19{,}585$ Kilo, während nach der genauern Rechnung $P = 19{,}668$ gefunden worden war.

159 Bei der beweglichen Rolle, wenn sie ruht, vertheilt sich die anhängende Last auf die beiden Seile gleichförmig (Nro. 87). Sowie die Bewegung beginnt, ändert sich dieses Verhältniss. Die Spannung des vordern Seiles, an welchem die Kraft angreift, nimmt zu, die des hintern vermindert sich. Indessen von welcher Art diese Veränderung sein mag, die Summe beider Spannungen muss stets der Grösse des anhängenden Gewichtes gleich bleiben. Bezeichnen wir daher mit S' die Spannung des ersten, mit S'' die des zweiten Seiles, so entsteht die Gleichung

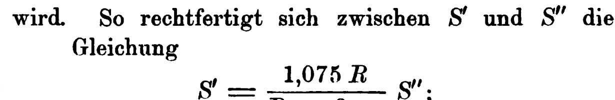
$$S' + S'' = L.$$

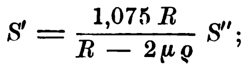
Fig. 111.



Die bewegliche Rolle, als Mittel Lasten zu heben, wird in Verbindung mit einer festen angewendet. Es ist daher zweckmässig, ihre Gleichung mit Hinblick auf diese Verbindung aufzusuchen. Nehmen wir demgemäss an, das Seil sei um eine bewegliche und um eine feste Rolle gelegt (Fig. 111); sein eines Ende sei bei g befestigt, während das andere der Kraft P eine Angriffsstelle bietet. Die Spannung des Seiles oder Seilstückes kq während der Bewegung ist S', die des Seiles pg haben wir S'' genannt. Es ist S' gleichsam die Kraft, welche das Seil von der beweglichen Rolle abzieht und dadurch die Last hebt. So aufgefasst, lässt sich die bewegliche Rolle mit der festen vergleichen und S'' als die Last ansehen, welche von der

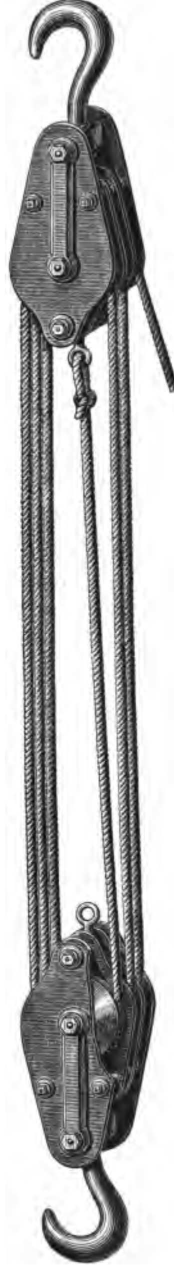
erstern abgerollt wird. So rechtfertigt sich zwischen S' und S'' die Gleichung





$$S' = \frac{1{,}075\,R}{R - 2\mu\varrho}\,S'';$$

Fig. 112.



und dann zwischen P und S', mit Beziehung auf die feste Rolle, die Gleichung

$$P = \frac{1{,}075\,R}{R - 2\mu\varrho}\,S' = \left(\frac{1{,}075\,R}{R - 2\mu\varrho}\right)^2 S''.$$

Da ausserdem $L = S' + S''$, also auch

$$L = S''\left(\frac{1{,}075\,R}{R - 2\mu\varrho} + 1\right)$$

und

$$S'' = \frac{L}{\dfrac{1{,}075\,R}{R - 2\mu\varrho} + 1},$$

so folgt

$$P = \left(\frac{1{,}075\,R}{R - 2\mu\varrho}\right)^2 \frac{L}{\dfrac{1{,}075\,R}{R - 2\mu\varrho} + 1}.$$

Die Rechnung, welche hier für die Verbindung einer festen mit einer beweglichen Rolle ausgeführt wurde, lässt sich mit gleichem Rechte für Flaschenzüge von jeder beliebigen Anzahl Rollen in Anwendung bringen. Es seien n Rollen, alle von gleicher Grösse, etwa so wie in Fig. 112, welche einen Flaschenzug von sechs gleich grossen Rollen zeigt, geordnet. Während der Ruhe sind alle Seile gleich gespannt und jedes trägt den $n$ten Theil der angehängten Last. Letztere wird durch das Gewicht der beweglichen Flasche zwar vermehrt; der hieraus entspringende Nachtheil für die Kraft, wenn von Belang, liesse sich jedoch leicht dadurch beseitigen, dass an dem Handseile ein $n$tel vom Gewichte der Flasche an passender Stelle angehängt würde. Das Handseil denken wir uns, sowie in der Figur dargestellt worden, um die erste oder die Handrolle gebogen, um der Kraft zum Zwecke der Arbeit die bequemste Angriffsstelle zu verschaffen. Unter der Anzahl der gezeichneten Seile wird es nicht mitgezählt, so dass wir also als erstes Seil dasjenige betrachten, welches von der ersten festen Rolle herabhängend sich um die erste bewegliche Rolle schlingt.

Während des Aufziehens der Last nehmen die Seile eine ungleiche Spannung an, und zwar abnehmend vom ersten gegen das letzte Seil hin. Unter allen Umständen jedoch behauptet die Gleichung

$$L = S' + S'' + S''' + \cdots + S_n$$

ihre Geltung.

Man setze zur Abkürzung $\frac{1{,}075\,R}{R - 2\,\mu\,\varrho} = A$, und beziehe die Grösse der Spannung eines jeden Seiles auf die des nachfolgenden, so ergiebt sich $P = A\,S'$; $S' = A\,S''$; $S'' = A\,S'''$ etc. und endlich $S_{n-1} = S_n$. Daraus folgt:

$$\begin{array}{ll} P & = A^2 S'' = A^3 S''' \text{ etc. und endlich } P = A^n S_n \\ S' & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A^{n-1} S_n \\ S'' & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A^{n-2} S_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{n-1} & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A\,S_n; \end{array}$$

und weiter, indem diese Werthe in die Gleichung von L eingesetzt werden:

$$L = S_n\,(A^{n-1} + A^{n-2} + A^{n-3} + \cdots + A + 1).$$

Da nun auch

$$A\,L = S_n\,(A^n + A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + A^2 + A);$$

so erhält man durch Subtraction der vorletzten von der letzten Gleichung

$$L\,(A - 1) = S_n\,(A^n - 1),$$

und endlich

$$L = S_n\,\frac{A^n - 1}{A - 1} \quad \text{oder} \quad S_n = \frac{L\,(A - 1)}{A^n - 1}.$$

Als Gleichung der Kraft wurde oben gefunden $P = A^n\,S_n$; es ist folglich auch

$$P = L\,\frac{A^n\,(A - 1)}{A^n - 1} = \frac{L\,(A - 1)}{1 - \frac{1}{A^n}}.$$

Aus dieser allgemeinen Gleichung der Flaschenzüge mit Rücksicht auf Bewegungshindernisse ist zunächst ersichtlich, dass die Wirksamkeit der Kraft, weit entfernt mit der Anzahl der Rollen verhältnissmässig zuzunehmen, sich einer Gränze $P = L\,(A - 1)$ nähert, d. h. dass die Vermehrung der Rollen nur einen allmälig abnehmenden Nutzen gewährt; denn der Werth A, wie derselbe auch je nach Beschaffenheit der Rollen und Seile sich ändern mag, muss immer grösser sein als die Einheit. Der Bruch $\frac{1}{A\,n}$ nähert sich also bei zunehmender Zahl der Rollen mehr und mehr dem Werthe Null.

Um den Gang dieser Abnahme deutlicher übersehen zu können, wollen wir denselben auf bestimmte Verhältnisse beziehen. Es sei zu dem Ende der Halbmesser der Rollen $R = 8$ Centimeter, der Halbmesser der Zapfen $= 1$ Centimeter; ferner $\mu = 0{,}12$ und die Dicke des Seiles gleich 2 Centimeter. Man findet dann

$$\frac{1{,}075\,R}{R - 2\mu\varrho} = A = \frac{1{,}075\,.\,8}{8 - 2\,.\,0{,}12\,.\,1} = 1{,}108;$$

und indem für n nach und nach verschiedene Werthe in die vorher entwickelte Gleichung eingesetzt werden, gelangt man zu den in der folgenden Tabelle zusammengestellten Zahlen.

n	P	$E = \frac{100\,L}{n\,P}$
1	$1{,}108\,L$	90,25
2	$0{,}584\,L$	85,61
3	$0{,}408\,L$	81,68
4	$0{,}321\,L$	77,87
5	$0{,}269\,L$	74,30
6	$0{,}235\,L$	70,90
....	.....	....
10	$0{,}168\,L$	59,40
20	$0{,}124\,L$	41,28

Die Kraft kann bei einer auch noch so grossen Anzahl Rollen nicht geringer werden als $P = L\,(A - 1) = 0{,}108\,L$, und diesem Gränzwerthe ist man unter den angegebenen Verhältnissen schon bei 20 Rollen sehr nahe gekommen. Der Effect E in Procenten der Kraft ausgedrückt wird bestimmt, indem man die Last durch die $n$fache Kraft dividirt und mit 100 multiplicirt. Derselbe nähert sich mehr und mehr dem Ausdrucke

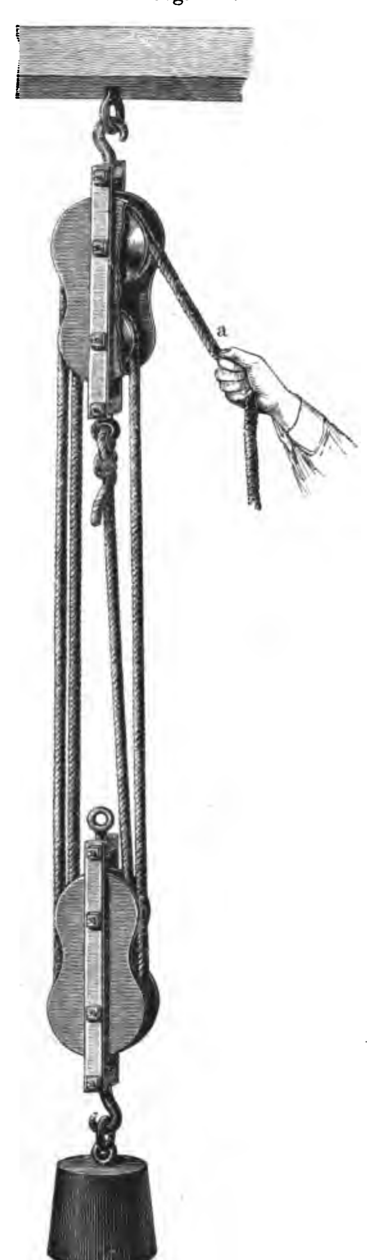
$$E = \frac{100\,L}{0{,}108\,n\,L} = \frac{925{,}9}{n}.$$

Bei dem in Fig. 113 abgebildeten sehr häufig angewendeten Flaschenzuge sind die Rollen von ungleicher Grösse. Durch genaue Berücksichtigung dieser Verschiedenheit in der Rechnung würde dieselbe umständlicher, ohne darum im Endresultate wesentlich zuverlässiger zu werden, indem namentlich der Einfluss der Unbiegsamkeit der Seile im Voraus doch nie genau angegeben werden kann. Zur übersichtlichen Beurtheilung genügt es daher, mittlere Halbmesser in die Rechnung einzuführen.

Flaschenzüge, die man zum Aufziehen von Baumaterialien bei neu errichteten Gebäuden benutzt, haben selten mehr als 4 bis 6 Rollen. Ein Blick auf vorstehende Tabelle belehrt, dass zusammengesetztere Rollenverbindungen den Nutzeffect bedeutend vermindern. Wo die zu hebenden Lasten für Menschenkräfte zu gross werden, thut man daher besser, anstatt die Zahl der Rollen zu vermehren, den Aufzug durch Pferde bewerkstelligen zu lassen. Freilich bedarf es dann noch des Zu-

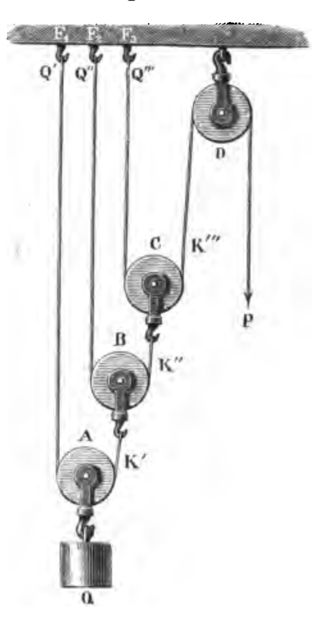
satzes einer festen Rolle, um dem Seile eine für die Zugkraft des Pferdes passende Richtung zu geben.

Fig. 113.



160 Zuweilen werden Flaschenzüge mit einer grössern Anzahl Rollen gebraucht, um Gegenstände von sehr grossem Gewichte, vielleicht durch die Hände eines einzigen Arbeiters, zu ganz geringer Höhe zu heben, um sie dann in dieser Lage bequemer bearbeiten zu können. In solchen Fällen benutzt man anstatt des gewöhnlichen Flaschenzuges mit grösserm Vortheile den Potenzenflaschenzug, der in Fig. 114 abgebildet ist. Derselbe besteht aus

Fig. 114.



einer festen und einer Anzahl beweglicher Rollen. In der Figur sind drei bewegliche angenommen. Man erkennt leicht, dass ohne Rücksicht auf Bewegungshindernisse das

Gleichgewicht zwischen Kraft und Last am Potenzenflaschenzug dem Ausdrucke

$$P = Q \frac{1}{2^n}$$

entspricht, und dass für den Weg 1, den die Last beschreibt, die Kraft den Weg 2^n zurücklegen muss.

Um den Einfluss von Reibung und Steifigkeit zu berechnen, kann man gerade so wie bei dem gewöhnlichen Flaschenzuge verfahren. Bezeichnen wir zu dem Ende die Spannung der Seile auf der Seite der Kraft mit K', K'', K''' etc., die Spannung der an den Haken befestigten Seile mit Q', Q'', Q''' etc., so ergiebt sich zunächst für die Lastrolle

$$Q = K' + Q' \quad \text{und} \quad K' = A\,Q',$$

wenn nämlich A dieselbe Bedeutung hat wie im vorhergehenden Paragraphen. Hieraus folgt $Q = Q'\,(A + 1)$, also

$$Q' = \frac{Q}{A + 1} \quad \text{und} \quad K' = \frac{A\,Q}{A + 1}.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$K'' = \frac{A\,K'}{A + 1} = \frac{A^2\,Q}{(A + 1)^2},$$

und so fort endlich

$$K_n = \frac{A^n\,Q}{(A + 1)^n},$$

wenn n die Zahl der beweglichen Rollen vorstellt. Da schliesslich das Seil noch um eine Handrolle gebogen wird, so ist die am Ende desselben wirksame Kraft

$$P = A\,K_n = \frac{A^{n+1}\,Q}{(A + 1)^n},$$

und der Nutzeffect

$$E = \frac{100\,Q}{2^n\,P} = \frac{100\,(A + 1)^n}{2^n\,A^{n+1}}.$$

Vergleicht man den gewöhnlichen mit dem Potenzenflaschenzuge unter der Voraussetzung gleicher Beschaffenheit der Rollen und setzt man wie früher $A = 1{,}108$, so zeigen sich beide als identisch, wenn man dem ersten zwei Rollen und dem zweiten eine bewegliche Rolle giebt. Für jede grössere Anzahl Rollen ist aber der letztere im Vortheil. Z. B. ein Potenzenflaschenzug von drei beweglichen Rollen entspricht einem gewöhnlichen von acht Rollen. D. h. um die Last 1 Meter zu heben, wird die Kraft bei dem einen wie bei dem andern 8 Meter niedergehen müssen. Ohne den Einfluss der Widerstände würde also auch die Kraft in beiden Fällen dieselbe sein müssen. Die gleiche zu hebende Last vorausgesetzt, giebt aber die Rechnung für den Potenzenflaschenzug

$$P = 0{,}161\,Q \quad \text{und} \quad E = 77{,}69 \text{ Procent};$$

für den gewöhnlichen Flaschenzug

$$P = 0{,}193\,Q \quad \text{und} \quad E = 64{,}79 \text{ Procent}.$$

Hätte der erstere vier bewegliche Rollen, so würde letzterer für denselben Weg der arbeitenden Kraft schon sechszehn Rollen erhalten müssen, und es ergäbe sich für den einen

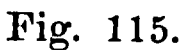
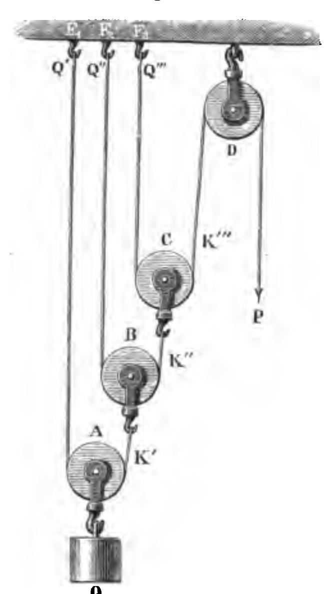


Fig. 115.



$P = 0{,}085\ Q$ und $E = 73{,}90$ Procent,

für den andern

$P = 0{,}134\ Q$ und $E = 46{,}66$ Procent.

Ungeachtet dieses ungleich höhern Wirkungsgrades des Potenzenflaschenzuges eignet sich derselbe nicht, um Lasten auf bedeutende Höhen zu schaffen, weil während des Gebrauches die Rollen einen zu grossen Spielraum für sich in Anspruch nehmen. Um z. B. die Lastrolle A (Fig. 115) mit dem anhängenden Gewichte 1 Meter heben zu können, muss die Rolle B 2 Meter, die Rolle C 4 Meter hoch steigen, und nach beendigter Arbeit stehen die Rollen A und C 6 Meter weiter von einander als vorher.

161 Wenn das Gewicht, welches mittelst einer Rolle gehoben werden soll, so gering ist, dass es von einem Faden von weniger als 1 Millimeter Durchmesser getragen wird, bleibt der Einfluss der Steifigkeit unbemerkbar, und es kann dann, wie bei der Rolle einer Fallmaschine, von Interesse sein, auf Verminderung der Zapfenreibung hinzuwirken, deren Grösse, wie bekannt, durch $F = \mu D \frac{\varrho}{R}$ ausgedrückt wird.

Viel kann schon dadurch geschehen, dass man den Durchmesser der Rolle ziemlich gross, die Zapfendicke aber nicht grösser nimmt, als unumgänglich nöthig. Um den Zapfendruck zu vermindern, wird die Rolle durchbrochen, und überhaupt so leicht wie möglich gebaut. Dem Reibungscoefficienten giebt man sein kleinstes Maass durch Anwendung des gereinigten Knochenöls.

Es ist indessen schwer, Zapfen und Zapfenlager so zu bearbeiten, dass ihre Krümmungen genau concentrisch sind. Das Geringste, was dabei verfehlt wird, veranlasst Klemmungen und vermehrte Reibung. Diesem Uebelstande kann man vorbeugen und zugleich noch die Reibung auf die Hälfte vermindern, indem man die Rollen um Spitzen oder conische Zapfen laufen lässt.

Die Abbildung Fig. 116 (a. f. S.) zeigt die Rolle einer Fallmaschine in $^1/_4$ der natürlichen Grösse. Die conischen Vertiefungen, welche als

Pfannen dienen sollen, sind in die Axe der Rolle eingeschliffen, die Spitzen von genau derselben conischen Neigung befinden sich an den Enden von Schrauben, durch deren Anziehen es leicht gelingt, sie so weit als erforderlich in ihre Pfannen einzuschieben, jedoch nie so weit, dass sie die Höhlungen ganz ausfüllen. Als Zapfendicke kann man die Hälfte vom Durchmesser der Basis der conischen Spitze oder wohl richtiger die Hälfte von der Weite der conischen Mündung in Rechnung bringen.

Der Durchmesser dieser Rolle beträgt 180 Millimeter, die mittlere Dicke der conischen Spitze, welche bei der Reibung als Zapfendicke in Rechnung zu bringen ist, $\frac{1,5}{2}$ Millimeter. Es ist daher $\frac{\varrho}{R} = \frac{1}{240}$. Das Gewicht der Rolle beläuft sich auf 323 Gramm, das der anhängenden Teller, Fäden und Gewichte auf 177 Gramm. Der Druck auf die Zapfen ist demnach $D = 323 + 127 = 450$ Gramm. Setzt man $\mu = 0{,}08$, so ergiebt die Zapfenreibung

$$\mu D \frac{\varrho}{R} = \frac{0{,}08 \cdot 450}{240} = 0{,}15 \text{ Gramm.}$$

Wenn man den vordern Teller der Maschine mit einem diesem Betrage gleichen Uebergewichte beschwert, dauert die einmal begonnene Bewegung gleichförmig fort. Sie beginnt jedoch nicht ohne äusseres Zuthun.

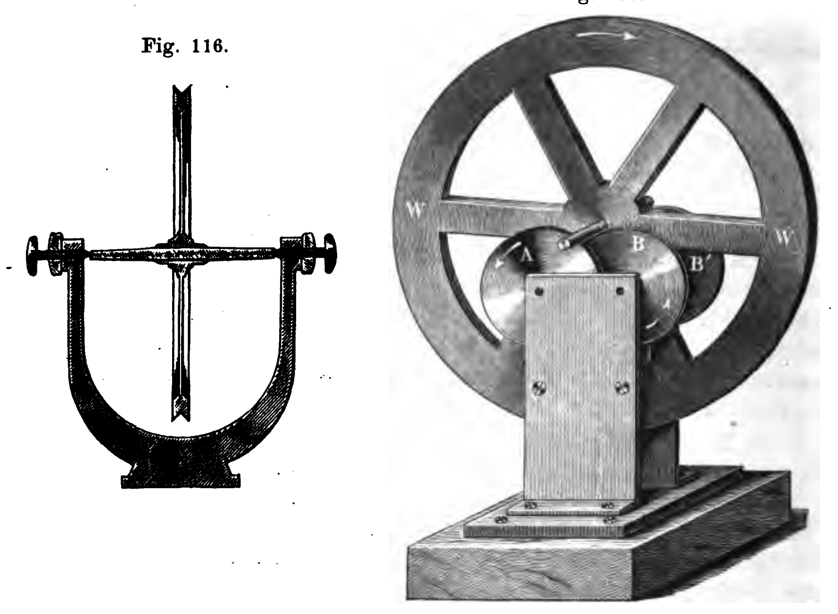


Fig. 116.

Fig. 117.

Ein anderes wirksames Mittel, die Zapfenreibung zu vermindern, besteht in der Anwendung der Frictionsrollen (Fig. 117). Vier Rollen

von gleicher Grösse, deren Axen und Zapfenlager in genau gleicher Höhe und paarweise so angebracht sind, dass ihre Kreismittelpunkte um etwas mehr als die Radiuslänge von einander entfernt liegen, bilden je zwei auf der einen und andern Seite der Hauptrolle die Lager von deren Axe. Besitzen diese vier Rollen, die sogenannten Frictionsrollen, hinlängliche Beweglichkeit, so werden sie durch die Drehung des Zapfens der Hauptrolle ebenfalls in rotirende Bewegung gesetzt, und die gleitende Zapfenreibung verwandelt sich in die wälzende. Diese Umwandlung geschieht jedoch nicht, ohne dass in den Zapfenlagern der Frictionsrollen eine neue gleitende Reibung erzeugt wird, die einen Theil des gewonnenen Vortheils wieder aufhebt.

Als Ausdruck des Widerstandes der wälzenden Reibung wurde früher (Nro. 117) gefunden: $W = \beta \frac{P}{r}$, wo P die Grösse des auf der Walze lastenden Druckes und r den Radius derselben bedeutet. Diese Walze ist in unserm Falle der Zapfen der Hauptrolle, welcher über die Umfänge der Frictionsrollen wälzt. Um die Grösse des entsprechenden Widerstandes vom Umfange des Zapfens an den der Hauptrolle zu übertragen, kann man setzen $Wr = F_{,} R$, woraus sich als Kraft zur Ueberwindung der wälzenden Reibung ergiebt

$$F_{,} = \frac{Wr}{R} = \beta \frac{P}{r} \cdot \frac{r}{R} = \beta \frac{P}{R} = \beta \frac{D}{R}.$$

Die gleitende Reibung an den Axen der Frictionsrollen von diesen an die Umfänge dieser Rollen reducirt, ist $= \mu D' \frac{\varrho'}{r'}$. Es sind zwar vier solcher Rollen; da jedoch auf jede ihrer Axen nur $1/4$ des Gewichtes D' drückt, so lassen sie sich als eine einzige unter dem ganzen Drucke D' in Rechnung nehmen. Ein Widerstand an den Umfängen der Frictionsrollen ist gerade so anzusehen, als sei er an dem Zapfen der Hauptrolle wirksam. Die ihm das Gleichgewicht haltende Kraft an den Umfang der Hauptrolle versetzt, beträgt daher

$$F_{,,} = \mu D' \frac{\varrho' \cdot r}{r' R},$$

folglich die Kraft zur Ausgleichung beider Reibungshindernisse:

$$F = F_{,} + F_{,,} = \beta \frac{D}{R} + \mu D' \frac{\varrho' r}{r' R}.$$

D und D' unterscheiden sich nur durch das stets nur sehr geringe Gewicht der Frictionsrollen. Wenn man daher zur Vereinfachung der Gleichung $D = D'$ setzt, wird erhalten

$$F = \frac{D}{R} \left\{ \beta + \mu \frac{\varrho' r}{r'} \right\}.$$

Nach älteren Erfahrungen von Coulomb, welche sich auf den Widerstand von Walzen aus Holz auf Holzbahnen beziehen, ist, wenn man

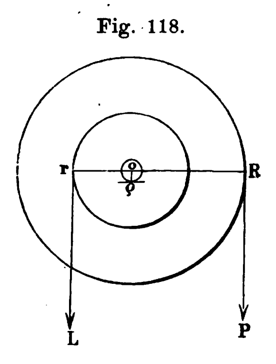
R in Millimeter ausdrückt, $\beta = 0{,}8$. Wenn jedoch Zapfen aus Metall über metallene Radreife wälzen, scheint der davon abhängige Widerstand viel geringer zu sein. Nach Erfahrungen von dem Verhalten auf Eisenbahnen abgeleitet, kann β die Zahl 0,3 nicht übersteigen. Setzen wir indessen mit Beziehung auf einen Apparat wie die Fallmaschine, der mit grosser Sorgfalt und mit feinen Werkzeugen ausgeführt ist, $\beta = 0{,}15$, und wählen wir als Grundlage zu einer Berechnung eine Rolle von derselben Beschaffenheit, wie die in dem frühern Beispiele auf Spitzen ruhende. Hierbei ist jedoch nicht ausser Acht zu lassen, dass als Dicke des Rollzapfens nicht wie früher $\frac{1{,}5}{2}$, sondern 1,5 Millimeter angenommen, folglich $r = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$ Millimeter gesetzt werden muss. Das Gewicht D bleibt wie früher $= 450$ Gramm und $R = 90$ Millimeter. Setzen wir ausserdem den Durchmesser der Frictionsrollen $2\,r' = 30$ Millimeter, den ihrer Zapfen $2\,\varrho, = 2$ Millimeter. Man findet dann die Kraft

$$F = \frac{450}{90} \cdot \left\{0{,}15 + 0{,}08\,\frac{1\,.\,0{,}75}{15}\right\} = 1{,}5 + 0{,}02.$$

Die Zapfenreibung ist zwar sehr bedeutend, bis zu ein Siebentel oder Achtel vermindert, dagegen in der wälzenden Reibung ein neuer und grösserer Widerstand wieder zugeführt worden. Dieses Resultat würde in der Hauptsache nicht verändert werden, wenn auch der Coefficient β einen noch etwas geringern Werth als den hier angenommenen besitzen sollte. Die Frictionsrollen sind demnach, als Verminderungsmittel der Reibung, den conischen Spitzen keineswegs vorzuziehen.

162 **Haspel.** Als eine besondere Form des Hebels haben wir den Haspel schon früher (Nro. 63) kennen gelernt. Derselbe ist ein Rad an der Welle, auf wagerecht liegender Axe ruhend. Ein grösserer Kreis, dessen Radius $o\,R = R$ (Fig. 118), bildet gewöhnlich die Angriffsstelle der Kraft, ein kleinerer, dessen Radius $o\,r = r$, die Angriffsstelle der Last. Während der Bewegung dreht sich der Zapfen auf seinem Lager und bewirkt eine gleitende Reibung, die als Vermehrung der Last am Hebelarme $o\,\varrho = \varrho$ (dem Radius des Zapfens) wirksam ist. Die Bedingung des Gleichgewichtes während der Bewegung knüpft sich daher an die Gleichung

Fig. 118.



$$P\,R = L\,r + \mu\,D\,\varrho,$$

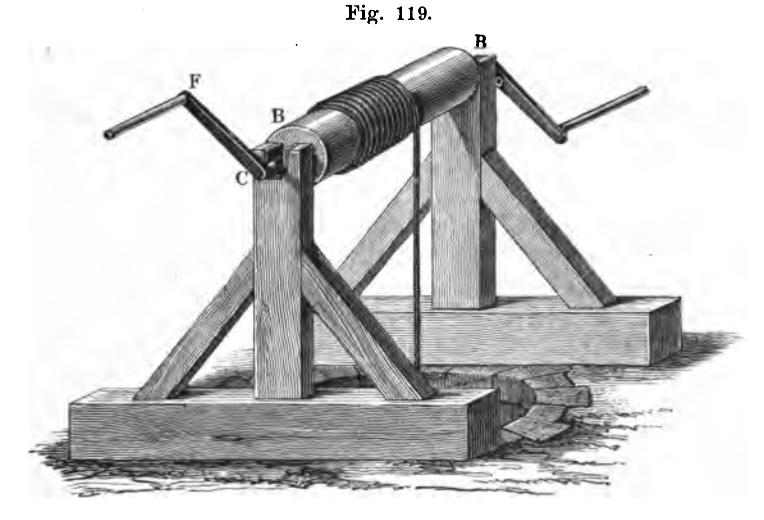
oder wenn man sich den Reibungswiderstand als Bruchtheil der Last an deren Hebelarm reducirt denkt

$$P\,R = \left\{L + \mu\,D\,\frac{\varrho}{r}\right\}\,r.$$

Man erkennt sogleich, dass der Einfluss der Reibung vom Verhältnisse der Zapfendicke zur Wellendicke wesentlich abhängig ist. Wären beide Abmessungen einander gleich, so müsste die Reibung mit ihrer ganzen Grösse die Last vermehren. Zur Erzielung eines guten Arbeitseffectes ist es daher nothwendig, das Verhältniss $\frac{\varrho}{r}$ so klein wie möglich zu erhalten.

Wenn es sich darum handelt, in regelmässigem Betriebe Lasten auf bedeutende Höhen zu schaffen oder aus Schachten zu fördern, wird am häufigsten der bergmännische oder sogenannte Hornhaspel verwendet. Die Figur 119 zeigt die gewöhnlichste Einrichtung desselben. Um die

Fig. 119.



Welle ist ein Seil gewickelt, dessen freies Ende in den Schacht herabhängt, und eine Tonne oder einen Kübel oder sonst ein zur Aufnahme der zu fördernden Gegenstände (Wasser, Erze, Kohlen) bestimmtes Gefäss trägt. Dieses Gefäss hat oft, auch wenn es ganz leer ist, ein ziemlich grosses Gewicht, zu dem dasjenige des Seiles, wenn es lang ist, einen erheblichen Beitrag liefern kann. Bei anhaltendem Betriebe ist es daher vortheilhaft, ja unumgänglich, die Seillänge zu verdoppeln und an beiden Enden Traggefässe anzuhängen, damit diese sich wechselseitig im Gleichgewicht halten und der Kraft nur noch das Heben ihres Inhaltes zukommt. Beim jedesmaligen Beginne der Arbeit muss zwar auch die Hälfte der Seillänge mit gehoben werden, der dazu erforderliche Kraftaufwand kommt jedoch gegen das Ende des Aufziehens der ermattenden Kraft vollständig wieder zu Gute.

Die Wellzapfen drehen sich in offenen mit Eiseneinsätzen versehenen Pfannen.

Die Handhabe für den Arbeiter besteht aus einem geraden mit der

Kurbelstange CF fest verbundenen eisernen Stabe, umgeben von einer leicht beweglichen um den Stab drehbaren Hülse. Sie kann daher während der Arbeit fest gehalten werden, ohne die Hände zu reiben. Der bergmännische Haspel ist gewöhnlich für zwei bis vier Arbeiter berechnet und daher auf beiden Seiten mit Kurbeln versehen. Sie liegen entweder beide so wie Figur 119 zeigt in derselben Ebene, oder ihre Richtungsebenen durchkreuzen sich winkelrecht (Fig. 27). Die letztere Einrichtung, obwohl die seltenere, ist gleichwohl die empfehlenswerthere, weil sie die Arbeit in etwas erleichtert.

Der Haspelzieher drückt nämlich, während er die Kurbel im Kreise herum führt, nicht immer mit gleicher Stärke. Der menschliche Arm kann zwar einen Gegenstand mit grosser Gewalt sowohl fortdrücken wie anziehen, er vermag aber nicht mit gleicher Stärke während des Ueberganges der einen dieser Muskelanstrengungen in die andere zu arbeiten. Ohne Zweifel findet dieser Uebergang von einem gewissen Maximum des Druckes im einen oder andern Sinne ausgehend nur allmälig und durch einen Punkt der Entspannung statt, so dass die Kurbel während der Rotation in jedem Augenblicke einen andern und an zwei Stellen sogar keinen Druck erfährt. In solchen Augenblicken kann die Bewegung nur vermöge gewonnener Geschwindigkeit fortdauern und müsste, wenn letztere gering ist, fast erlöschen. Ein Schwungrad würde dann, wie wir in einem der folgenden Abschnitte sehen werden, als Vermittlerin für die Fortdauer einer mehr gleichförmigen Bewegung eintreten können. Dieser Vortheil ist jedoch, so oft wenigstens zwei Arbeiter den Haspel ziehen, auch dadurch erreichbar, dass der eine mit der vollen Muskelkraft arbeitet, gerade in dem Augenblicke, da dem andern die seinige versagt. Durch die kreuzweise angeordneten Kurbelstangen wird allerdings keine neue Kraft geschaffen, ebenso wenig wie durch Anbringung eines Schwungrades, allein man erleichtert dem Haspelzieher seine Arbeit, indem man seine Kräfte schont, und man vermehrt dadurch indirect die nützliche Leistung.

Durch die Anwendung der Seile wird, wie wir schon wissen, neben der Zapfenreibung noch ein neuer Widerstand zugeführt (Nro. 157), der von der Spannung des Seiles abhängig ist. Nennen wir im Allgemeinen δ den Coefficienten desselben und erwägen, dass die Seilspannung S dem Gewichte des herabhängenden Seiles, vermehrt um das des Kübels und seiner Ladung gleich ist, so ergiebt sich nunmehr die vollständige Gleichung des Hornhaspels

$$P.R = \left\{L + \delta S + \mu D \frac{\varrho}{r}\right\} r.$$

Beispiel: Auf einem Kohlenbergwerke bei Obernkirchen in der ehemals kurhessischen Herrschaft Schaumburg wurden Steinkohlen mittelst Haspelförderung aus 72 Meter (7200 Centimeter) Tiefe geholt. Der zu diesem Zwecke über einem senkrecht niedergehenden Schachte aufgestellte Hornhaspel wurde von vier Mann betrieben. Der Durchmesser

des Kurbelkreises betrug $2R = 114$ Centimeter, der Durchmesser der Welle $2r = 38$ Centimeter und der seiner Zapfen $2\varrho = 3{,}5$ Centimeter. Jeder der beiden Kübel im nassen Zustande wog 30 Kilo und nahm bei jedem Aufzuge 60 Kilo Kohlen auf. Da nach unserer frühern Schätzung (Nro. 157) ein Seil von 1 Centimeter Dicke 36 Kilo mit Sicherheit trägt und bei 1 Meter Länge 0,1 Kilo wiegt, so lässt sich die Dicke des zum Tragen obiger Last erforderlichen Seiles berechnen, denn das Gewicht von 72 Meter Länge desselben beträgt $g = 72 . 0{,}1\,d^2 = 7{,}2\,d^2$, folglich das nöthige Tragungsvermögen

$$60 + 30 + 7{,}2\,d^2 = 36\,d^2,$$

woraus sich ergiebt

$$d = 1{,}76 \text{ Centimeter.}$$

Der gemessene Durchmesser des gebrauchten Seiles hielt 1,84 Centimeter, und 72 Meter desselben wogen 25 Kilo. Kübel und Seil zusammen wogen also 55,0 Kilo, und die jedesmalige Spannung des Lastseiles betrug

$$55 + 60 = 115 = S \text{ Kilo.}$$

Die 3 Meter lange Welle hatte ein Gewicht von 260 Kilo. Der gesammte Druck auf die Zapfen belief sich demnach auf

$$115 + 55 + 260 = 430 = D \text{ Kilo.}$$

Bemerkt man noch, dass die halbe Seildicke $\frac{d}{2} = 0{,}92$ Centimeter dem Hebelarme der Last zuzurechnen, dass $\delta = 0{,}075$ (Nro. 157), und der Reibungscoefficient $\mu = 0{,}12$ zu setzen ist, so sind nunmehr alle Werthe auf der rechten Seite der Gleichung des Hornhaspels bekannt, und man findet, da $\frac{38}{2} + 0{,}92 = 19{,}92$,

$$\begin{aligned} P &= \frac{19{,}92}{57}\left\{60 + 0{,}075 . 115 + 0{,}12 . 430\,\frac{1{,}75}{19{,}92}\right\} \\ &= 0{,}35\,(60 + 8{,}63 + 4{,}53) \\ &= 0{,}35\,(73{,}16) = 25{,}57. \end{aligned}$$

Die von einem Arbeiter angewendete Kraft beträgt $\frac{25{,}57}{5} = 6{,}4$ Kilo, d. h. noch nicht die Hälfte von dem, was wir früher nach dem Ergebnisse vieler Erfahrungen, als Tragkraft eines Arbeiters bei regelmässigen Transporten in Anschlag bringen durften.

Der Wirkungsgrad, d. h. die wirkliche Leistung (hier das gehobene Gewicht) im Verhältniss der dafür verwendeten Anstrengung, in Procenten der letzteren ausgedrückt, ist

$$E = \frac{60 \times 100}{73{,}16} = 82 \text{ Procent.}$$

Die Haspelzieher arbeiteten im Accord und in achtstündigen Schichten. D. h. von acht zu acht Stunden wurden die Arbeiter gewechselt. In jeder Schicht wurden durchschnittlich 180 Kübel Kohlen gefördert. Die Zeit einer Förderung betrug demnach $\frac{8 . 60 . 60}{180} = 160$ Secunden. In diese Zeit fällt jedoch eine jedesmalige Pause von ungefähr 20 Secunden,

während welcher dieselben Leute den oben angekommenen Kübel einige Schritte fortschieben und ausschütten mussten. Unterdessen wurde unten der leere Kübel gegen einen vollen ausgewechselt. Auf das Aufziehen sind also nur 140 Secunden zu rechnen. In diese Zeit fallen $\frac{7200}{2 \,.\, 19{,}92}$ $= 57{,}56$ Umwicklungen des Seiles, also eben so viele Umgänge der Kurbel. Es ist demnach die Zeit einer Umdrehung $\frac{140}{57{,}56} = 2{,}43$ Secunden, und die Geschwindigkeit der Kurbelbewegung, d. i. diejenige der Hände des Arbeiters, $v = \frac{3{,}14 \,.\, 1{,}14}{2{,}43} = 1{,}472$ Meter. Diese Geschwindigkeit ist fast noch einmal so gross als die mittlere eines Fussgängers beim Transport. Das Arbeitsmoment eines Haspelziehers berechnet sich nach diesen Erfahrungsergebnissen zu $P \,.\, v = 1{,}472 \,.\, 6{,}4 = 9{,}4$ Meter-Kilogramm in jeder Secunde (vergl. Nro. 56); wobei jedoch nicht zu übersehen, dass die Arbeiter nur während sieben Stunden in der achtstündigen Schicht mit dem Haspelziehen wirklich beschäftigt waren, und in den Pausen von einem Aufzuge zum andern noch andere Verrichtungen auszuführen hatten.

Erfahrungen, welche zu einem dem hier mitgetheilten gleichen oder doch ähnlichen Resultate führen, liessen sich leicht häufen. Sie lehren, dass bei der Beurtheilung des Betriebseffectes eines Hornhaspels und wahrscheinlich auch anderer rein mechanischer Arbeiten die durch Menschenhand ausgeführt werden sollen, ein anderer Maassstab angelegt werden muss, als derjenige, den wir früher und zwar ebenfalls in Uebereinstimmung mit der Erfahrung, den Berechnungen über den Transport durch menschliche Muskelkraft zu Grunde gelegt haben. Es scheint, dass Arm und Hand des Menschen bei regelmässigen und längere Zeit anhaltenden Arbeiten mehr geeignet sind, eine grosse Schnellkraft als einen grossen Druck auszuüben, und dass nur bei angemessener Berücksichtigung dieser Eigenthümlichkeit der grösste Effect erzielt werden kann. Die sehr allgemein verbreitete Annahme, dass Arbeiter bei der Verwendung als Lastträger mehr zu leisten vermögen, als beim Betriebe des Krummzapfens, wird hierdurch auf einen richtigern Standpunkt zurückgeführt.

Ein grosser Nutzeffect lässt sich mit dem Hornhaspel nur dann erreichen, wenn aus bedeutender Tiefe gefördert wird; denn bei geringer Förderungshöhe häufen sich die Wechsel, und der davon abhängige Zeitverlust kann nicht ersetzt werden.

In einem hessischen Eisenbergwerke musste das Wasser, um durch einen Entwässerungsstollen abfliessen zu können, noch 8,5 Meter gehoben werden. Es wurde dies mittelst eines Hornhaspels bewerkstelligt, an dem jedesmal 4 Arbeiter angestellt waren. Halbmesser des Kurbelkreises $R = 36$ Centimeter, der Welle mit Einschluss der halben Seildicke $r = 12$ Centimeter, des Wellzapfens $\varrho = 1{,}75$ Centimeter, Gewicht der

Welle 100 Kilo, der Tonne 32 Kilo. Es hing von beiden Seiten der Rolle eine Tonne herab, und jede fasste 61 Kilo Wasser. Die von den vier Arbeitern angewendete Kraft berechnet sich hiernach zu

$$P = \frac{1}{3}(61 + 6{,}96 + 3{,}94) = 23{,}97 \text{ Kilo.}$$

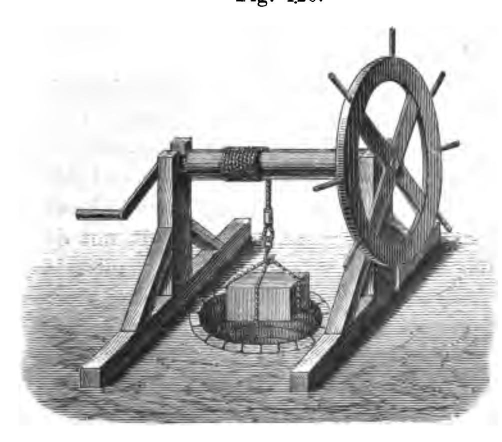
In der achtstündigen Schicht wurden 1000 Tonnen Wasser gehoben und ausgeschüttet. Die Zeit einer Förderung betrug hiernach 28,8 Secunden. Es war eine Einrichtung getroffen, dass die Tonne beim Niederlassen vom höchsten Standorte, den sie erreicht hatte, ohne weitere Beihülfe der Arbeiter auszuschütten begann. Gleichwohl musste wenigstens $^1/_4$ der Arbeitszeit, also durchschnittlich 7,2 Secunden für die Entleerung der Tonne in Rechnung gebracht werden. Für das Aufziehen auf 8,5 Meter Höhe wurden demnach jedesmal nur 21,6 Secunden verwendet, und die Geschwindigkeit in der Peripherie des Kurbelkreises betrug

$$\frac{8{,}5}{21{,}6} \cdot 3 = 1{,}18 \text{ Meter.}$$

Der tägliche Effect war 1000 . 61 . 8,5 = 518500 Meter-Kilogramm. Bei der Förderung aus 72 Meter Tiefe und ebenfalls durch 4 Mann, betrug, wie vorher gezeigt wurde, die tägliche Leistung 180 . 60 . 72 = 777600 Meter-Kilogramm, also um die Hälfte mehr.

Allerdings fällt dieses Missverhältniss theilweise auf Rechnung der unvortheilhaft eingerichteten Maschine. Der Radius des Kurbelkreises hätte bei gleicher Dicke der Welle wenigstens um die Hälfte grösser sein können. Die Ladung durfte dann bei längerer Dauer des Aufzuges vergrössert werden und die Anzahl der Wechsel hätte sich vermindert. Hierzu kommt noch, dass bei fortdauernder Arbeit die Anwendung eines grössern Kurbelkreises für den Arm des Arbeiters weniger anstrengend und ermüdend ist, weil die Muskelkräfte des ganzen Körpers sich in diesem Falle bei der Arbeit thätiger betheiligen. In der That wurde die Arbeit der vier Haspelzieher in dem zuletzt erwähnten Beispiele als eine äusserst anstrengende erachtet, während eine gleiche Anzahl Leute an der vorher erwähnten Kohlengrube ihr Geschäft alltäglich mit gleicher Frische wiederholen konnten.

Fig. 120.



Im Allgemeinen sind beim Aufzuge auf geringe Höhen anstatt des Hornhaspels andere Formen des Haspels vorzuziehen, bei welchen die Wahl in der Länge des Hebelarmes der Kraft weniger beschränkt ist.

Dahin gehören der zum Aufziehen schwerer Bausteine häufig benutzte und allgemein bekannte Kreuzhaspel, das Spillenrad (Fig. 120, auf voriger Seite), dessen Gebrauchsweise aus dem Anblicke der Figur ohne Weiteres genügend verständlich ist, und das Tretrad. Die Zeichnung (Fig. 121) giebt diejenige Einrichtung des Tretrades, welche

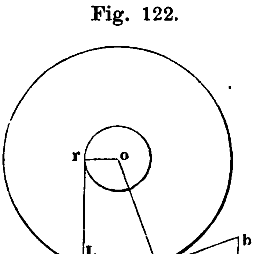
Fig. 121.



man auf den Gypsbrüchen in der Umgebung von Paris im Gebrauche sieht. Der Radkranz, dessen Durchmesser ungefähr das Neunfache von dem der Welle beträgt, ist, wie man bemerkt, an beiden Seiten mit Sprossen versehen, auf welchen der Arbeiter ähnlich wie auf einer Leiter emporzuklimmen sucht. Dadurch wird die Maschine in drehende Bewegung gesetzt und der Arbeiter sinkt mit derselben Schnelligkeit, mit der er sich erhebt, immer wieder zurück, so dass er ungeachtet fortdauernder Thätigkeit seinen Standpunkt wirklich nicht verlässt. Begreiflicher Weise wirkt dabei sein Gewicht als Triebkraft; jedoch nicht das ganze Gewicht seines Körpers. Man kann sich vorstellen, dass der Arbeiter auf einer schiefen Ebene schreite, deren Neigungswinkel durch die Tangente desjenigen Punktes des Radkranzes bestimmt ist, an welchem er sich befindet. Angenommen, der Punkt d (Fig. 122) bezeichne diese Stelle, die

Linie *bc* die Tangente derselben, *ac* die Horizontale, und es sei Winkel $bca = \alpha$, so ist das relative Gewicht des Arbeiters: $p \sin \alpha$ die an dem Hebelarme *od* thätige Kraft, welche dem statischen Momente $L \,.\, or$ der Last das Gleichgewicht halten soll. Angenommen, dieses Gleichgewicht finde statt, der Arbeiter beschleunige aber seine Bewegung, so dass er augenblicklich auf eine höhere Sprosse des Rades zu stehen kommt, so vermehrt sich sein relatives Gewicht, das Rad gewinnt folglich eine beschleunigte Bewegung und er sinkt in die Gleichgewichtslage zurück. Schreitet er dagegen nicht rasch genug vorwärts, so gewinnt die Last das Uebergewicht und beginnt zu sinken, wodurch der Standpunkt des Arbeiters gehoben, derselbe also abermals in die Gleichgewichtslage zurückgetrieben wird. Er ist also gezwungen, so lange die Last gehoben werden soll, immer mit demselben Nachdruck zu arbeiten. Bei welchem Neigungswinkel dieses sein müsse, um möglichst grosse Leistungen zu erzielen, wird sich bald herausstellen, wenn die Arbeit im Accorde geschieht. Natürlich würde die Grösse der Last danach bemessen werden müssen. Der Betrieb des Tretrades ist wegen des sehr bedeutenden Gewichtes der Maschine im Vergleich zu anderen Haspeln von einem ziemlich grossen Reibungswiderstande begleitet. Sein Gebrauch bietet nichtsdestoweniger für den Fall geringer Förderungshöhe bedeutende Vortheile.

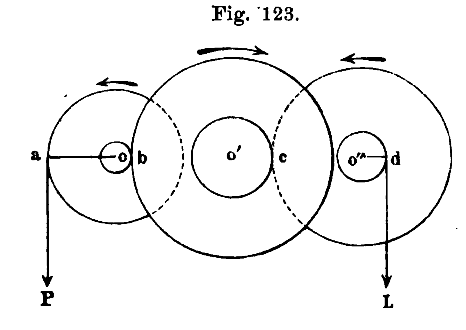
Fig. 122.



Zusammengesetzter Hebel. Mehrere Hebel, die so mit einander in Verbindung stehen, dass die Bewegung des einen die der anderen nach sich zieht, nennt man einen zusammengesetzten Hebel. Es seien o, o' und o'' (Fig. 123) die Mittelpunkte von drei Paaren Rollen, welche je auf derselben Axe befestigt und um diese drehbar sind. Bei *a* an der Peripherie der grossen Rolle des ersten Paares wirke eine Kraft *P* und suche eine Drehung im Sinne des Pfeiles zu bewirken. Am Punkte *b* greifen die Umfänge der kleinen Rolle des ersten und der grossen des zweiten Paares in einander ein, in der Art, dass das zweite Rollensystem der Bewegung des ersten folgen muss. Auf dieselbe Weise hängt bei *c* das dritte mit dem zweiten zusammen. Wenn daher die Kraftrolle des ersten Rollenpaares im Sinne des Pfeiles gedreht wird, muss eine von der Welle des dritten

163

Fig. 123.



herabhängende Last aufsteigen. Die Kraft $P = \frac{r}{R} P'$ an den Punkt b reducirt erscheint hier mit der Grösse P' als die am grossen Rade des zweiten Paares wirksame Kraft, und verwandelt sich durch Reduction an den Punkt c in $P'' = \frac{R'}{r'} P'$, welche letztere dann, wenn Gleichgewicht stattfinden soll, an den Punkt d reducirt, der Last L gleich werden muss. Unter dieser Bedingung gelten also die drei Gleichungen

$$P = \frac{r}{R} P'; \quad P' = \frac{r'}{R'} P'' \quad \text{und} \quad P'' = \frac{r''}{R''} L;$$

oder auch, wenn man den Werth von P'' aus der dritten in die zweite und den von P' aus der zweiten in die erste setzt:

$$P = \frac{r}{R} \cdot \frac{r'}{R'} \cdot \frac{r''}{R''} L.$$

Die Wirksamkeit des zusammengesetzten Hebels stimmt, wie man sieht, mit derjenigen eines einfachen überein, dessen Hebelarme sich verhalten wie das Product $r \,.\, r' \,.\, r''$ der Hebelarme der Last zu dem Producte $R \,.\, R' \,.\, R''$ der Hebelarme der Kraft.

Wenn es sich darum handelt, mittelst des Hebels eine sehr grosse Last durch eine geringe Kraft in Bewegung zu setzen, so würde der der letzteren entsprechende Hebelarm häufig eine sehr bedeutende Länge erhalten müssen. Dieselbe Wirksamkeit, welche der lange Hebelarm gewährt, lässt sich nun auch durch eine Combination passend gewählter kleinerer Hebel erzielen. Es ist jedoch nicht gestattet, diese Regel in sehr weiter Ausdehnung zur Geltung zu bringen, weil mit der Anzahl verbundener Hebel die Bewegungshindernisse sehr schnell anwachsen.

Es ist zunächst einleuchtend, dass Zapfenreibung sowie Steifigkeit der Seile, wenn sie in Betracht kommt, ihren Einfluss hier in ähnlicher Weise wie bei Rolle und Haspel geltend machen. Hierzu kommt aber noch ein neuer Kraftverlust, der beim Uebergange der Kraft vom einen zum andern Hebel zum Vorschein kommt, in welcher Weise übrigens dieser Uebergang vermittelt werden mag. Gewöhnlich sind, wie bekannt, die beiden auf einander einwirkenden Rollen oder Räder an ihren Umfängen mit Zähnen versehen, die in einander eingreifen; woraus eine gleichzeitige Drehung beider als nothwendige Folge hervorgeht. Natürlich kann dies nicht ohne wechselseitige Einwirkung und Bewegung der Zähne des einen Rades über die des andern geschehen. Der hieraus entspringende Widerstand besteht theils aus gleitender, theils aus wälzender Reibung und verzehrt einen kleinen Theil der Arbeitskraft, der zwar, je nach der Einrichtung der Zahnräder, veränderlich, aber immer der an ihre Umfänge reducirten Kraft proportional ist. Wir wollen denselben, in Procenten dieser Kraft ausgedrückt, im Allgemeinen mit α bezeichnen, so dass z. B. die bei b (Fig. 123) an der Peripherie der kleinen Rolle des

ersten Paares wirksame Kraft P', an den Umfang der grossen Rolle des zweiten Paares übertragen, nur mit der Grösse $P'(1 - \alpha)$ zum Vorschein kommt.

Die Gleichung eines dreifach zusammengesetzten Hebelsystemes gestaltet sich hiernach in folgender Weise.

Gleichung des ersten Räderpaares:

$$P = \frac{r}{R}\left(P' + F\frac{\varrho}{r}\right),$$

indem man die Zapfenreibung μD zur Abkürzung mit F bezeichnet.

Gleichung des zweiten Räderpaares:

$$P'(1 - \alpha) = \frac{r'}{R'}\left(P'' + F'\frac{\varrho'}{r'}\right).$$

Gleichung des dritten Räderpaares:

$$P''(1 - \alpha') = \frac{r''}{R''}\left(L + \delta L + F''\frac{\varrho''}{r''}\right).$$

δL bedeutet hier den Widerstand wegen der Steifigkeit des Seiles für den Fall, dass die Last an einem Seile aufgezogen werde.

Durch Substitution der dritten in die zweite und dann der so veränderten zweiten in die erste Gleichung wird erhalten:

$$P = \frac{r\,r'.r''}{R R' R''(1 - \alpha)(1 - \alpha')}$$
$$\left\{L + \delta L + F_{''}\frac{\varrho''}{r''} + F_{'}\frac{\varrho'}{r'}\,\frac{R''(1 - \alpha')}{r''} + F\frac{\varrho}{r}\,\frac{R'R''(1 - \alpha)(1 - \alpha')}{r'\,r''}\right\}.$$

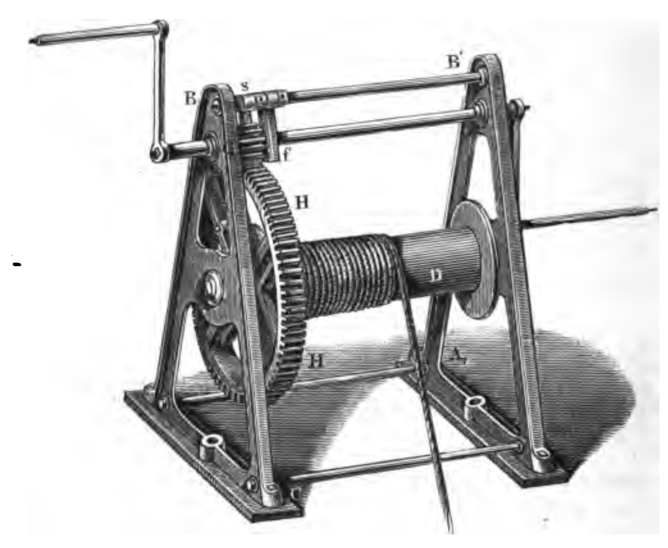
Das Gesetz der Zunahme der Widerstände mit der Zunahme der Anzahl verbundener Hebel tritt deutlich hervor und lässt erkennen, dass beide nicht in einfach proportionalem Verhältnisse stehen, sondern dass die Bewegungshindernisse viel schneller anwachsen als die Zahl der Hebel. Der Grund liegt darin, dass die an den vorderen, der Kraft zunächst liegenden Rollenpaaren eintretenden Widerstände an den Hebelarm der Last reducirt, d. h. als Bruchtheile der Last in Rechnung genommen, im umgekehrten Verhältnisse der Hebelarme sämmtlicher zwischenliegenden Rollenpaare sich vergrössern. Diese Kraftverluste lassen sich indessen sehr vermindern durch jede Vorkehrung, die dahin gerichtet ist, die Zapfenreibung am vordersten oder Krafthebel so gering wie möglich zu halten; also durch Vermeidung einer jeden unnöthigen Vermehrung des Gewichtes dieses Theiles der Maschine; ferner, indem man den Zapfendruck, so weit thunlich, von der Richtung der Schwere abzulenken sucht und indem man dem Verhältnisse der Zapfendicke zum Durchmesser des vordersten Zahnrades einen kleinen Bruchwerth ertheilt.

164

In der Fig. 124 (a. f. S.) ist eine aus zwei Haspeln zusammengesetzte Maschine, der transportable Haspel mit Vorgelege, dargestellt. Derselbe ist aus Gusseisen und Schmiedeeisen ausgeführt. Auf seinem Ge-

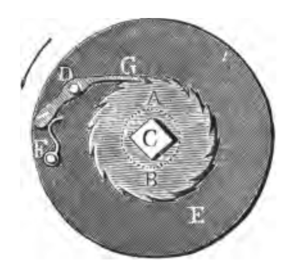
stelle ruhen zwei horizontale Wellen mit Zahnrädern, die in einander eingreifen und dadurch die Bewegung von dem (in der Figur) obern zu

Fig. 124.



dem untern Haspel fortpflanzen. Ersterer, der mit Kurbeln versehen ist, heisst das Vorgelege und sein kleines Zahnrad das Getriebe. Um die Welle des andern wickelt sich ein Seil auf, ganz so wie bei dem einfachen Haspel. Diese Welle ist hohl gegossen und besitzt deshalb verhältnissmässig zu ihrer Grösse kein sehr grosses Gewicht. Um ein Zurückfallen der Last zu hindern, wenn die Kraft aus irgend einem Grunde ihre Arbeit einstellt, hängt bei s an dem Querstabe BB' eine federnde Zunge herab, welche die Bewegung nach der einen Richtung frei gestattet, beim Versuch einer Rückbewegung aber sich gegen irgend einen gerade vortretenden Zahn stemmt. Soll das Seil wieder abgewickelt und herabgelassen werden, so muss man das Getriebe, welches eine seitliche Verschiebbarkeit erlaubt, aus dem Eingriffe mit dem grossen Zahnrade ausrücken. Damit ein solches Ausrücken nicht unabsichtlich eintreten könne, dient das von BB' herabhängende Stäbchen f, welches sich übrigens leicht heben und dann das Getriebe frei lässt.

Fig. 125.



Das Aufhalten der rückwärts gehenden Bewegung einer Haspelwelle kann auch auf andere Weise, z. B. mittelst der in Fig. 125 abgebildeten Sperrscheibe, bewirkt werden. Die gezahnte Scheibe AB sitzt fest auf der Wellenaxe C und dreht sich also mit dieser. Der Rück-

gang im Sinne des Pfeiles wird aber durch das Eingreifen der Zunge DG zwischen zwei Zähne der Sperrscheibe gehindert. Diese Zunge ist auf dem Gerüste der Maschine nur um die Axe D beweglich und wird durch die Feder F gegen die Zähne der Sperrscheibe gedrückt. Soll die Welle frei gemacht werden, so bedarf es nur die Feder etwas zurückzudrücken.

Angenommen, ein Haspel mit Vorgelege soll verwendet werden, um an einem Gebäude Bausteine von grossem Gewichte aufzuziehen. Die Maschine kann zu diesem Zwecke hoch auf einem Gerüste oder auch nach Umständen am Boden festgeschraubt sein. Im letztern Falle muss jedoch das Tragseil oben um eine feste Rolle biegen. Denken wir uns den ersten Fall und setzen voraus, dass zwei Arbeiter zum Betriebe angestellt sind. Beide zusammen vermögen die Kurbel mit einer mittlern Kraft von 16 Kilo und einer mittlern Geschwindigkeit 1,25 Meter zu drehen. Der Halbmesser des Kurbelkreises betrage 0,4 Meter, derjenige des damit verbundenen Getriebes 0,08 Meter. Der Halbmessar des Zahnrades hält ebenfalls 0,4 Meter und der seiner Welle 0,1 Meter. Das Getriebe hat 12 und das Zahnrad 60 Zähne. Die Halbmesser der entsprechenden Zapfen sind $\varrho = 2$ und $\varrho' = 2{,}5$ Centimeter. Der erstere muss stets eine verhältnissmässig grosse Dicke erhalten, weil er nicht nur bestimmt ist, die Kurbelwelle zu tragen, sondern auch die Kraft von der Kurbel zu den Zähnen des Getriebes fortzupflanzen. Setzen wir noch $\mu = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}02$ und, mit Beziehung auf die Steifigkeit des Seiles, $\delta = 0{,}075$. Die allgemeine Gleichung der betreffenden Maschine ist, wie vorher gezeigt worden,

$$P = \frac{r \,.\, r'}{R \,.\, R' \,(1-\alpha)} \left\{ L\,(1+\delta) + F,\frac{\varrho'}{r'} + F\frac{\varrho}{r}\,\frac{R'\,(1-\alpha)}{r'} \right\}.$$

Indem wir die angenommenen Werthe in dieselbe einsetzen, ergiebt sich zunächst der höchste Gränzwerth der Last

$$L = P\,\frac{R \,.\, R'}{r \,.\, r'} = 16 \,.\, \frac{0{,}4 \,.\, 0{,}4}{0{,}08 \,.\, 0{,}1} = 20 \,.\, 16 = 320.$$

Wir können denselben benutzen um die Seildicke zu berechnen. Mit Rücksicht auf frühere Bestimmungen (Nro. 157) findet man dieselbe $d = \sqrt{\frac{320}{36}} = 3$ Centimeter. Davon muss, bei genauerer Berechnung der Last, die Hälfte dem Radius der Lastwelle zugesetzt werden, so dass also dessen der Wahrheit näher kommende Grösse beträgt

$$r' = 0{,}1 + 0{,}015 = 0{,}115 \text{ Meter.}$$

Dieser veränderte Werth von r' ist nicht ohne Einfluss auf die Grösse des höchsten Gränzwerthes der Last. Derselbe bestimmt sich jetzt nur zu

$$L = 16 \,.\, \frac{0{,}4 \,.\, 0{,}4}{0{,}08 \,.\, 0{,}115} = 16 \,.\, \frac{1}{17{,}39} = 278{,}3 \text{ Kilo.}$$

Dieser Zahl wollen wir uns jetzt bedienen, um annäherungsweise den Druck auf die Zapfen der Lastwelle zu ermitteln. Zu demselben

tragen bei: das Gewicht dieses Maschinentheiles (es sei = 115 Kilo), das Gewicht der Last (wie eben gefunden wurde = 278 Kilo) und der in horizontaler Richtung wirksame Druck an der Eingriffsstelle der Zähne. Letzterer beträgt ungefähr $P' = 16 \cdot \frac{0,40}{0,08} = 80$ Kilo. Da er sich mit der Last im Gleichgewicht hält, so setzen sich beide zu einem Drucke gegen die Axe der Lastwelle zusammen und können an dieser wieder in einen horizontalen Druck = 80 und in einen verticalen gleich 278 Kilo zerlegt werden. Zu diesem addirt sich nun unmittelbar das Gewicht der Welle = 115 Kilo, so dass es sich jetzt noch darum handelt, die Resultirende der beiden im Stützpunkte rechtwinklig zusammentreffenden Kräfte 80 und 393 festzustellen. Man erhält nach bekannter Regel

$$D' = \sqrt{80^2 + 393^2} = 401.$$

Daher

$$F_, = \mu D' = 0,1 \cdot 401 = 40,1$$

und

$$F_, \frac{\varrho'}{r'} = 40,1 \frac{2,5}{11,5} = 8,72.$$

Nimmt man das Gewicht der Vorgelegswelle zu 25 Kilo, so ist, da der horizontal gerichtete Zahndruck $P' = 80$, der Zapfendruck

$$D = \sqrt{80^2 + 25^2} = 84;$$

folglich

$$F = \mu D = 0,1 \cdot 84 = 8,4$$

und

$$F \frac{\varrho}{r} = 8,4 \, {}^2/_8 = 2,10.$$

Dieser Widerstand von der Peripherie des Getriebes an die der Welle oder richtiger an das Seil reducirt wird endlich

$$2,10 \frac{0,4 \, (1 - 0,02)}{0,115} = 7,16.$$

Die Kraft P an der Kurbel ist bei dieser Berechnung der Reibungshindernisse ausser Acht gelassen, weil dieselbe im Laufe jeder Umdrehung abwechselnd den Zapfendruck vermehrt und um eben so viel wieder vermindert.

Nachdem nunmehr alle in der Gleichung enthaltenen Werthe mit Ausnahme des von L bekannt sind, wird dieser

$$16 = \frac{1}{17,39 \, (1 - 0,02)} \, (1,075 \, L + 8,72 + 7,16).$$

Es ist daher

$$L = \frac{272,70 - 15,88}{1,075} = 238,9.$$

Es sind dies von der ohne Rücksicht auf Bewegungshindernisse berechneten Last nur $100 \frac{238,9}{278,3} = 85,8$ Procent

Die so ermittelte Grösse der Last L ist allerdings nur ein Näherungswerth, weicht jedoch von dem genauern Werthe nur sehr wenig ab. Zur Bestimmung des letztern hätte man, gestützt auf die jetzt besser bekannten Grundlagen, die Berechnung des Zapfendruckes zu wiederholen und die gefundenen Zahlen ähnlich wie vorher in die Gleichung einzuführen.

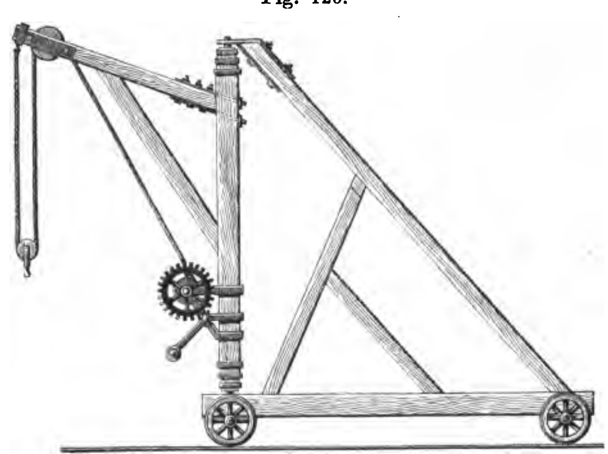
Selbstverständlich konnte die vergrösserte Wirksamkeit der Kraft bei dieser Maschine nicht ohne das Opfer eines verhältnissmässig vermehrten Arbeitsweges erkauft werden. Es folgt dies schon aus allgemeinen Gründen, lässt sich aber auch für diesen besondern Fall leicht beweisen. So oft sich nämlich die Arbeitswelle einmal herumdreht, muss die ganze an ihr hängende Last, welche aus dem Gewichte des gehobenen Körpers und der an seinem Hebelarme reducirten Reibungslast zusammengesetzt ist, den Weg $2\pi r,$ zurücklegen. Die 12 Zähne des Getriebes mussten sich unterdessen fünfmal in die 60 Zähne des Zahnrades eintragen; also eine Umdrehung der Lastwelle bedingt 5 Umdrehungen der Kurbel. Der Weg der Kraft ist folglich $5 \times 2R\pi$. Da nun das Verhältniss $\frac{R}{r,} = \frac{0,4}{0,115} = 3,478$, so ergiebt sich weiter, dass

$$2\pi r, : 5 \,.\, 2\pi R = 1 : 5 \,.\, 3,478 = 1 : 17,39,$$

d. h. die Wege verhalten sich umgekehrt wie die Kraft zur ganzen zu wältigenden Last.

Der Haspel mit Vorgelege bildet einen Hauptbestandtheil einer viel gebrauchten Form des Krahnens oder des Kranichs, jener zum Auf-

Fig. 126.



und Abladen, sowie zur seitlichen Bewegung schwerer Gegenstände so unentbehrlichen Hebemaschine. Die Figur 126 zeigt einen transportablen Krahnen sehr einfacher Einrichtung. Da derselbe mit dem Zwecke des

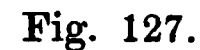
Hebens zugleich den andern verbindet, die gehobene Last nach einer verlangten Stelle hin in wagerechter Richtung zu bewegen, so muss die Maschine um eine senkrechte Axe drehbar sein. Zu dieser Drehung wird jedoch keine andere Kraft in Anspruch genommen, als die zur Ueberwindung der Zapfenreibung erforderliche. Sie lässt sich daher gewöhnlich leicht bewerkstelligen.

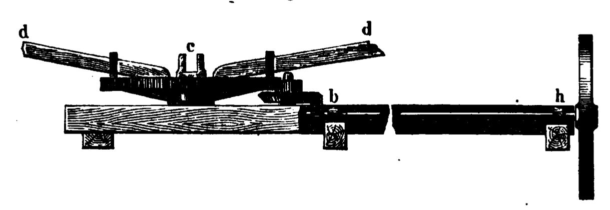
Zum Heben sehr schwerer Werkstücke in Maschinenfabriken und anderen technischen Werkstätten, auf Bauplätzen und an den Ufern der Flüsse sieht man auch Kraniche mit dreifach zusammengesetztem Räderwerke im Gebrauche. Eine verstärkte Wirksamkeit der einfachern Maschine kann aber auch schon durch Hinzuziehung einer beweglichen Rolle oder eines Flaschenzuges von mehreren Rollen erzielt werden. Derselbe wird an einem zu diesem Zwecke an dem Schnabel des Kranichs befestigten Haken angehängt, und das Kraftende des Seiles oder der Kette, wie gewöhnlich, nach der Haspelwelle geleitet. Es ist einleuchtend, dass durch die Verwendung auch nur einer einzigen beweglichen Rolle die Wirksamkeit der Maschine nahe verdoppelt wird. Allerdings kann eine solche durch die Verbindung einer grössern Anzahl Maschinentheile verstärkte Wirksamkeit nicht ohne bedeutende Verminderung des Nutzeffectes erzielt werden.

165 **Pferdegöpel.** Das Rad an der Welle mit aufrecht stehender Axe, die Winde, als selbstständige Maschine wird seltener als der Haspel zum Betriebe für Menschenhände benutzt. In der Figur 28 (Seite 69) ist eine derartige Geräthschaft, die sogenannte Erdwinde, abgebildet. Dieselbe ist nach der Darstellung zunächst dafür bestimmt, irgend eine Last in horizontaler Richtung in Bewegung zu setzen. Mit Hülfe von Leitrollen kann jedoch, wie leicht einzusehen, die entsprechende Zugkraft nach jeder andern Richtung geleitet werden. Den häufigsten Gebrauch der durch Menschenhand getriebenen Winden macht man auf grösseren Schiffen. Die Berechnung in einem besondern Falle unterscheidet sich nicht wesentlich von der des Haspels. Uebrigens scheint die Winde, als Hülfsmittel betrachtet, die menschlichen Muskelkräfte vortheilhaft zu verwerthen, nicht die geeignetste Geräthschaft zu sein. Dagegen bewährt sie sich in der Form des Göpels oder der Rosskunst als die zweckmässigste für die Pferdekraft berechnete Betriebsmaschine.

Der Pferdegöpel wird sowohl als selbstständige Förderungsmaschine z. B. beim bergmännischen Betriebe, wie auch in Verbindung mit anderen Maschinenvorrichtungen, als die geeignete Vermittlung des Angriffs für die Pferdekraft gebraucht. Die Fig. 127 giebt ein Beispiel der letztern Anwendungsart. In beiden Fällen wirkt das Pferd an einem starken und langen Hebel, dem Schwengbaum oder Schwengel cd, dessen eines Ende mit der aufrechtstehenden Welle des Göpels verbunden ist, während sich am andern in der Figur weggelassenen Ende die passende Vorrichtung vorfindet, um ein Pferd anspannen zu können. Letzteres bewegt

sich dann, indem es seine Zugkraft ausübt, in einer Kreisbahn. Bei dem in der Figur dargestellten Göpel ist die Einrichtung getroffen, um zwei


Fig. 127.



Schwengbäume anbringen zu können. Man hat aber auch derartige Maschinen mit vier Krafthebeln, die also zum Betriebe mit vier Pferden berechnet sind.

Die aufrechtstehende Welle ist gewöhnlich oben und unten mit Zapfen und den dazu nothwendigen Widerlagen versehen. Bei der in Fig. 127 abgebildeten Maschine befinden sich beide Widerlagen unter dem Rade, nahe über einander. Da die Axe nur geringe Höhe hat, so genügt dies zur Sicherung ihrer senkrechten Stellung.

Das Rad trägt Zähne, die in die Zähne eines Getriebes eingreifen, welches mit einem zweiten Zahnrade dieselbe Axe theilt und so die Bewegung in leicht verständlicher Weise fortpflanzt. Die Uebertragungswelle *bh* liegt verdeckt unter dem Boden, damit das Pferd nicht in seinem Gange belästigt wird. Wenn der Göpel die Bestimmung hat, Lasten z. B. aus einem Schachte zu fördern, so wird das Zahnrad durch eine Art hohlen Cylinder (Treibkorb, Trommel) ersetzt, der am obern Theile der Welle ziemlich hoch angebracht sein muss, und um welchen sich die beiden Treibseile, das eine aufwickelt, das andere in derselben Zeit abwickelt. Die anfangs horizontale Richtung der Seile wird durch Vermittlung von Leitrollen in die senkrecht oder in geneigter Richtung abwärts gehende des Schachtes verwandelt. Natürlich trägt jedes Seilende ein Gefäss, von welchen das eine, gefüllte, sich hebt, während das andere, leere, niedergeht. Gewöhnlich hat jedes Traggefäss sein besonderes Seil. Die Trommel besteht dann aus zwei getrennten Abtheilungen. Wenn indessen auf der Trommel Raum genug ist, um sämmtliche Windungen neben einander wickeln zu können, dürfte schon eine einzige Seillänge, vermehrt um einige wenige Windungen ausreichen. Man hat gerathen, zur Erhaltung eines unveränderlichen Gleichgewichtes die beiden Enden einer zweiten Seillänge an den Traggefässen zu befestigen, und so dieses Seil in den Schacht herabhängen zu lassen. Geht dasselbe unten um eine Leitrolle, so befinden sich nicht nur an beiden Seiten der Trommel stets gleiche Seilgewichte, sondern es wird zugleich einem allzu starken Schwanken der Gefässe vorgebeugt.

Die Bewegung der Pferde im Kreise herum ist nicht günstig für die volle Entwicklung ihrer Kraft. Dieselbe scheint sich vielmehr dadurch

rascher als bei geradlinigtem Fortschreiten zu erschöpfen. Man will bemerkt haben, dass blinde Pferde und solche, denen der Blick seitwärts verdeckt war, anhaltender und mit geringerer Ermüdung am Göpel arbeiten konnten.

Nicht ohne Einfluss scheint dabei die Art des Einspannens zu sein. Am besten wohl ist es, das Pferd nicht in eine gewöhnliche Scheere zu spannen, sondern die Einrichtung so zu treffen, dass sich die Brust des Pferdes nahe unter seinem Hebel befindet, weil nur in diesem Falle die Zugrichtung senkrecht gegen denselben steht. Wenn die Richtung der Zugkraft mit dem Schwengbaume einen spitzen Winkel bildet, so wird ein Theil derselben nur dafür verwendet, den Druck gegen die Wellzapfen zu vergrössern. Gerstner hat zwar in seinem Handbuche der Mechanik darzuthun gesucht, dass durch die schiefe Zugrichtung der Nutzeffect im Ganzen nicht vermindert werden könne, indem der gegen die Wellaxe gerichtete Seitendruck keine Arbeit verrichte. Allein wenn auch diese Auffassungsweise im Princip richtig ist, so blieb doch bei dieser besondern Anwendung desselben unbeachtet, dass Pferde allein schon durch die Ausübung eines Druckes ermüden, auch wenn sie sich dabei nicht bewegen.

Das Anspannen zweier Pferde nebeneinander an einer Deichsel ist unbedingt nachtheilig, weil sie während der Drehung genöthigt sind, ungleiche Kreisbahnen zu beschreiben.

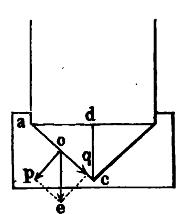
Erfahrene Techniker nehmen an, dass der Kreisbahn des Pferdes ein Durchmesser von 7 bis 10 Meter gegeben werden müsse. Der Durchmesser des Rades oder der Trommel erhält gewöhnlich $1/3$ oder $1/4$ dieser Dimension.

Während der Widerstand der Last immer an derselben Stelle wirksam bleibt, schwankt der Winkel, den der Hebelarm der Kraft mit demjenigen der Last bildet, im Laufe einer jeden Umdrehung zwischen den Gränzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$. In Folge davon wechselt auch die Resultirende des Druckes, welchen Kraft und Last gegen die Wellzapfen erzeugen, von einem Minimalwerthe $L - P$ bis zu dem Maximum $L + P$. Es leuchtet hieraus ein, dass der mittlere wagerechte Zapfendruck, wenn auch nicht genau mit L zusammenfällt, doch jedenfalls nicht viel grösser werden kann. Man pflegt denselben näherungsweise $= L$, folglich das Moment der davon abhängigen Reibung, reducirt an den Hebelarm r der Last, $= \mu L \frac{\varrho}{r}$ zu setzen. In diesem Ausdrucke bedeutet ϱ die arithmetische Mittlere des obern und untern Zapfenhalbmessers, für den Fall, dass beide nicht gleich sind. Wenn, wie bei der bergmännischen Pferdewinde, der horizontale Zapfendruck der Last noch durch den der Seile und daran hängender Gefässe vermehrt wird, so ist in dem obigen Ausdrucke anstatt L die Gesammtgrösse des horizontalen Zapfendruckes zu setzen.

Auch der rotirende Theil der Maschine, dessen gesammtes, meist sehr beträchtliches Gewicht auf dem untern Zapfenlager ruht, bewirkt eine Reibung, die gewöhnlich nicht vernachlässigt werden darf. Dieselbe findet jedoch nicht an dem cylindrischen Umfange des Zapfens, des sogenannten Stiftes statt, sondern an dessen unterer Fläche, auf welcher das Gewicht ruht und die sich auf der Bodenfläche der Pfanne dreht. Denken wir uns diese beiden einander berührenden Flächen zunächst als wagerechte Ebenen, und während der Umdrehung die eine Punkt auf Punkt über die andere gleitend. Wenn man den Druck der Maschine über alle Punkte der Grundfläche $\pi \varrho^2$ des Stiftes gleichförmig vertheilt annehmen kann, so darf man den auf einen beliebigen sehr kleinen Ausschnitt $\frac{\varrho^2 d\varphi}{2}$ dieses Kreises vertheilten Druck so betrachten, als sei derselbe im Schwerpunkte des Ausschnittes, d. h. im Abstande $^2/_3\, \varrho$ vom Mittelpunkte aus concentrirt. Da diese Vorstellungsweise mit gleichem Rechte auf alle kleinen Ausschnitte der Kreisfläche $\pi \varrho^2$ anwendbar ist, so entsteht die Berechtigung, den ganzen auf die ebene Unterlage vertheilten Druck so anzusehen, als sei derselbe in einer Kreisperipherie concentrirt, deren Radius $= {^2/_3}\, \varrho$. Es ist demnach das statische Moment dieser Reibung $= {^2/_3}\, \varrho \mu M$, und an den Hebelarm der Last reducirt $= \frac{2 \varrho \mu M}{3 r}$, wenn man unter M das Gewicht der Maschine versteht.

Gewöhnlich ist die Grundfläche des Stiftes, sowie die Pfanne, in welche es sich senkt, nicht eben, sondern mehr oder weniger conisch gebildet. Es sei Winkel $acd = \alpha$ (Fig. 128) die conische Neigung des Stiftes und $ad = \varrho$ der Halbmesser der Kegelbasis, so ist die Länge einer Seite $ac = \frac{\varrho}{\sin \alpha}$, und die Kreisperipherie, in welcher man sich das Gewicht M concentrirt vorstellen kann, $= 2 \,.\, {^2/_3} \frac{\varrho \pi}{\sin \alpha}$. Der gegen diesen Ring gerichtete lothrechte Druck zerfällt in eine gegen den Scheitelpunkt c des Kegels wirksame Kraft $M \cos \alpha$, die in diesem Punkte selbst ihre Widerlage findet, deren Reibungsmoment folglich gleich Null ist, und in eine auf der Kegelfläche winkelrecht stehende Kraft $M \sin \alpha$. Nur von der letztern ist die Reibung abhängig, deren statisches Moment daher

Fig. 128.



$$\mu M \sin \alpha \, \frac{2 \varrho}{3 \sin \alpha} = {^2/_3}\, \varrho \mu M,$$

also genau so gross ist, wie in dem Falle einer ebenen Grundfläche des Stiftes und der Pfanne. Es ist demnach bezüglich der Grösse des Reibungswiderstandes ganz gleichgeltend, ob der untere Wellzapfen auf ebener Fläche oder in einer konischen Vertiefung reibt. Die Behauptung

einiger Autoren, dass im letztern Falle der Widerstand principiell zunehmen müsse, ist hiernach zu berichtigen.

Die Gleichung des Pferdegöpels ergiebt sich nach den vorausgegangenen Erläuterungen

$$P = \frac{r}{R}\left(L + \mu L \frac{\varrho}{r} + {}^2/_3\, \mu M \frac{\varrho}{r}\right).$$

Zahnreibung im einen Falle, oder Steifigkeit des Seiles im andern sind hierbei noch nicht mit in Rechnung gezogen worden.

Nach Mittheilungen von Gerstner betrug die tägliche Leistung von zwei Zugpferden an einem sehr sorgfältig ausgeführten Göpelwerke binnen achtstündiger Arbeitszeit, während der jedoch nur sechs Stunden wirklich gearbeitet wurde, 870 Wiener Centner 42 Wiener Klafter hoch. Es entspricht dies 48720 Kilo 79,66 Meter hoch gleich 3881000 Meter-Kilogramm. Früher (Nro. 56) hatten wir die mittlere Leistungsfähigkeit eines Pferdes zu 75 Meter-Kilogramm jede Secunde, also die von zwei Pferden in achtstündiger Arbeitszeit zu 4320000 in Rechnung genommen. Hiernach hätte der Nutzeffect jenes (bergmännischen) Göpels $\frac{3881 \,.\, 100}{4320} = 90$ Procent betragen. Durch die verschiedenen Bewegungshindernisse, Steifigkeit des Seiles eingerechnet, wären 10 Procent verloren worden.

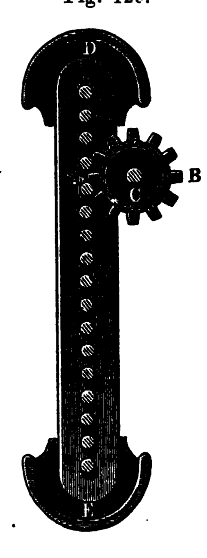
Zehnter Abschnitt.

Von den Fortpflanzungsmitteln der Bewegung.

166 Um die Bewegung von einem Maschinentheile auf den andern zu übertragen, werden verschiedene Hülfsmittel angewendet, deren Erwähnung bereits in früheren Abschnitten theilweise wenigstens nicht umgangen werden konnte. Sie lassen sich unter folgende Hauptabtheilungen zusammenfassen. Bewegung durch Zahn und Getriebe und durch das Ineinandergreifen von Schrauben; Kurbelbewegung; Fortpflanzung der Bewegung durch Seile oder Riemen.

167 **Zahn und Getriebe.** Man verwendet gezahnte Räder von verschiedenen Formen, um die Kreisbewegung von einer Welle auf eine andere zu übertragen, oder auch um dieselbe in eine fortlaufende geradlinigte Bewegung zu verwandeln. Das letztere Verfahren sieht man z. B. in den Sägemühlen im Gebrauche, um das Holz in gleichförmigem Gange der Säge zuzuschieben. Dasselbe benutzt man bekanntlich auch, um die Kolbenstangen grösserer Luftpumpen in Bewegung zu setzen. Das in die Zähne des gezahnten Theils der Stange eingreifende Rad wird dann entweder unmittelbar oder auch unter Beihülfe eines Vorgeleges durch eine Kurbel in Bewegung gesetzt. Angenommen, der Querschnitt des Kolbens einer Luftpumpe halte 52 Quadrat-Centimeter, so beträgt der grösste Widerstand des Luftdruckes beim Betriebe dieser Pumpe ungefähr eben so viele Kilo. Da der Kolben sehr dicht anschliessen muss und, zumal wenn das Instrument nicht regelmässig gebraucht und in Schmiere erhalten wird, oft einen sehr grossen Reibungswiderstand verursacht, so thut man mit Rücksicht hierauf wohl, die für das Bewegen der Kolbenstange erforderliche Kraft $= 2 \cdot 52 = 104$ Kilo zu setzen. Dem Arbeiter an der Kurbel darf man durchschnittlich eine Betriebskraft von mehr als 6, höchstens 8 Kilo nicht zumuthen. Für eine Luftpumpe der angenommenen Grösse würde demnach ein Triebwerk mit Vorgelege nothwendig sein. Z. B. $R = 20$ Centimeter; $r = 2{,}5$ Centimeter; $R' = 6{,}25$ Centimeter und $r' = 2{,}5$ Centimeter. Diese Verhältnisse würden einer 20fachen Verstärkung der an der Kurbel wirksamen Kraft entsprechen, und dabei auch auf den im Triebwerke selbst entstehenden Kraftverlust einige Rücksicht genommen sein. Die Drehung bei den gewöhnlichen Luftpumpen geschieht bekanntlich abwechselnd vorwärts und rückwärts. Der Mechaniker Staudinger in Giessen hat durch eine veränderte Einrichtung der Kolbenstange es dahin zu bringen verstanden, dass auch bei grossen mit Vorgelege versehenen Luftpumpen eine fortdauernde Drehung immer in gleichem Sinne ermöglicht wird. Der Betrieb wird dadurch sehr erleichtert, besonders aus dem Grunde, weil es jetzt gestattet ist, ein Schwungrad mit dem Triebwerke zu verbinden. In der Fig. 129 ist der obere Theil der Kolbenstange einer Staudinger'schen Luftpumpe abgebildet. Dieselbe ist, wie man bemerkt, mit cylindrischen Treibstöcken versehen, in welche die Zähne des Rades AB eingreifen. Wenn in Folge der hierdurch eintretenden Verschiebung (Hebung oder Senkung der Kolbenstange) die Axe C des Rades zu der einen oder andern der beiden halbkreisförmigen Spuren E und D gelangt, wird sie gezwungen, in dieselbe einzurücken und kommt dadurch auf die andere Seite der Triebstöcke,

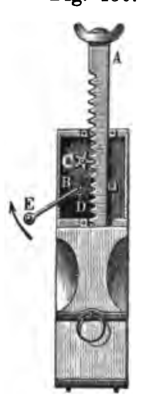
Fig. 129.



ohne auch nur einen Augenblick den Eingriff zu verlassen. So wird die hin- und hergehende Bewegung des Kolbens bewirkt, ohne eine gleichzeitige Abwechslung im Sinne der Drehung zu erfordern.

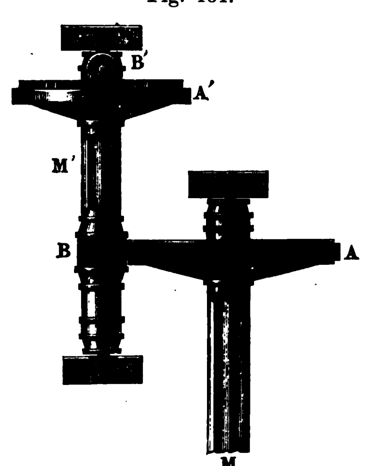
Dem Triebwerke einer gewöhnlichen Luftpumpe sehr ähnlich ist das der gemeinen Winde mit Vorgelege (Wagenwinde), welche einen nützlichen Bestandtheil des Geräthes der Landwirthe ausmacht, und bei dem frühern Zustande unserer Landstrassen keinem Frachtwagen fehlen durfte. Die üblichen Dimensionen des Räderwerkes der Wagenwinde (Fig. 130) sind die folgenden. Halbmesser der Kurbel $R = 7{,}5$ preussische Zoll, Halbmesser des auf derselben Axe sitzenden Getriebes $r = 1{,}25$ Zoll, demnach $\frac{r}{R} = {}^1/_6$; Halbmesser des Zahnrades $R' = 2{,}5$ Zoll, $r' = 1{,}25$ Zoll derjenige seines Getriebes, folglich $\frac{r'}{R'} = {}^1/_2$. Die Kraft wird also mittelst dieser Winde um das Zwölffache verstärkt. Bemerkt man jedoch hierzu, dass die Radzapfen $\varrho = \varrho' = {}^1/_3$ Zoll betragen, sowie dass der Reibungswiderstand zwischen den Zahneingriffen zu $\alpha = 0{,}06$ und der Reibungscoefficient zu $\mu = 0{,}125$ angenommen werden kann, so findet man (Nro. 164), dass der wirkliche Effect 85 Procent nicht übersteigt.

Fig. 130.



168 Die gezahnten Räder führen je nach der verschiedenen Weise ihres Eingriffes in einander verschiedene Namen. Wenn sich ihre Zähne an der Peripherie in der verlängerten Richtung der Radien erheben, wie in A (Fig. 131), so nennt man sie Stirnräder; stehen sie winkelrecht auf der Radfläche rings um den Kranz des Rades herum, wie in A' (Fig. 131), so heissen sie Kammräder oder Kronräder. Den Namen Drehling oder Trilling giebt man solchen Rädern, die aus zwei parallelen Scheiben gebildet sind, welche vermittelst am Umfange derselben eingesetzter cylindrischer Stöcke (Triebstöcke) in Verbindung stehen (B und B' in Fig. 131). In älteren Mühleneinrichtungen sieht man den Mühlstein durch den Eingriff von Kammrad und Trilling, wie A und B in der Figur, in Bewegung gesetzt. Letzterer ist auf derselben senkrechten Welle be-

Fig. 131.



festigt, welche auch den Läufer (den beweglichen Mühlstein) trägt, dergestalt, dass beide gleichzeitig durch die Einwirkung des Kammrades gedreht werden. Dieses sitzt entweder unmittelbar auf der Welle des Wasserrades, oder beide sind durch ein Vorgelege verbunden. Das Letztere ist immer der Fall, wenn das Hauptrad durch den Stoss oder Druck des Wassers keine hinlänglich grosse Geschwindigkeit annehmen kann, um ohne Beihülfe eines Vorgelege dem Läufer die für das Mahlgeschäft durchaus erforderliche Schnelligkeit einflössen zu können. Wir wollen diesen Fall voraussetzen, und demgemäss annehmen, auf der Welle des Mühlrades M (Fig. 131) sei ein Stirnrad mit N Zähnen befestigt, welche in die Triebstöcke eines Drehlings von n Stöcken eingreifen. Die Welle M' des letztern ist zugleich diejenige des Kammrades, dessen N' Zähne den Drehling B' des Läufers mit seinen n' Stöcken bewegen.

Das Wasserrad und mit ihm das Stirnrad machen m Umläufe in der Minute, und der Läufer soll deren M in derselben Zeit vollenden.

Es ist einleuchtend, dass auf eine Umdrehung des Stirnrades $\frac{N}{n}$ Drehungen seines Drehlings, folglich auf m Umläufe des Wasserrades deren $m\frac{N}{n}$ des bezeichneten Drehlings, oder des auf derselben Welle sitzenden Kammrades kommen. Eine Umdrehung des letztern entspricht $\frac{N'}{n'}$ Umwälzungen des Steines. Dieser muss folglich in jeder Minute $m\frac{N}{n}\frac{N'}{n'}$ Umläufe machen, und da wir diese Zahl mit M bezeichnet haben, so entsteht die Gleichung

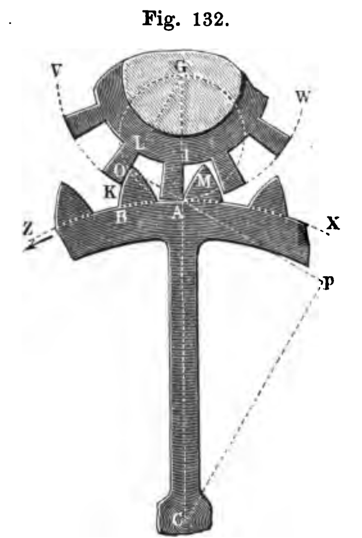
$$M = m\frac{N}{n}\frac{N'}{n'}.$$

M und m sind durch die Verhältnisse gegebene Werthe. Von den beiden Quotienten kann der eine nach Gutdünken gewählt, der andere muss aber dann durch Rechnung bestimmt werden. Es werden z. B. von einem englischen Mühlsteine von 1,3 Meter Durchmesser 90 Umläufe pro Minute gefordert. Das Rad macht aber in dieser Zeit durchschnittlich nur fünf Umgänge; so kann dem Steine die erforderliche Geschwindigkeit gleichwohl eingeprägt werden, wenn man dem Stirnrade 54, dem Kammrade 48 Zähne und jedem der beiden Trillinge 12 Triebstöcke giebt. Man pflegt dann an jedem der beiden Räder einen Zahn mehr oder weniger, z. B. an dem Stirnrade 49, an dem Kammrade 53 anzubringen, weil dadurch nach und nach alle Zähne eines Rades mit allen Triebstöcken in Berührung kommen und eine grössere Gleichmässigkeit in der Abnutzung herbeigeführt wird.

Bei den in der neueren Zeit sehr verbesserten Einrichtungen der Mehlmühlen kommen Kammräder und Drehlinge mehr und mehr ausser Gebrauch.

169 Anstatt der abgerundeten, vorzugsweise sogenannten, Zähne kommen auch andere vor, die von ebenen Seitenflächen begränzt sind, deren Verlängerungen sämmtlich im Kreismittelpunkte zusammentreffen (Fig. 132). Man nennt sie gewöhnlich nicht Zähne, sondern Stäbe; und ein Rad, das an seiner Peripherie mit solchen fast prismatischen Stäben besetzt ist, heisst ein Kumpf. Es ist, wenn es vorkommt, gewöhnlich das kleinere von zweien in einander greifenden Stirnrädern und tritt dann an die Stelle des Drehlings. Das Kumpf in der beschriebenen einfachen Form ist jedoch nicht vortheilhaft im Gebrauch und wird meistens durch zusammengesetztere Zahnformen ersetzt.

Fig. 132.



Die rotirende Bewegung lässt sich mittelst Zahnverbindungen auch aus einer Ebene in eine andere leiten. Die dazu benutzten Räder nennt man Winkelräder oder auch conische Räder, wie bei dem in Fig. 127 abgebildeten Göpel, wo sie als geeignetes Fortpflanzungsmittel der Pferdekraft dienen sollen. Sie lassen sich hinsichtlich ihrer Gestalt immer auf Abschnitte von Kegeln zurückführen, deren Scheitelpunkte zusammenfallen und von welchen die Oberfläche des einen über die des andern rollt.

Vorschriften über die Construction dieser wie anderer Räder liegen dem Plane dieses Buches fern. Wir müssen uns daher beschränken, bezüglich ihrer Einrichtung nur das für unsere Zwecke durchaus Nothwendige hervorzuheben.

170 Wenn zwei kreisförmige Scheiben mit glatten Umfängen um feste Axen drehbar sind, während ihre Umfänge einander berühren und einen hinreichend grossen Druck gegen einander ausüben, um das Abgleiten der einen von der Fläche der andern zu verhindern, so lässt sich keine derselben in Rotation versetzen, ohne die andere mit in diese Bewegung hineinzuziehen.

Ihre Umfänge, da wo sie sich berühren, müssen also über einander wälzen. In ähnlicher Weise hat man sich die drehende Bewegung zweier zusammengehöriger Zahnräder vorzustellen. Auch in diesem Falle sind zwei Kreisperipherien, die sich berühren und über einander wälzen, die sogenannten Theilkreise, besonders hervorzuheben. Aus diesen treten nach einer gewissen Ordnung die Zähne theilweise hervor, theilweise auch sind die Lücken in dieselben eingeschnitten. Es ist einleuchtend, die

Zahneingriffe sollen nur in mehr gesicherter Weise dieselbe Rolle übernehmen, welche bei glatten Umfängen dem wechselseitigen Eingriffe in die selbst bei den glättesten Flächen nie fehlenden Unebenheiten überlassen blieb.

Die Grösse der Zahnräder bestimmt sich, wie man jetzt erkannt haben wird, nach der Grösse ihrer Theilkreise, und wenn man von Durchmesser oder Halbmesser eines Rades spricht, so meint man damit den Durchmesser oder Halbmesser seines Theilkreises, an dessen Peripherie man sich die Kraft in Wirksamkeit befindlich denken muss.

Wenn nun ein Rad das andere so forttreiben soll, dass die Bewegung ohne Erschütterung und mit unveränderter Kraft erfolgt, so müssen die Zähnezahlen beider Räder sich verhalten wie ihre Halbmesser; es müssen ferner in gleichen Zeiten gleich lange Bogenstrecken von dem Umfange jedes Rades fortgeschoben werden, und es muss für jede Lage der Zähne die Kraft, womit ein Rad das andere umtreibt, an den Theilkreis reducirt, gleich gross sein. Natürlich wünscht man zugleich, dass die Uebertragung der Bewegung mit möglichst geringem Verluste durch Reibung vor sich gehe.

Die beiden ersten Bedingungen sind erfüllt, wenn die Theilung, d. h. die Dicke eines Zahnes vermehrt um die darauf folgende Vertiefung auf den Theilkreisen beider Räder in genau gleichen Längen aufgetragen worden sind. Die Weite der Lücken muss der Dicke der Zähne entsprechen, welche sie aufnehmen müssen. Gewöhnlich giebt man, um Klemmungen zu vermeiden, einen sehr kleinen Spielraum zu.

Um der dritten Bedingung zu genügen, müssen die Zähne nach gewissen Regeln gebildet werden, die in der Mehrzahl der Fälle von den Eigenthümlichkeiten der *Epicycloiden* abgeleitet worden sind.

171 Mit dem Namen Epicycloiden bezeichnet man bekanntlich alle diejenigen krummen Linien, welche durch einen beliebigen Punkt einer Rolle, des *Erzeugungskreises*, während ihrer Umwälzung erzeugt werden.

Wälzt die Rolle in gerader Linie über eine Ebene, so bildet der beliebig angenommene Punkt eine *Cycloide*.

Wälzt die Rolle um die äussere Peripherie eines Kreises, des *Grundkreises*, in der Art, dass beide Kreise in derselben Ebene liegen, so zeichnet der beliebig gewählte Punkt die eigentliche *Epicycloide*.

Geschieht die Umwälzung über die innere Peripherie eines Kreises (des Grundkreises), so nennt man die gebildete Curve eine *Hypocycloide*.

Wälzt endlich der Erzeugungskreis so um die Peripherie des Grundkreises, dass beide Kreisebenen einen Winkel bilden, so entsteht die *sphärische Epicycloide*.

Ueber die Verfahrungsarten, diese verschiedenen Curven zu zeichnen, verweisen wir auf die Lehrbücher der Geometrie. Eben da unterrichte

man sich über die Theorie sowie über die bemerkenswerthen Eigenschaften dieser Curven. Besondere Beachtung für unsere Zwecke müssen die folgenden dieser Eigenschaften finden, die überdies allen Epicycloiden gemeinsam sind.

1) Der abgewälzte Bogen des Erzeugungskreises ist an Länge gleich der Ueberwälzungsstrecke auf dem Grundkreise.

2) Die Sehne des abgewälzten Bogens ist die Normale des Punktes der Curve, mit dem sie zusammentrifft. Ein Druck also in der Richtung dieser Sehne thätig, wirkt winkelrecht auf die krumme Linie.

3) Wenn man von dem Fusspunkte dieser Sehne einen Durchmesser durch den Erzeugungskreis zieht, und den gegenüberstehenden Durchschnittspunkt des Kreises mit dem Punkte der Cycloide verbindet, auf welchem die Sehne normal steht und der, als Punkt der Kreisperipherie betrachtet, zugleich der erzeugende Punkt der Curve ist, so ist die hierdurch gebildete gerade Linie die Tangente des bezeichneten Punktes der Epicycloide.

4) Wenn man den Halbmesser des Erzeugungskreises durch r, den Halbmesser des Grundkreises durch R, den abgewälzten Kreisbogen durch $r\varphi$ ausdrückt, so ist mit Beziehung auf die Cycloide:

die Sehne des abgewälzten Stückes des Kreisbogens,

$$s = 2r \sin {}^1/_2\, \varphi,$$

der Krümmungshalbmesser des dieser Sehne zugehörigen Punktes der Curve,

$$A = 4r \sin {}^1/_2\, \varphi,$$

die Länge des Stückes der Cycloide, welches dem abgewälzten Bogen $r\varphi$ entspricht,

$$b = 4r\,(1 - \cos {}^1/_2\, \varphi) = 8r \sin {}^1/_4{}^2\, \varphi.$$

Mit Beziehung auf die Epicycloide ist:

$$s = 2r \sin {}^1/_2\, \varphi,$$

$$A = 4r \sin {}^1/_2\, \varphi\, \frac{r + R}{2r + R},$$

$$b = 4r\,(1 - \cos {}^1/_2\, \varphi)\, \frac{r + R}{R}.$$

Mit Beziehung auf die Hypocycloide ist:

$$s = 2r \sin {}^1/_2\, \varphi,$$

$$A = 4r \sin {}^1/_2\, \varphi\, \frac{R - r}{2r - R},$$

$$b = 4r\,(1 - \cos {}^1/_2\, \varphi)\, \frac{R - r}{R}.$$

Die sphärische Epicycloide kann man sich vorstellen als erzeugt durch die Wälzung der Grundfläche eines Kegels, des Erzeu-

gungskegels, über die Peripherie der Grundfläche eines andern Kegels, des Grundkegels, dessen Scheitelpunkt mit dem des erstern zusammenfällt, so dass also beide Kegel während der Umwälzung sich der Länge nach in einer geraden Linie berühren, die vom Scheitelpunkte nach dem Berührungspunkte beider Kreise gezogen ist. Jeder Punkt dieser Linie beschreibt während der Umwälzung einen Kreis, sowohl auf dem Grundkegel wie auf dem Erzeugungskegel in der Art, dass die Ebenen dieser Kreise den Grundflächen der respectiven Kegel parallel sind.

Jeder Punkt eines auf dem Erzeugungskegel beschriebenen Kreises zeichnet, während letzterer über den zugehörigen Kreis des Grundkegels wälzt, eine sphärische Epicycloide.

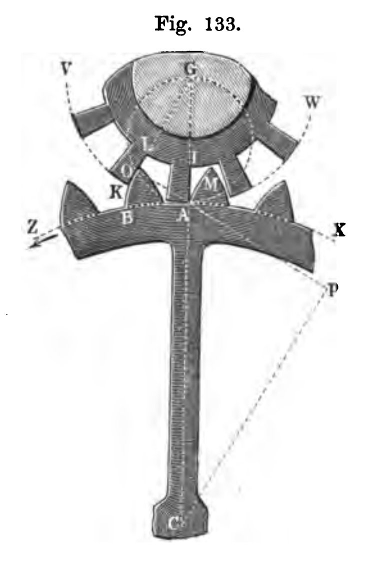
Da der Scheitelpunkt beider Kegel von jedem Punkte der Peripherie, des Grundkreises sowohl wie des Erzeugungskreises, in gleichem Abstande liegt, so folgt, dass beide Kreisperipherien in der Oberfläche derselben Kugel sich befinden müssen. In derselben Oberfläche muss also auch jeder Punkt der beschriebenen Epicycloide enthalten sein. Diese Curve ist folglich eine krumme Linie von doppelter Krümmung.

Wenn der Erzeugungskreis auf dem Grundkreise rechtwinklig steht oder doch von dieser Stellung sich nicht weit entfernt, kann man die Ueberwälzungsstrecke auf der Ebene des letztern für die Bedingung eines sehr kleinen abgewälzten Bogens als eine gerade Linie ansehen. Die sphärische Epicycloide stimmt also innerhalb dieser Gränzen mit der Cycloide nahe überein. Die Uebereinstimmung ist um so grösser, je kleiner der Bogen und je kleiner der Halbmesser des Erzeugungskreises gegen den des Grundkreises. Beide Curven weichen aber selbst auf kurze Strecken hin um so mehr von einander ab, je mehr sich der Neigungswinkel zwischen Grund- und Erzeugungskreis von 90^0 entfernt.

172 Wir wollen jetzt an einem Beispiele zeigen, in welcher Weise epicycloidal gestaltete Zähne der Anforderung an eine gleichförmige Uebertragung und Fortpflanzung des Druckes von einem Rade auf das andere Genüge zu leisten vermögen. Ein Stirnrad sei bestimmt, ein kleineres Rad mit prismatischen Zähnen (mit Stäben) ein sogenanntes Kumpf in Bewegung zu setzen. In Fig. 133 (a. f. S.) erblickt man Bogenstücke XAZ und WAV der Theilkreise beider Räder; C ist der Mittelpunkt des Stirnrades, G der des Kumpfes. Es seien $CA = R$ und $GA = r$ die Halbmesser beider Räder, deren Theilkreise sich bei A berühren. Es ist der Moment dargestellt, da ein Zahn des Stirnrades einen Stab des Getriebes gerade an seiner untersten Kante erfasst. Die Krümmung dieses Zahnes entspricht derjenigen einer Epicycloide, welche erzeugt wird, wenn ein Kreis, dessen Durchmesser $AG = r$, d. h. gleich der Hälfte vom Durchmesser des Kumpfes, über den Theilkreis XZ des Stirnrades als Grundkreis wälzt. Z. B. ein Punkt O jenes Kreises wird den

Epicycloidenbogen OB zeichnen, während der Kreisbogen AO die gleich lange Bogenstrecke AB des Stirnrades überwälzt. AB ist die Theilung auf dem Stirnrade; dieselbe gilt natürlich auch für den Theilkreis des Kumpfes. Wenn nun der Zahn AM den erfassten Stab fortschiebt und in seinem Vorrücken um den Abstand der Theilung in der Lage BO angekommen ist, so muss der Stab von AJ nach KL fortgeschoben sein; der Punkt A des Theilkreises des Kumpfes hat also den Bogen AK beschrieben. Die Sehne AO des abgewälzten Bogens steht (entsprechend den Eigenschaften der Epicycloide) normal auf dem Punkte O der Curve, und der Halbmesser $KG = r$ des Getriebes ist die Tangente dieses Punktes. Aehnliche Beziehungen gelten natürlich allgemein für jeden andern Punkt der Curve.

Fig. 133.



Wenn daher die Zähne des Stirnrades nach einer Epicycloide gebildet werden, deren Erzeugungskreis den Halbmesser des Kumpfes zum Durchmesser hat, die Stäbe des letztern aber so geschnitten werden, dass die Ebenen ihrer Seiten, verlängert gedacht, den Mittelpunkt durchschneiden, so muss während der Drehung ein Zahn AM des Stirnrades einen Stab AJ des Getriebes immer in dem Augenblicke ergreifen, da die Fläche AJ in die Lage CG fällt, in welcher beide Theilkreise einander berühren. Beide Zähne werden dann durch die ganze Strecke der Theilung $AB = AO$ in ununterbrochener Berührung bleiben, folglich auch fortdauernd während dieser Zeit einander drücken. Es sei Winkel $KGA = \varphi$, so ist der dem Bogen AO zugehörige Mittelpunktswinkel $= 2\varphi$; daher Bogen $AO = \frac{1}{2} r \,.\, 2\varphi = r\varphi =$ Bogen AK. D. h. der Bogen AK am Theilkreise des Kumpfes ist gleich dem Bogen AB am Theilkreise des Stirnrades. Die Theilung auf beiden Kreisen ist also gleich gross, und beide Räder legen gleichzeitig gleiche Wege zurück.

Die Kraft P an der Peripherie des Stirnrades pflanzt sich gegen den Punkt O des Stabes in der Richtung der Normalen AO fort, und äussert gegen diesen Punkt einen Druck P', dessen Grösse aus der Betrachtung hervorgeht, dass P an dem Hebelarme $AC = R$ wirksam ist, während die gegen die Richtung OAp der Kraft P' senkrecht geführte Linie Cp als Hebelarm dieser letztern gelten kann. Nun ist $Cp = R \cos \varphi$, weil Winkel $ACp = AGO = \varphi$, folglich

$$P \,.\, R = P' R \cos \varphi \quad \text{und} \quad P' = \frac{P}{\cos \varphi}.$$

Das Moment dieses Druckes bezogen auf den Theilkreis des Kumpfes ist

$$\frac{P}{\cos\varphi} \cdot OG = \frac{P}{\cos\varphi} \cdot r\cos\varphi = P \,.\, r;$$

also gerade so, als ob an der Peripherie des Kumpfes eine stetige Kraft P thätig sei. Die Anforderungen an den richtigen Gang des Triebwerkes sind somit erfüllt.

173 Die Reibung zwischen Zahn und Stab ist an irgend einem Punkte O von dem daselbst herrschenden normalen Drucke $\frac{P}{\cos\varphi}$ abhängig und beträgt $\frac{\mu P}{\cos\varphi}$. Ihr mechanisches Moment für die kleine Bogenlänge db ist daher $\frac{\mu P}{\cos\varphi}\,db$. Das ganze Bogenstück der Epicycloide, über welches sich der Stab bewegt, und dessen Erzeugungskreis den Halbmesser $\frac{r}{2}$ besitzt, hat die Länge (vergl. Nro. 171, 4)

$$b = 4\,\frac{r}{2}\,(1 - \cos\varphi)\,\frac{\frac{r}{2} + R}{R} = 2\,r\,(1 - \cos\varphi)\,\frac{r + 2R}{2R}.$$

Es ist folglich

$$db = 2\,r\,\frac{r + 2R}{2R}\,\sin\varphi\,d\varphi,$$

und das Differential der Reibungsarbeit, während beide Räder je an ihren Theilkreisen den Weg einer Theilung zurücklegen,

$$df = \frac{\mu P}{\cos\varphi} \cdot 2\,r\,\frac{r + 2R}{2R}\,\sin\varphi\,d\varphi = 2\,r\,\mu P\,\frac{r + 2R}{2R}\,tng\,\varphi\,d\varphi.$$

Die ganze Reibungsarbeit zwischen den genannten Gränzen ist demnach, da für $\varphi = 0$ auch $\log\cos\varphi = 0$ wird,

$$f = -\,\mu P\,2\,r\,\frac{r + 2R}{2R}\,2{,}3\,\log\,\cos\varphi = p \,.\, r\varphi,$$

wenn man unter p eine Kraft versteht, die am Theilkreise des Kumpfes wirksam, der Zahnreibung das Gleichgewicht hält und den Weg $r\varphi$ (die Theilung) zurücklegen muss, während die Reibung über die Fläche eines Zahnes schreitet. Die Kraft selbst, welche wegen der Reibung zugesetzt werden muss und welche bei der Uebertragung der Kraft P vom einen Rade auf das andere verloren geht, beträgt also

$$p = -\,\frac{2\,\mu P}{\varphi}\,\frac{r + 2R}{2R}\,2{,}3\,\log\,\cos\varphi.$$

Es seien n und N die Zahlen der Zähne beider Räder, so ist der Bogen $KGA = \varphi = \frac{2\pi}{n}$, und es verhält sich $r : R = n : N$. Man kann daher auch setzen:

$$p = -\frac{2,3\,\mu P n}{\pi}\,\frac{n + 2N}{2N}\,log\,cos\,\frac{360}{n}.$$

Man ersieht aus dieser Gleichung, dass das Verhältniss der Radhalbmesser $\frac{r}{R}$ auf die Grösse der Zahnreibung nur geringen Einfluss äussert. Von viel grösserer Bedeutung ist die Anzahl der Stäbe des Getriebes; denn $cos\,\varphi$ nähert sich der Einheit und folglich sein Logarithmus dem Werthe Null, um so mehr, je kleiner der Bogen φ, d. h. je mehr Stäbe auf demselben Theilkreise sitzen. Der physikalische Grund beruht darauf, dass mit der Abnahme des Winkels φ auch der Bogen der Epicycloide und somit wieder der Weg der Reibung sich verkürzt. Die Grösse der Reibung zwischen Zahn und Stab und ihr Einfluss auf die Bewegung wird sich am besten nach einigen Beispielen beurtheilen lassen.

Ein Stirnrad, bestimmt einen Kumpf zu treiben, trage $N = 50$ Zähne, die Anzahl Stäbe des Kumpfes sei wechselnd, der Reibungscoefficient $\mu = 0{,}12$, so findet man, wenn die Anzahl der Stäbe

$n = 5$ den Widerstand $p = 1{,}96\,\mu P = 0{,}235\,P$,
für $n = 10$ „ $p = 0{,}74\,\mu P = 0{,}089\,P$,
$n = 20$ „ $p = 0{,}38\,\mu P = 0{,}046\,P$.

Wie man bemerkt, gestalten sich Stirnrad und Kumpf erst dann zu einem vortheilhaften Uebertragungsmittel der Bewegung, wenn das letztere eine ziemlich grosse Anzahl, wenigstens 20 Stäbe, erhält. Soll das Zahnverhältniss beider Räder unverändert bleiben, so muss man die Anzahl Zähne des Stirnrades gleichmässig mit der des Getriebes anwachsen lassen. Um z. B. das Verhältniss 1 : 10 beizubehalten, muss man für 10 oder 20 Stäbe des Kumpfes dem Stirnrade 100 und 200 Zähne geben. Man findet

für $N = 100$ und $n = 10$; $p = 0{,}71\,\mu P = 0{,}085\,P$,
„ $N = 200$ und $n = 20$; $p = 0{,}34\,\mu P = 0{,}040\,P$.

Den grössten Einfluss auf die Verminderung der Reibung hat also, wie man sieht, die Vermehrung der Zahl der Stäbe.

Es ist deshalb rathsam, und auch schon von Eytelwein empfohlen, zum Zwecke der Verminderung der Reibung das Stirnrad mit prismatischen Stäben zu versehen, die Zähne des Getriebes aber nach einer Epicycloide zu bilden, deren Erzeugungskreis den Halbmesser des grössern Rades zum Durchmesser hat. Eytelwein hatte dabei allerdings hölzerne Räder und den Fall im Auge, dass das grosse Rad durch das kleine getrieben werden soll. Allein diese veränderte Anordnung scheint in allen Fällen Vortheile zu gewähren. Denken wir uns beispielsweise ein Stirnrad mit 50 Stäben von vorschriftsmässiger Gestalt versehen, im Eingriffe mit einem Getriebe von 5 epicycloidischen Zähnen, so bestimmt sich die Reibung nach der Gleichung

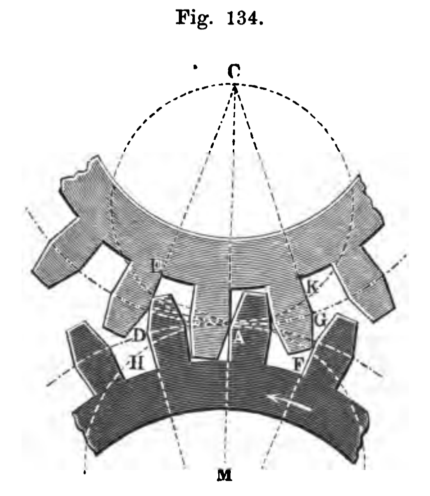
$$p = -\frac{2{,}3\,\mu}{\pi} P \,.\, 50 \frac{50 + 2\,.\,5}{2\,.\,5} \log\cos\frac{360}{50},$$
$$= 0{,}715\,\mu P = 0{,}086\,P.$$

Der Reibungswiderstand verzehrt 8,6 Procent der Kraft, während im umgekehrten Falle 23,5 Procent verloren wurde.

Mit Beziehung auf die Grösse der Reibung ist es, theoretisch aufgefasst, übrigens einerlei, welches von zweien Rädern das andere bewegt, denn in beiden Fällen legt derselbe Widerstand denselben Weg zurück, im einen nur im umgekehrten Sinne des andern. Wenn z. B. im einen Falle der Zahn des einen Rades den Stab des andern in der Mittelpunktslinie erfasst, so werden sich beide bei umgekehrter Einwirkung schon vor der Mittelpunktslinie ergreifen und erst in dieser wieder trennen.

174 Wenn man findet, dass die Zähne eines Rades die des andern schon vor der Mittelpunktslinie ergreifen und erst jenseits derselben wieder verlassen, so sind in der Regel die Zähne beider Räder, so weit sie über die Theilkreise hervorstehen, nach Epicycloiden gebildet (Fig. 134), deren Erzeugungskreise wechselweise den Halbmesser des andern Rades zum Durchmesser haben. Die Untertheile der Zähne innerhalb der Theilrisse sind dann beiderseits nach geraden Linien gebildet, die sich im Mittelpunkte des zugehörigen Rades vereinigen. In Folge dieser Anordnung wird nun der Obertheil eines Zahnes des einen Rades vom Untertheile eines Zahnes des andern schon vor der Mittelpunktslinie erfasst und bis zu dieser fortgeschoben, wo alsdann der ebene Untertheil des erstern mit dem cycloidisch gekrümmten Obertheil des andern in Berührung tritt und während der übrigen Zeit des Eingriffes beider Zähne in Berührung bleibt.

Fig. 134.



Ein sogleich in die Augen springender Vortheil dieser Einrichtung ist, dass gleichzeitig noch einmal so viele Zähne im Eingriffe stehen, als zwischen Zahn und Stab. Es können folglich ohne Gefahr für die Haltbarkeit eine grössere Anzahl Zähne auf demselben Umfange des Rades angebracht werden.

Hierzu kommt noch, dass die Theilung $r\varphi = R\varphi$, (eigentlich der Bogen, welchen je zwei Zähne im Eingriffe mit einander beschreiben) sich

jetzt auf beide Theile der Bewegung vertheilt, so dass die epicycloidische Krümmung des einen Zahnes nur den Bogen $\frac{r\varphi}{2}$, die eines Zahnes des andern Rades nur dem Bogen $\frac{R\varphi'}{2}$ entspricht. Die Grössen der Epicycloidenbögen sind daher für das Rad, dessen Halbmesser $= r$:

$$b = \frac{4r}{2}\,(1 - \cos {}^1\!/_2\,\varphi)\,\frac{r + 2R}{2R};$$

für das Rad, dessen Halbmesser $= R$:

$$b' = \frac{4R}{2}\,(1 - \cos {}^1\!/_2\,\varphi')\,\frac{2r + R}{2r}.$$

Die entsprechenden Normaldrücke, von welchen die Reibung abhängt, betragen im ersten Falle $\frac{P}{\cos {}^1\!/_2\,\varphi}$, im andern $\frac{P}{\cos {}^1\!/_2\,\varphi'}$.

Daraus ergiebt sich nun, wenn die Rechnung ganz so wie früher ausgeführt, dabei aber in Erwägung gezogen wird, dass der Druck P sich auf die Zähne auf beiden Seiten der Mittelpunktslinie vertheilt, also auf jeder Seite etwa $\frac{P}{2}$ in Anschlag zu bringen ist: Die Reibungsarbeit vor der Mittelpunktslinie,

$$p'\,\frac{R\varphi'}{2} = -\,2\,.\,2{,}3\,R\,\frac{2r + R}{2r}\,\log\cos {}^1\!/_2\,\varphi' \cdot \frac{\mu P}{2},$$

die Reibungsarbeit nach der Mittelpunktslinie,

$$p\,\frac{r\varphi}{2} = -\,2\,.\,2{,}3\,r\,\frac{r + 2R}{2R}\,\log\cos {}^1\!/_2\,\varphi \cdot \frac{\mu P}{2}.$$

Folglich die Kraft, welche der Reibung das Gleichgewicht hält,

$$p + p' = -\frac{2\,.\,2{,}3\,\mu P}{2}\left\{\frac{2r + R}{2r\,\frac{\varphi'}{2}}\log\cos {}^1\!/_2\,\varphi' + \frac{r + 2R}{2R\,\frac{\varphi}{2}}\log\cos {}^1\!/_2\,\varphi\right\};$$

oder auch, da $\frac{\varphi'}{2} = \frac{2\pi}{N}$ und $\frac{\varphi}{2} = \frac{2\pi}{n}$,

$$F = p + p' = -\frac{2{,}3\,\mu P}{2\pi}\left\{\frac{2n + N}{2n}\,N\log\cos\frac{360}{N} + \frac{n + 2N}{2N}\,n\log\cos\frac{360}{n}\right\}.$$

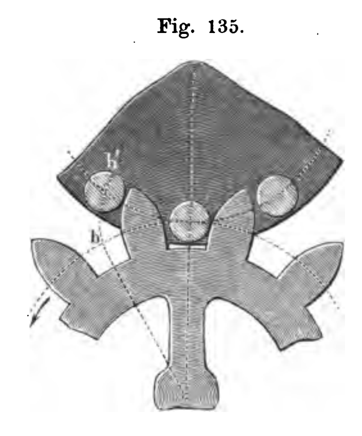
Die Zahnreibung berechnet sich nach dieser Formel, wenn man wieder wie früher annimmt, dass ein Stirnrad mit $N = 50$ Zähnen ein Getriebe mit n Zähnen oder umgekehrt letzteres das erstere in Bewegung setze,

für $n = 5$, $F = 1{,}34\,\mu P = 0{,}161\,P$,
„ $n = 10$, $F = 0{,}58\,\mu P = 0{,}070\,P$,
„ $n = 20$, $F = 0{,}33\,\mu P = 0{,}042\,P$.

Der Reibungswiderstand ist geringer, insbesondere bei Anwendung von Getrieben mit wenigen Zähnen bedeutend geringer als zwischen Stirnrad und Kumpf. Grössere Verluste durch Zahnreibung können gleichwohl nur dadurch vermieden werden, dass man beiden Rädern eine ziemlich grosse Anzahl Zähne giebt. Ertheilt man z. B., um das Verhältniss 5 zu 1 beizubehalten, dem grössern Rade 150, dem kleinern 30 Zähne, so findet man $F = 0{,}189\,\mu P = 0{,}0226\,P$.

175 Bemerkenswerth durch geringe Zahnreibung sind die aus Zahnrädern und Drehlingen gebildeten Radverbindungen. Als Theilkreis eines Drehlings nimmt man die durch sämmtliche Mittelpunkte seiner Stöcke gehende Peripherie (Fig. 135); der Theilkreis des zugehörigen Stirnrades beginnt, wie bei anderen Stirnrädern, an dem gekrümmten Theile, an der sogenannten Brust des Zahnes. Die Krümmung der Zähne geschieht nach dem Bogen einer Epicycloide, von welcher der Umfang des Rades den Grundkreis, der des Getriebes den Erzeugungskreis bildet. Eigentlich ist es eine diesem Epicycloidenbogen parallele Curve, gezogen mittelst eines um die halbe Dicke des Stockes verkürzten Krümmungshalbmessers.

Fig. 135.



Bei dieser Gestalt des Zahnes muss derselbe mit dem Stocke in dem Augenblicke zusammentreffen, da der Mittelpunkt des letztern in A angekommen ist; es ist unmöglich, dass dieses Zusammentreffen früher geschehen könne, indem beide Räder gleiche Theilung haben, folglich der Winkel $A\,Ca$, den der nächst folgende Stock am Mittelpunkte des Rades bildet, immer kleiner sein muss, als der Winkel $A\,Cd$ des nächstfolgenden Zahnes.

Die einmal begonnene Berührung dauert dann so lange fort, bis sich der Stock von der ganzen Bogenlänge des Zahnes abgewunden hat. Diese Länge muss wenigstens so gross sein, dass der nächst folgende Stock bereits von einem Zahn erfasst ist, wenn sein Vorgänger den seinigen verlässt.

Bei ganz genau ausgeführter Zahnkrümmung vergrössert sich der Krümmungshalbmesser der Curve von b nach b' hin. So genau wird allerdings der Zahn in der Regel nicht gebildet, sondern man begnügt sich mit einem mittlern Krümmungshalbmesser, der den verschiedenen Punkten des kleinen Stückes der krummen Linie ungefähr gleich gut entspricht. Behufs der Bestimmung des Reibungsmomentes haben wir gleichwohl, um einen sichern Anhalt zur Vergleichung zu gewinnen,

einen regelrecht gestalteten Zahn vorausgesetzt, und für diesen den Reibungswiderstand nach der in Nro. 173 angegebenen Weise berechnet.

Wir setzen demgemäss den Druck, welchen der Zahn gegen den Stock in normaler Richtung ausübt, $= \frac{P}{\cos {}^1/_2\, \varphi}$, wenn die an der Peripherie des Stirnrades wirksame Kraft $= P$ angenommen wird. Indem ferner für die der Bogenstrecke $r\,\varphi$ des Getriebes entsprechende Länge der (der epicycloidischen Krümmung gleichlaufenden) Zahnkrümmung der Werth $b' = 3\,r\,(1 - \cos {}^1/_2\,\varphi)\,\frac{r + R}{R}$ genommen wird, was dem wirklichen Betrage jedenfalls sehr nahe kommt und keinenfalls weniger ist, erhält man nach Ausführung der nöthigen, bereits früher erläuterten Rechnungen für die Grösse des Reibungswiderstandes

$$p = -\frac{2{,}3\;.\;3}{\varphi}\,\mu P\,\frac{r + R}{R}\,\log \cos {}^1/_2\,\varphi,$$

oder auch, da $\varphi = \frac{2\,\pi}{n}$ und ${}^1/_2\,\varphi = \frac{\pi}{n}$:

$$p = -\frac{2{,}3\;.\;3}{2\;.\;3{,}14}\,\mu P n\,\frac{n + N}{N}\,\log \cos \frac{180^0}{n}.$$

Setzt man zur Vergleichung mit früheren Beispielen $N = 50$, so ergiebt sich

für $n = 5$, $p = 0{,}56\,\mu\,P = 0{,}067\,P$,
„ $n = 10$, $p = 0{,}29\,\mu\,P = 0{,}035\,P$,
„ $n = 20$, $p = 0{,}17\,\mu\,P = 0{,}020\,P$.

Die Reibung zwischen Zahn und Stock ist, wie man sieht, beträchtlich geringer als unter übrigens gleichen Verhältnissen bei anderen Combinationen. Aber auch Drehlinge veranlassen eine um so geringere Reibung, je mehr Stöcke sie enthalten. Der Berührungspunkt des Stockes mit dem Zahne ändert sich während des Fortrückens, so dass die Bewegung in nicht ganz unbeträchtlichem Verhältnisse eine wälzende ist. Der wahre Reibungswiderstand fällt daher in allen Fällen noch etwas geringer aus, als der dafür berechnete Werth. Da indessen die Triebstöcke doch auf einer weit kleinern Strecke ihrer Oberfläche reiben als die Zähne (das Verhältniss ist ungefähr wie 1 : 4); da ausserdem der Drehling in der Regel weniger Stöcke, als das Rad Zähne hat, so kommt es, dass die Triebstöcke hölzerner Radverbindungen bald abgenutzt werden und dann, wenn sie nicht rechtzeitig ersetzt werden, den Widerstand vermehren. Es ist aus diesem Grunde zweckmässig, Zähne von Holz in eiserne Triebstöcke eingreifen zu lassen. Zudem wird dadurch der Reibungscoefficient vermindert. Derselbe beträgt bei trockner Reibung $\mu = 0{,}2$; wenn mit Talg geschmiert wurde, $\mu = 0{,}1$.

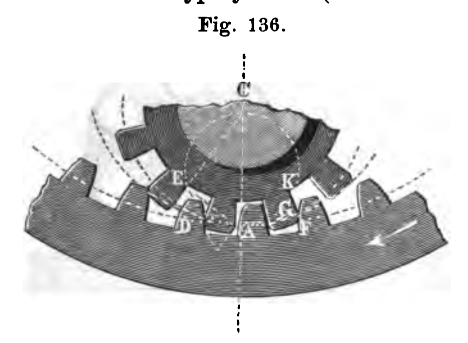
Bei Stirnrädern und Drehlingen von Metall ist es bezüglich der Reibung ganz gleichgültig, ob erstere die letzteren treiben oder ob das

Umgekehrte stattfindet. Für hölzernes Räderwerk wird es aber immer vortheilhafter sein, wenn der Stock vom Zahne bewegt wird. Durch das umgekehrte Verfahren werden die Zähne rascher zerstört.

176 Wenn ein Rad mit Zähnen an der innern Peripherie ein inneres Getriebe, das sich in derselben Ebene dreht, bewegen soll, so wird man nach den vorausgegangenen Erläuterungen jetzt ohne Weiteres einsehen, dass die Gestalt der Zähne auf ähnliche Weise von der Hypocycloide abgeleitet werden muss, wie dieselbe bei den Stirnrädern von der Epicycloide abgeleitet wurde.

Ist das innere Getriebe ein Drehling, so werden die Zähne des Rades nach einer der Hypocycloide (welche den Theilkreis des Drehlings selbst zum Erzeugungskreise hat) parallelen Curve gestaltet werden müssen. Trägt aber das innere Getriebe Stäbe, so sind die Zähne des Rades nach einer Hypocycloide zu bilden, deren Erzeugungskreis den Halbmesser des Getriebes zum Durchmesser hat. Fig. 136 zeigt ein Stück des Radkranzes eines Rades mit inneren Zähnen im Eingriff mit den prismatischen Zähnen eines Stückes des zugehörigen Getriebes. Der Zahndruck für irgend einen Bogen $ECA = \varphi$, ist $= \frac{P}{\cos\varphi}$, und die Länge der Zahnkrümmung, welche den bis dahin zurückgelegten Weg der Reibung bezeichnet, ist

Fig. 136.



$$b = 2r\,(1 - \cos\varphi)\,\frac{2R - r}{2R}.$$

Daraus ergiebt sich die zur Ausgleichung der Reibung an dem Umfange des Rades erforderliche Kraft:

$$p = -\frac{2\,.\,2{,}3\,\mu P}{\varphi}\cdot\frac{2R - r}{2R}\log\cos\varphi,$$

oder, wenn für φ der ganze der Theilung entsprechende Bogen genommen, also $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ gesetzt wird:

$$p = -\frac{2{,}3}{\pi}\,\mu P n\,\frac{2N - n}{2N}\log\cos\frac{360}{n}.$$

Der Reibungswiderstand ist, obwohl etwas geringer, doch nahe übereinstimmend mit dem zwischen Stirnrad und Getriebe gefundenen, und lehrt demnach, dass auch bei dieser Art von Radconstructionen das Getriebe einer grössern Anzahl Zähne bedarf.

Bei eisernen Rädern kann übrigens die Reibung noch beträchtlich vermindert und zugleich die Haltbarkeit der Zähne vergrössert werden, wenn man die Zähne des kleinen Rades (des innern Getriebes) nach der Hypocycloide bildet, deren Erzeugungskreis den Halbmesser des grossen Rades zum Durchmesser hat, das grosse Rad aber mit Zähnen versieht, deren Seitenflächen Ebenen sind, die im Mittelpunkte des Rades zusammentreffen.

177 Die Bewegung eines Getriebes durch eine gezahnte Stange hat die grösste Aehnlichkeit mit der Bewegung desselben Getriebes durch ein

Fig. 137.

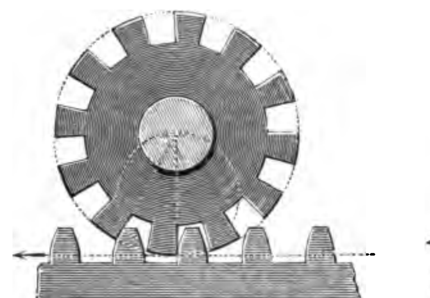
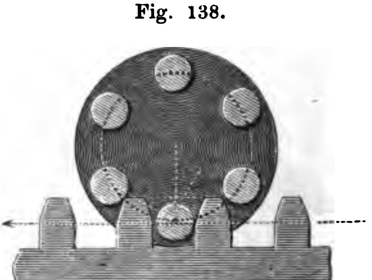


Fig. 138.



Stirnrad. Ein Unterschied gründet sich nur darauf, dass der Radius R jetzt unendlich gross zu setzen ist. Die Krümmung des Zahnes, über welche der Stab eines Kumpfes Fig. 137 oder der Stock eines Trillings Fig. 138 hingleitet, ist folglich jetzt nach einer Cycloide gebildet, und zwar nach einer Cycloide, deren Erzeugungskreis im ersten Falle den Halbmesser des Kumpfes zum Durchmesser hat, und im zweiten Falle mit dem Theilkreise des Drehlings zusammenfällt.

Hieraus gehen zur Bestimmung des Reibungswiderstandes die folgenden Gleichungen hervor.

Wenn das Getriebe ein Kumpf ist:

$$p = -\frac{2,3}{\pi}\mu P n \log \cos \frac{360}{n} \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Wenn das Getriebe ein Drehling ist:

$$p = -\frac{2,3\,.\,3}{2\pi}\mu P n \log \cos \frac{180}{n} \quad \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Also auch hier wird eine verminderte Reibung durch Vergrösserung der Anzahl Stäbe oder Stöcke des Getriebes erzielt. Doch veranlassen gerade gezahnte Stangen unter sonst gleichen Verhältnissen einen geringern Widerstand als Stirnräder.

Wenn ein Trilling durch ein Kammrad ohne das Eintreten von Klemmungen getrieben werden soll, müssen die Zähne (Kämme) des letz-

tern nach einer sphärischen Epicycloide abgerundet werden, welche den Umfang des Kammrades zum Grundkreise und den des Trillings zum Erzeugungskreise hat *). Auch müssen die Seitenflächen der Zähne (sowie es aus der Natur der Bildung der sphärischen Epicycloide (Nro. 171) mit Nothwendigkeit hervorgeht, so beschaffen sein, dass alle geraden Linien aus dem gemeinschaftlichen Axenpunkte beider Räder nach dem äussern Rande der Zahnkrümmung gezogen, ganz in diese Seitenflächen fallen. Die Stöcke des Trillings erhalten dann eine solche Lage, dass ihre verlängerten Axen sämmtlich im gemeinschaftlichen Axenpunkte beider Räder zusammentreffen. Auch vermindern sie gegen diesen Punkt hin verhältnissmässig ihre Dicke, so dass ihre Oberflächen abgestutzte Kegel vorstellen, deren gemeinschaftlicher Scheitelpunkt derselbe Axenpunkt ist.

Da die sphärische Epicycloide für kleine Bögen von der Epicycloide nur wenig abweicht, so lässt sich die Reibung zwischen Kammrad und Drehling hinlänglich genau nach der Formel (β) berechnen, welche oben zur Bestimmung des zwischen Drehling und gezahnter Stange eintretenden Reibungswiderstandes aufgestellt worden ist.

Angenommen beispielsweise, ein Kammrad mit 100 Zähnen treibe einen Trilling, der aus 20 Stöcken gebildet ist, so findet man

$$p = \frac{2{,}3 \,.\, 3}{2 \,.\, 3{,}14} \mu P \, 20 \log \cos \frac{180}{20} = 0{,}118 \, \mu P = 0{,}014 \, P.$$

Die Reibung ist, wie man sieht, ganz unabhängig von der Anzahl der Zähne des Kammrades.

Es ist nach dem Vorhergehenden leicht einzusehen, dass um die Zähne eines Kammrades, welches in ein Getriebe mit Stäben oder Zähnen eingreift, auf vortheilhafte Weise einzurichten, der vordere Rand der Zähne nach einer sphärischen Epicycloide gekrümmt werden muss, deren Erzeugungskreis den Halbmesser des Getriebes zum Durchmesser hat. Von dieser Curve werden gerade Linien nach dem Axenpunkte gezogen, um die Seitenflächen der Zähne zu bestimmen. Die Stäbe des Getriebes erhalten zu Seitenflächen Ebenen, deren Verlängerungen sich im Axenpunkte durchschneiden.

Die Kraft zur Ueberwindung der Reibung wird hinlänglich genau durch die oben berechnete Gleichung (α) ermittelt.

Obgleich Kammrad und Getriebe im Allgemeinen eine geringere Reibung veranlassen, als Stirnrad mit Getriebe, so bedarf doch auch jene Combination, um sie ohne beträchtlichen Kraftverlust anwenden zu können, einer ziemlichen Anzahl Stöcke oder Stäbe des Getriebes. Nach Gleichung (α) veranlassen 20 Stäbe einen Reibungswiderstand $p = 0{,}32 \, \mu P = 0{,}038 \, P$; 8 Stäbe dagegen steigern denselben schon bis zu $p = 0{,}11 \, P$.

---

*) In Wahrheit entspricht die Zahnkrümmung einer Curve, deren Krümmungshalbmesser um die Hälfte der Dicke des Stockes kürzer ist, als derjenige der sphärischen Epicycloide, welche die Mitte des Stockes beschreibt (Nro 175).

Viel weniger als 20 Stäbe eines Kumpfes sind daher ohne bedeutenden Kraftverlust nicht anwendbar.

Es würde auch aus diesem Grunde immer vorzuziehen sein, die Zähne des kleinern Rades nach der Krümmung der sphärischen Epicycloide zu bilden, deren Erzeugungskreis den Halbmesser des grössern Rades zum Durchmesser hat, und den Zähnen des letztern ebene Seitenflächen zu geben, wenn nicht bei hölzernen Rädern dadurch ein Aufreissen der Fasern und eine raschere Abnutzung begünstigt würde. Bei Winkelrädern von Metall, den vorzugsweise sogenannten conischen Rädern, fällt jedoch dieser Uebelstand weg. Sie sind meistens nach zusammengesetzten Zahnformen gebildet, ihre Obertheile nach sphärischen Epicycloiden, welche je den Halbmesser des andern Rades zum Durchmesser ihres Erzeugungskreises haben, ihre Untertheile als Stäbe mit ebenen Seitenflächen. Man erreicht hierdurch denselben Vortheil, der durch die ähnliche Anordnung bei Zahnrädern, welche in derselben Ebene liegen, erzielt wird. Zur Bestimmung der Reibung kann man sich der Gleichung bedienen

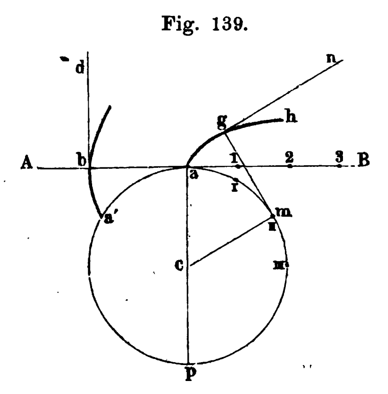
$$F = p + p' = -\frac{2,3}{2\pi}\mu P \left\{N \log\cos\frac{360}{N} + n \log\cos\frac{360}{n}\right\}.$$

Streng genommen hat dieselbe allerdings nur für rechtwinklige conische Räder Geltung.

178 Durch dieselbe Zahnverbindung, mittelst deren ein Getriebe von einer geraden Stange in Bewegung gesetzt wird, könnte auch umgekehrt die letztere durch das erstere getrieben werden. Auch sieht man diese Einrichtung bei älteren Constructionen, z. B. in Sägemühlen, auch bei Luftpumpen nicht selten in Anwendung. Erfahrene Techniker verwerfen dieselbe jedoch wegen allzu rascher Abnutzung der Zähne und empfehlen, wenn die Bewegung von dem Rade ausgehen soll, die folgende Anordnung.

Man denke sich eine gerade Stange AB (Fig. 139), welche den Kreis aC in a berührt, und von diesem Punkte aus um die Peripherie amp dieses Kreises gewälzt wird. In Folge dieser Bewegung müssen die Punkte 1, 2, 3 u. s. w. der Stange nach und nach je mit den gleichnamigen Punkten I, II, III u. s. w. des Kreisumfanges zusammentreffen, während der Punkt a mit zunehmenden Krümmungshalbmessern a 1, a 2, a 3 u. s. w. die Curve agh beschreibt. Diese krumme Linie, welche gleichsam als eine Epicycloide zu betrachten ist, deren Erzeugungskreis einen Durchmesser von unendlicher Grösse hat, wird die Kreisevolvente genannt.

Fig. 139.



Dieselbe besitzt folgende für unsere Untersuchung wesentliche Eigenschaften.

Der Krümmungshalbmesser gm eines beliebigen Punktes g ist seiner absoluten Länge nach stets der Länge des abgewälzten Bogens $am = r\varphi$ gleich.

Ein beliebig betrachteter Krümmungshalbmesser gm ist zugleich Berührungslinie des Kreises in m und Normale der Evolvente in g. Wenn daher vom Punkte g auf gm die Senkrechte gn gezogen wird, so ist dieselbe die Tangente des Punktes g der Curve und dem Halbmesser Cm parallel.

Der dem Kreisbogen $r\varphi$ zugehörige Bogen der Evolvente hat die Länge

$$b = \frac{1}{2} r \varphi^2.$$

Nun denke man sich die Gerade AB nur in der Richtung ihrer Länge, den Kreis aC um eine auf dem Mittelpunkte C senkrechte Axe beweglich. Der Punkt a rücke auf der Kreisperipherie bis a' vor, so dass $aa' = ab = r\varphi$, so muss der Punkt b in dem Bogen einer Kreisevolvente liegen, welche im Punkte a' ihren Ursprung nimmt. Es ist ab der Krümmungshalbmesser der Curve an dem Punkte b, und ein Stab bd senkrecht auf der Stange AB berührt die Evolvente in b.

Wird daher ein solcher Stab im Punkte a an der Stange AB, und der Bogen $a'b = ag$ der Evolvente in demselben Punkte a des Kreises befestigt, so muss, während der Kreis um den Bogen $aa' = r\varphi$ fortrückt, die gerade Stange um den gleichgrossen geradlinigen Weg ab fortgeschoben werden.

Dabei berührt die Evolvente den Stab fortwährend in demselben Punkte b und übt auf denselben einen Druck aus, der, da ab zu gleicher Zeit auf aC und bd rechtwinklig ist, dem an der Peripherie des Kreises wirksamen Druck stets gleich bleibt. Giebt man daher den Zähnen des Treibrades die Gestalt der Kreisevolvente, denen der Stange die Form von Stäben mit ebenen, auf der Stange senkrecht stehenden Seitenflächen, so sind alle Bedingungen erfüllt, um die Kreisbewegung des Rades in gleichförmig fortdauernder Weise in das geradlinige Fortschreiten der gezahnten Stange zu verwandeln.

Selbstverständlich muss die Theilung der letztern mit der des erstern übereinstimmen, und die Länge der Zähne muss so gewählt sein, dass ein Zahn den Stab, auf welchen er drückt, nicht verlässt, bevor sein Nachfolger zum Eingriffe gekommen ist. Es geschieht dies allemal am Punkte a, an welchem die Stange den Theilkreis des Rades tangirt.

Da die am Umfange des Treibrades wirksame Kraft die Stäbe der Stange mit dem unveränderlichen Drucke P fortschiebt, so ist die Reibungsgrösse $= \mu P$, und da dieser Widerstand den Bogen der Evolvente $b = \frac{1}{2} r \varphi^2$ zurücklegt, während die Kraft, welche demselben das Gleichgewicht halten soll, den Bogen $r\varphi$ zurücklegen muss, so ergiebt sich

$$p \cdot r\varphi = \mu P \frac{r\varphi^2}{2},$$

also die gesuchte, an die Peripherie des Rades versetzt gedachte Kraft

$$p = \mu P \frac{\varphi}{2},$$

oder wenn, wie früher, n die Anzahl Zähne des Rades vorstellt, also $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ gesetzt werden darf:

$$p = \mu P \frac{\pi}{n}.$$

Also auch bei dieser Anordnung vermindert sich die Reibung bei zunehmender Menge der Zähne des Rades. Z. B. 8 Zähne veranlassen einen Reibungswiderstand $p = 0{,}39\,\mu P = 0{,}047\,P$; 16 Zähne vermindern ihn bis zur Hälfte dieser Grösse.

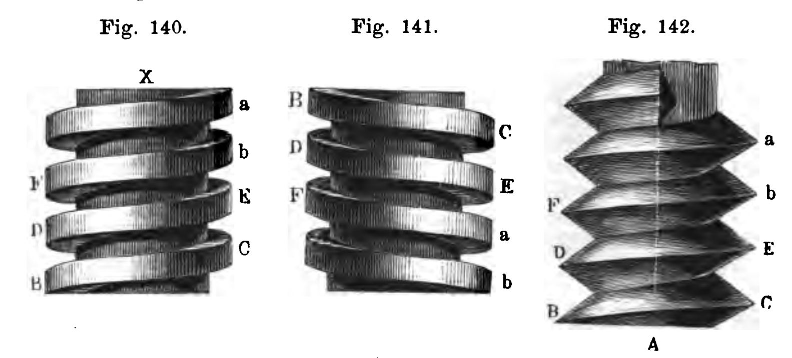
Bei Metallrädern pflegt man die hier beschriebene Gestalt der Zähne mit der früher erläuterten in der Art zu combiniren, dass man den Zähnen des Rades ebenflächige Untertheile giebt und die Obertheile der Zähne der Stange nach einer Cycloide bildet, deren Erzeugungskreis den Halbmesser des Zahnrades zum Durchmesser hat. Ein Zahn des Rades ergreift alsdann mit seinem ebenen Untertheil den cycloidisch geformten Obertheil eines Zahnes der Stange, bevor der Halbmesser Ca (Fig. 133) auf der Stange senkrecht steht. In dieser senkrechten Lage angekommen, tritt dann der nach der Evolvente gekrümmte Obertheil des Radzahnes in den Punkt a des Theilrisses der Stange und bewirkt die weitere Fortschiebung. Durch diese Einrichtung wird zwar nicht die Reibung vermindert, wohl aber gewährt sie den Vortheil, dass mehr Zähne zum Eingriff gelangen und dass sie sich in Folge dessen weniger abnutzen.

179 **Schraubengewinde.** Zu den wichtigsten und am häufigsten gebrauchten Hülfsmitteln, die drehende Bewegung in eine geradlinig aufsteigende oder fortschreitende zu verwandeln, gehört die Schraube. Man denke sich ein schmales, von parallelen Seiten begränztes Band oder einen derartigen biegsamen Streifen, unter beliebig gewählter, dann aber unverändert gehaltener Neigung um eine Walze gewickelt, so wird eine Schraubenlinie gebildet.

Besitzt der erzeugende Streifen unbeschadet seiner Biegsamkeit eine gewisse Dicke, so zeigt sich der umgewickelte Theil desselben, wie in Fig. 140 und Fig. 141, von zwei geneigten Ebenen, den Schraubenflächen, begränzt. Wenn die Windungen von der Linken zur Rechten aufsteigen (Fig. 140), heisst die Schraube eine rechts gewundene; erheben sie sich aber von der rechten zur linken Seite (Fig. 141), so führt sie den Namen links gewundene. Beide Formen gehorchen denselben Gesetzen und können ohne Unterschied zu denselben Zwecken

verwendet werden. Nur Bequemlichkeitsgründe können zuweilen eine Entscheidung für die eine oder die andere veranlassen.

Fig. 140. Fig. 141. Fig. 142.



Zur Bildung eines Schraubengewindes ist es nicht nothwendig, dass der Querschnitt des erzeugenden Streifens ein Rechteck sei, wie in Fig. 140 und Fig. 141. Derselbe könnte auch irgend eine andere Umgränzung haben, vorausgesetzt nur, dass diese für dasselbe Gewinde unverändert bliebe. Der am häufigsten vorkommende Querschnitt ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis die umwickelte Fläche der Walze berührt. Die Fig. 142 zeigt eine Schraube dieser Art. Der Gebrauch der Schraube ist in den meisten Fällen unabhängig von dieser äussern Gestalt des Gewindes.

Ein Theil einer Schraubenlinie, welcher eine ganze Umwindung des Cylinders (der Spindel) vorstellt, und dessen Projection auf die Grundfläche des Cylinders eine Kreisperipherie bildet, wird ein Schraubengang genannt. Der Höhenunterschied ab (Fig. 140, Fig. 141, Fig. 142) zweier senkrecht über einander liegender Punkte derselben Schraubenlinie, oder was dasselbe sagt: ein Loth, das vom obern Ende eines Schraubenganges auf dessen kreisförmige Grundlinie gefällt wird, heisst Höhe des Ganges. Dieselbe bedeutet die Höhe h einer schiefen Ebene, von welcher die kreisförmige Grundlinie $2\pi r$ der Windung die Basis bildet. Es ist daher

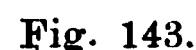
$$\frac{h}{2\pi r} = tng\, c$$

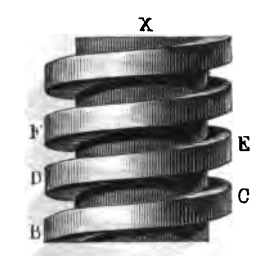
die Tangente des Neigungswinkels der Schraubenlinie.

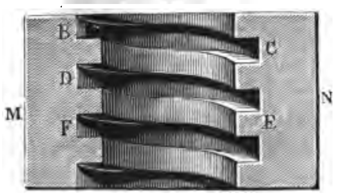
Die Schraube kommt in zwei wesentlich verschiedenen Gestalten vor, als Kernschraube oder Schraubenspindel, Fig. 143 X (a. f. S.) und als hohle Schraube oder Schraubenmutter, Fig. 143 MN. Bei der einen erheben sich die Windungen über einen cylindrischen Kern, bei der andern sind sie in eine cylindrische Höhlung eingeschnitten.

Beim Gebrauche der Schraube stehen gewöhnlich beide Gewinde im Eingriffe. Sie müssen in diesem Falle von gleicher Neigung und so

geschnitten sein, dass die Erhöhungen der einen genau in die Vertiefungen der andern passen. An dem cylindrischen Umfange der einen, parallel mit der kreisförmigen Grundlinie wirkt dann die Kraft, während die Last oder der Widerstand in der Richtung der gemeinschaftlichen Axe beider Schrauben wirksam ist, dergestalt, dass beide Schraubenflächen, indem sie über einander gleiten, durch eine Kraft gegen einander gedrückt werden, die unmittelbar mit der Axe der Spindel gleichlaufend ist.


Fig. 143.





So oft die Kraft, die in der Grundlinie selbst, oder doch in der Ebene derselben wirksam ist, eine ganze Umdrehung von 360° vollendet hat, wurde die Last um die Höhe eines Schraubenganges gehoben.

Da die Schraube wesentlich nichts anderes ist als eine schiefe Ebene, die sich im Kreise herum windet, so sind auch die Bedingungen des Gleichgewichtes bei beiden Vorrichtungen übereinstimmend; und zwar kommt bei der Schraube, als einer schiefen Ebene, der Fall in Betracht, dass die Kraft der Basis parallel gerichtet ist. Man hat daher an der Schraube

$$P = L \frac{h}{2\pi r} = L\, tng\, c.$$

Es bedeutet in diesem Ausdrucke r den Halbmesser der kreisförmigen Grundlinie, und man versteht darunter die geradlinige Entfernung von der Mitte der Schraubenfläche bis zur Axe der Spindel.

Wirkt die Kraft, wie es meistens der Fall ist, nicht unmittelbar am Halbmesser r, sondern an einem grössern Hebelarme in derselben oder doch einer damit parallelen Ebene, so ist

$$PR = L \frac{h}{2\pi r} \cdot r = L\, r\, tng\, c,$$

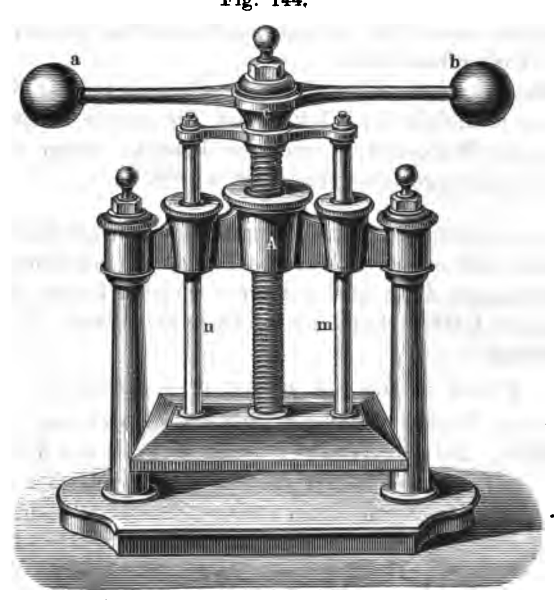
also

$$P = L \frac{h}{2\pi R} \text{ oder auch } P = \frac{r}{R} L\, tng\, c.$$

Ein Beispiel einer Schraube mit vergrössertem Hebelarme bietet die Schraubenpresse. Bei dem hier abgebildeten Apparate (Fig. 144), den man zum Gebrauche als Copirmaschine vorgeschlagen hat, geht die Spindelschraube durch eine Mutter A, welche mit dem Rahmen der Maschine fest verbunden ist. Mit der erstern hebt und senkt sich eine Platte, deren untere sehr ebene Fläche durch den Niedergang der beweglichen Schraube gegen eine ebene Tafel, sowie gegen Alles, was sich

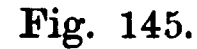
dazwischen befindet, gepresst wird. Geleitet wird die Platte durch die Führungen *n* und *m*, mit welchen sie verbunden ist. Das Drehen der

Fig. 144.



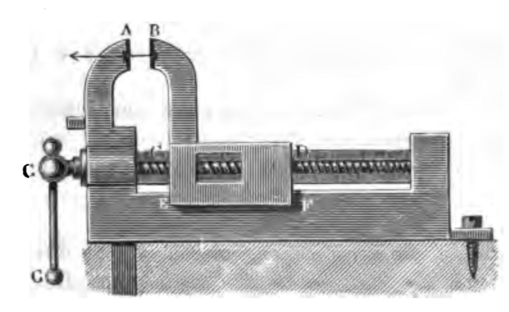
Schraube geschieht mittelst der Handhaben $ac = bc = R$. Nun verhält sich R zum Halbmesser r der Schraubenspindel wie 16 : 1. Es verhält sich ferner die Höhe eines Schraubenganges zu seinem Umfange wie 1 : 15. Daraus folgt die Grösse des gegen die Tafel ausgeübten Druckes

$$L = \frac{2\pi R}{h} P = \frac{16 \,.\, 15}{1} P = 240\, P.$$



Mittelst einer gegen die Handhaben wirksamen Kraft von 10 Kilo wird also ein Druck von 2400 Kilo gegen die Tafel erzeugt. Ein sehr grosser Theil dieser Kraft geht jedoch, wie wir nachher sehen werden, durch Reibung verloren, so dass auch im günstigsten Falle etwa nur die Hälfte übrig bleibt.

Fig. 145.



Bei den Anwendungen der Schraube verschiebt sich bald die Spindel in der fest liegenden Mutter, wie in dem vorhergehenden Falle, bald findet das Umgekehrte statt. Der Schraubstock (Fig. 145)

liefert ein Beispiel des geradlinigen Fortschreitens der hohlen Schraube durch die Umdrehungen der in ihren Zapfenlagern festliegenden Spindel. Die Gewalt, mit der sich die beiden Backen A und B gegen einander oder gegen einen dazwischen befindlichen Gegenstand pressen lassen, wird übrigens wie vorher berechnet.

Die Wirksamkeit der Schraube steigt, je geringer die Neigung ihres Gewindes, also je kleiner der Winkel c ist. Sie müsste daher eine ausserordentlich grosse Wirksamkeit erreichen können, wenn letztere nicht durch die Reibung ungemein vermindert würde.

180 Um die Gleichung der Schraube mit Rücksicht auf Reibung bestimmen zu können, müssen wir uns an das Verhalten eines Körpers erinnern, der unter beliebigem Zugwinkel auf einer schiefen Ebene aufwärts gleitet. Die nähere Untersuchung dieses Verhaltens (Seite 172) leitete uns zu der Gleichung

$$P \cos \alpha = (\sin c + \mu \cos c)\, p - \mu P \sin \alpha,$$

in welcher α den Winkel bezeichnet, den die Zugrichtung mit der schiefen Ebene bildet. Die Bogenöffnung dieses Winkels ($90\, K = \alpha$, Fig. 106) dachten wir uns aufwärts von der schiefen Ebene gemessen, so dass die Kraft $P \sin \alpha$ eine dem Normaldrucke entgegengesetzte Richtung annahm, folglich das negative Zeichen erhalten musste.

Im gegenwärtigen Falle soll die Richtung der Kraft der Basis der schiefen Ebene gleichlaufen, folglich die Bogenöffnung, welche den Winkel α misst, unter die schiefe Ebene fallen.

Die Kraft $P \sin \alpha$ addirt sich also zu dem Normaldrucke und muss das positive Zeichen erhalten. Da ausserdem $\alpha = c$ werden (weil die Richtung der Zugkraft P mit der Basis der schiefen Ebene parallel läuft) und p eine Last L bedeuten soll, die sich der schiefen Ebene aufwärts bewegt, so verwandelt sich obige Gleichung in

$$P \cos c = (\sin c + \mu \cos c)\, L + \mu P \sin c.$$

Hieraus folgt dann weiter

$$P\, (\cos c - \mu \sin c) = L\, (\sin c + \mu \cos c),$$

und indem der Reibungswinkel eingeführt, also $\mu = \frac{\sin \varrho}{\cos \varrho}$ gesetzt wird,

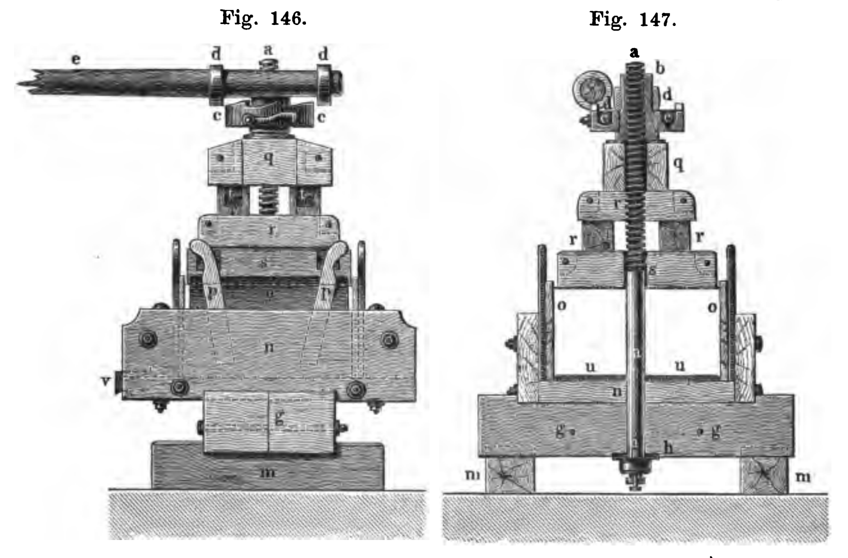
$$P = \frac{\sin c \cos \varrho + \cos c \sin \varrho}{\cos c \cos \varrho - \sin c \sin \varrho}\, L = \frac{\sin (c + \varrho)}{\cos (c + \varrho)}\, L = L \operatorname{tng} (c + \varrho).$$

Die Reibung wirkt genau so, wie wenn die Steigung der schiefen Ebene um den Werth des Reibungswinkels vergrössert worden wäre. Der Nutzen der Schraube als Verstärkungsmittel der Kraft wird hierdurch sehr eingeschränkt.

181 Wir sind jetzt erst im Stande, die Kraft zu bestimmen, welche durch Vermittlung einer Schraube sich fortpflanzen lässt. Denn ohne Rücksichtsnahme auf die Reibung ist es kaum möglich, auch nur ein ober-

flächliches Urtheil darüber zu gewinnen. Als Beispiel mag eine im Princip sehr einfache, häufig besonders im südlichen Deutschland vorkommende Schraubenmaschine, die Kelterpresse, dienen. Fig. 146 giebt eine Ansicht und Fig. 147 einen senkrechten Durchschnitt einer derartigen Presse *). In beiden Figuren bedeutet *a* die Schraubenspindel

Fig. 146. Fig. 147.



von Eisen, *b* die messingene Mutter, *c* ein Sperrrad, das auf dem untern sechseckigen Theile der Mutter festsitzt. Den obern runden Theil derselben umschliesst ein Ring *d*, der mit zwei Seitenarmen versehen ist, durch deren ringförmige Fortsätze der Hebel oder Schwengel *e* gesteckt wird. Die Seitenarme von *d* greifen in die Zähne des Sperrrades *c* dergestalt ein, dass wenn der Hebel vorwärts gedreht wird, ein Umdrehen der Mutter erfolgt; beim Zurückziehen des Hebels dagegen die Arme von *d* über die Zähne des Sperrrades gleiten. Diese Einrichtung gewährt den Vortheil, dass der Hebel beim Gebrauche der Presse nicht ganz im Kreise herumgeführt zu werden braucht. Um das Zurückschrauben der Mutter bewerkstelligen zu können, ist an dem Sperrrade ein Haken *f* angebracht, welcher in einen der Arme von *d* eingehängt werden kann. Die Schraubenspindel hat ihre Befestigung in dem Querbalken *gg*; ihr Kopf stützt sich gegen eine eiserne Platte *h* und ist mit zwei Vorsprüngen *i i* versehen, welche die Drehung der Spindel verhindern. Die beiden Hauptbalken *g* sind durch Schrauben unter einander verbunden; sie ruhen auf den beiden Querbalken *m m* und tragen den Trog *n*, welcher aus starken, mittelst durchgehender Schrauben unter einander verbun-

*) Beide Zeichnungen entnommen aus der sehr werthvollen Sammlung von Musterzeichnungen, die der Hessische Gewerbeverein herausgegeben hat.

denen Bohlen zusammengesetzt ist. In den Trog setzen sich die Futterbretter o ein; sie sind an ihrem untern Theile durchlöchert. Durch die daran befestigten Handgriffe p bleibt zwischen der innern Wand des Troges und den Futterbrettern ein freier Raum von 3 bis 4 Centimeter Breite für den ausgepressten und abfliessenden Saft. Die Mutter b drückt auf einen mit einer Metallscheibe bedeckten Klotz q, und dreht sich darauf während des Gebrauchs unter gleitender Reibung. Die Sattelhölzer r und die Pressplatte s sind mit Handgriffen t versehen, um sie nach geschehener Pressung heben und wegnehmen zu können.

Der ausgepresste, in den Raum zwischen Tragwand und Futterbretter eingedrungene Saft gelangt von da zu den Abflussrinnen $v\,v$.

Der Halbmesser der Schraube beträgt 4,5 Centimeter, folglich der Umfang $2\,r\,\pi = 28{,}26$ Centimeter. Die Höhe eines Schraubenganges ist $h = 2{,}85$ Centimeter, somit

$$\frac{h}{2\,r\,\pi} = \frac{2{,}85}{28{,}26} = 0{,}10085 = tng\,5^0\,45{,}5' = tng\,c.$$

Den Reibungscoefficienten kann man bei Anwendung guter Schmiere zu $\mu = 0{,}08$ annehmen. Nun ist

$$0{,}08 = tng\,\varrho = tng\;4^0\,34{,}8'.$$

Daher

$$c + \varrho = 10^0\,20{,}3',$$

und

$$tng\;(c + \varrho) = 0{,}18242.$$

Eine zweite Reibung entsteht, wie schon bemerkt, auf der ringförmigen Scheibe q, welche die Schraubenspindel durchsetzt, und über welche die Mutter während der Umdrehung gleitet. Gegen diese Scheibe wirkt der ganze Widerstand der Last und man kann annehmen, dass er sich auf alle Punkte derselben gleichförmig vertheilt. Der Halbmesser des äussern Umfanges der Reibungsfläche beträgt 10,825 Centimeter, der des innern Umfanges 5,625 Centimeter. Die einem mittlern Radius $r' = 8{,}225$ Centimeter entsprechende Kreislinie lässt sich demnach als die Bahn dieses Reibungswiderstandes $\mu\,L$ ansehen, dessen statisches Moment folglich durch den Ausdruck $\mu\,L\,r'$ bestimmt ist.

Die Gleichung dieser Kelterpresse mit Rücksicht auf Reibung ist also im Allgemeinen,

$$P = \frac{r}{R}\,L\left(tng\;(c + \varrho) + \mu\,\frac{r'}{r}\right),$$

und, wenn die bekannten Werthe eingesetzt werden,

$$P = \frac{r}{R}\,L\left(tng\;(5^0\,45{,}5 + 4^0\,34{,}8') + 0{,}08\,\frac{8{,}225}{4{,}5}\right)$$

$$= \frac{r}{R}\,L\;(0{,}18242 + 0{,}14622) = 0{,}32864\,\frac{r}{R}\,L.$$

Um den Wirkungsgrad zu bestimmen, der vom Verhältnisse $\frac{r}{R}$ unabhängig ist, hat man zu erwägen, dass ohne Rücksicht auf Reibung die Kraft gefunden wurde

$$K = \frac{r}{R} L \, tng \, 5^0 \, 45{,}5' = 0{,}10085 \, \frac{r}{R} L.$$

Es berechnet sich demnach der Effect zu

$$E = \frac{100 \, K}{P} = \frac{100 \, . \, 0{,}10085}{0{,}32864} = 30{,}69 \text{ Procent.}$$

Ein so geringer Nutzeffect erfolgt übrigens keineswegs bei allen Schraubenpressen. Er wird in unserm Beispiele hauptsächlich durch das grosse Arbeitsmoment der auf der Scheibe q eintretenden gleitenden Reibung herbeigeführt. Wenn nun auch dieser Theil des schädlichen oder passiven Widerstandes bei den Pressen sich nicht ganz verhüten lässt, so kann er doch in vielen Fällen bedeutend vermindert werden; dann z. B., wenn das Pressen dadurch bewirkt wird, dass die bewegliche Schraubenspindel sich, wie in Fig. 144, durch eine festsitzende Mutter windet, in welchem Falle der Druck gegen die Pressplatte von einer Berührungsfläche ausgehen kann, deren Inhalt sogar kleiner ist, als die Querschnittsfläche der Spindel.

Ein Wirkungsgrad von mehr als 50 Procent wird gleichwohl mittelst der Schraubenpresse nicht leicht erzielt werden können, weil die Schraube unter dem Gegendrucke der Last nicht von selbst aufgehen darf, was jedoch geschehen müsste, sobald das relative Gewicht der Last auf der Schraubenfläche, als einer schiefen Ebene betrachtet, den Widerstand der Reibung überwiegen sollte.

Ungeachtet des geringen Nutzeffectes der oben beschriebenen Kelterpresse bietet sie doch wegen der beträchtlichen Länge des Schwengels e, welche sie zulässt, das Mittel zu einer sehr grossen Verstärkung der Kraft. Nimmt man z. B. die Länge des Hebelarmes R zu 270 Centimeter, so ist $\frac{r}{R} = \frac{4{,}5}{270} = \frac{1}{60}$, und man findet

$$L = \frac{60 \, P}{0{,}32864} = 182{,}57 \, P.$$

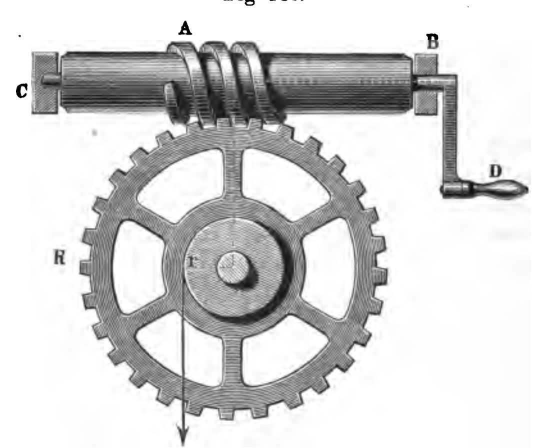
Die Kraft wird also in diesem Falle um mehr als das 182fache verstärkt, und ein Arbeiter, der die Schraube mit einer Kraft von nur 12 Kilo in Bewegung setzte, würde auf die Pressplatte einen Druck von 2191 Kilo ausüben. Diese Platte hat 87,5 Centimeter Seite und einen Flächeninhalt von ungefähr 7540 Quadrat-Centimeter. Durch die gleichzeitige Wirksamkeit von zwei bis drei Arbeitern würde daher leicht ein Druck von 1 Kilo auf 1 Quadrat-Centimeter, d. h. die Gewalt von 1 Atmosphärendruck hervorgebracht werden können.

Schraube ohne Ende. In Fällen, in welchen der Raum die Anwendung eines langen Hebelbaumes zum Betriebe der Schraubenpresse **182**

nicht zulässt, pflegt man wohl die Wirksamkeit der Kraft durch ein und selbst zwei Vorgelege zu verstärken, welche durch Zahneingriff in bekannter Weise die Drehung bewerkstelligen. Natürlich trägt in solchen Fällen auch die Schraube ein Zahnrad, welches mit ihr um dieselbe Axe drehbar durch das Getriebe des Vorgeleges bewegt wird. Selbstredend lässt sich die durch derartige Combination erhöhte Kraftverstärkung nicht ohne bedeutende Opfer an Nutzeffect erzielen. Dasselbe gilt auch für die ähnliche Verwerthung einer eigenthümlichen Form der Schraube, die den Namen Schraube ohne Ende führt.

Man versteht darunter eine Kernschraube AB (Fig. 148), die durch eine Kurbel BD um ihre Axe gedreht wird und deren Windungen nicht in eine hohle Schraube, sondern in die Zähne einer Art von Stirnrad R eingreifen, welches dadurch sammt seiner Welle r bewegt wird, und so das Heben einer an der Welle angebrachten Last herbeiführt. Die Seiten-

Fig 148.



flächen der Zähne sind nach der Neigung des Gewindes schräg eingeschnitten, so dass sie die Schraubenfläche ähnlich wie die Windungen einer entsprechenden Schraubenmutter an allen Punkten ihrer Breite berühren. Die Anordnung ist gewöhnlich so getroffen, dass mehrere Zähne zugleich im Eingriff stehen. Der Druck, welchen sie gegen das Gewinde äussern, ist gleichlaufend mit der Axe der Spindel gerichtet. Diese Axe bedarf daher ähnlich wie die eines aufrecht stehenden Rades an der Welle einer festen Widerlage bei c winkelrecht gegen ihre Längenrichtung. Wenn, wie gewöhnlich, diese Vorsicht vernachlässigt wird, so stemmt sich die Cylinderbasis der Spindel selbst gegen die Widerlage, was nothwendig eine Vermehrung des Reibungswiderstandes zur Folge hat.

Die Gleichung der Schraube ohne Ende ist, wie leicht zu sehen, aus derjenigen einer Schraube und der eines Rades an der Welle zusammengesetzt. Für die eine gilt

$$P = \frac{r}{R} P' \left\{ tng\ (c + \varrho) + {}^2/_3\,\mu \frac{s}{r} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo P' den Druck bedeutet, welchen die Zähne gegen die Schraubenfläche parallel mit der Axe AB äussern, und s den Radius des Stiftes s am einen Ende dieser Axe. Für die andere ist zu setzen

$$P' = \frac{r'}{R'} L \left(1 + \mu \frac{\varrho'}{r'}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Der Einfluss des Gewichtes der Maschinentheile auf die Reibung ist in beiden Gleichungen, als unbedeutend, vernachlässigt worden. Indem P' aus der zweiten in die erste Gleichung eingeschaltet wird, erhält man

$$P = \frac{r\,r'}{R\,R'} L \left(1 + \mu \frac{\varrho'}{r'}\right) \left(tng\ (c + \varrho) + {}^2/_3\,\mu \frac{s}{\varrho}\right).$$

Eine Hebemaschine von ausserordentlich grosser Wirksamkeit, die englische Winde, von welcher Fig. 149 einen senkrechten Durchschnitt darstellt, ist aus einer Schraube ohne Ende und einer gewöhnlichen Schraube zusammengesetzt. Die Spindel der letztern, mitten in dem Gehäuse der Maschine senkrecht auf- und niederbeweglich, dringt durch eine Mutter CC, welche, ringsum sich scheibenförmig ausbreitend, wie aus Fig. 150 deutlicher zu ersehen, zugleich das Zahnrad einer Schraube ohne Ende bildet. Sowie dieses Rad durch die Bewegung der Kurbel gedreht wird, muss sich auch die Schraube bewegen, wodurch eine gegen die Gabel A oder auch gegen den Fortsatz G sich stützende Last gehoben werden kann. Da die Schraubenspindel in den Windungen der Mutter hängt und von diesen ausschliesslich getragen wird, so drückt die ganze Wucht der Last auf die ringförmige Grundfläche der Schraubenmutter und bewirkt während der Drehung eine entsprechende, sehr bedeutende Reibung. Die Zapfenreibung der Kurbelwelle ist geringer, hat aber dafür, an die Angriffsstelle der Last reducirt, einen sehr vergrösserten Weg zu beschreiben. Sie ist überdies bei der Schraubenwinde dadurch unnöthiger Weise vergrössert, dass sich nicht die Basis, sondern der Umfang des Zapfens der Schraube ohne Ende gegen seine Widerlage lehnt.

Fig. 149.

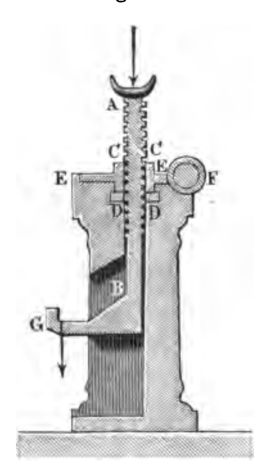
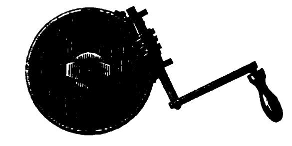


Fig. 150.



Die Gleichung der Schraube ohne Ende erhält dadurch die Gestalt

$$P = \frac{r}{R} P' \left\{ tng\ (c + \varrho) + \mu \frac{s}{r} \right\}.$$

P' bedeutet die Kraft am Umfange des Zahnrades und führt also bezüglich der zweiten Schraube zu der Gleichung

$$P' = \frac{R'}{r'} L \left\{ tng\ (c' + \varrho') + \mu \frac{s'}{r'} \right\}.$$

Beide Gleichungen combinirt geben daher

$$P = \frac{r r'}{R R'} L \left\{ tng\ (c + \varrho) + \mu \frac{s}{r} \right\} \left\{ tng\ (c' + \varrho') + \mu \frac{s'}{r'} \right\}.$$

Ein Blick auf diese Gleichung lässt schon erkennen, wie sehr der Nutzeffect einer zusammengesetzten Schraube durch die verschiedenen Reibungen benachtheiligt wird. Noch deutlicher geht dies aber aus der Anwendung auf einen bestimmten Fall hervor.

Die üblichen Abmessungen der Schraubenwinde sind nach Gerstner (Mechanik Bd. I, §. 474) die folgenden: Halbmesser der Kurbel $R = 0{,}320$ Meter; Halbmesser der Schraube ohne Ende $r = 0{,}0176$ Meter, also $2 \pi r = 0{,}1105$; Höhe eines Schraubenganges $h = 0{,}020$ Meter, folglich $\frac{h}{2 \pi r} = tng\, c = 0{,}181 = tng\, 10^0\, 15{,}4'$; Halbmesser des Zapfens der Kurbelwelle $s = 0{,}013$ Meter.

Dann für die zweite Schraube, Halbmesser des Zahnrades $R' = 0{,}170$ Meter; Halbmesser der Schraubenspindel $r' = 0{,}026$ Meter, also $2 \pi r' = 0{,}1633$; Höhe eines Schraubenganges $h' = 0{,}026$ Meter, folglich $\frac{h'}{2 \pi r'} = tng\, c' = 0{,}159 = tng\, 9^0\, 3'$; mittlerer Halbmesser des kreisförmigen Ringes, auf welchem die Schraubenmutter gleitet und reibt, $s' = 0{,}046$ Meter. Der Reibungscoefficient mag durchschnittlich betragen $\mu = 0{,}12 = tng\, 6^0\, 51'$. Es ergiebt sich nach diesen Daten

$$tng\ (c + \varrho) = tng\ (10^0\, 15{,}4' + 6^0\, 51') = 0{,}30773;$$

und

$$tng\ (c' + \varrho') = tng\ (9^0\, 3' + 6^0\, 51') = 0{,}28486.$$

Wenn man diese verschiedenen Zahlenwerthe in die Gleichung einsetzt, so findet man

$$P = \frac{1}{119} L\ (0{,}30773 + 0{,}08864)\ (0{,}28486 + 0{,}21231) = \frac{1}{604} L.$$

Ein einziger Arbeiter kann mit dieser Winde, wie man sieht, eine ausserordentlich grosse Gewalt ausüben. Gleichwohl ist der Effect nur ein geringer. Denn die Gleichung, frei von den Hindernissen der Bewegung aufgestellt, heisst

$$P = \frac{1}{119} tng\ 10^0\, 15{,}4' \times tng\ 9^0\, 3' . L = \frac{0{,}181 . 0{,}159\, L}{119} = \frac{1}{4135} L.$$

Es ist folglich

$$E = \frac{604}{4135} \cdot 100 = 14{,}6 \text{ Procent.}$$

183 Die Schraube ohne Ende sieht man häufig als einen Bestandtheil physikalischer und anderer Instrumente. Sie wird überall da mit Vortheil gebraucht, wo es sich darum handelt, kleine Bogenverschiebungen genau einzustellen. Dieses Verfahren wird indessen Zeit raubend und ermüdend, wenn Drehungen um grössere Bogenstücke sich häufig wiederholen. In solchen Fällen thut man daher wohl, die Einrichtung so zu treffen, dass das Gewinde nach Erforderniss aus dem Eingriff mit den Zähnen des Rades ausgerückt werden kann, dergestalt, dass es möglich wird, der feinern Einstellung eine rohere aber rasch auszuführende vorausgehen zu lassen.

Zu sanften, geradlinigen Verschiebungen bedient man sich ebenfalls meistens einer Schraube, deren Spindel dann gewöhnlich festliegt, aber eine Drehung in ihren Lagern gestattet, während die Mutter nur eine geradlinige Verrückung zulässt. Häufig ist aber auch die Spindel ganz unbeweglich und die Mutter verbindet das geradlinige Fortschieben mit der rotirenden Bewegung. Die Verschiebung lässt sich um so sanfter und die Einstellung um so genauer bewerkstelligen, je flacher die Windungen sind, woraus die Schraube gebildet ist.

Wenn eine Schraube bei sehr geringer Neigung ihrer Windungen mit so grosser Sorgfalt ausgeführt ist, dass ihre Gänge sämmtlich genau gleiche Höhe haben, so nennt man sie eine Mikrometerschraube, weil sie zur Bestimmung sehr kleiner Längenunterschiede verwendbar ist. Gute Schrauben der Art müssen in Stahlspindeln eingeschnitten sein und sich in Muttern von Stahl bewegen. Man überkleidet sie mit einer geringen Menge Oel, um die Abnutzung zu verhüten und die Bewegung sanfter zu machen.

Wird eine Mikrometerschraube mit einem Kopfe versehen, an dessen kreisförmiger Umfangsfläche oder ebener Oberfläche ein Theilkreis angebracht ist, der bei der Drehung an einem unverrückbaren Punkte oder an einem Nonius vorübergeht, so ist das Mittel gegeben, um sehr kleine Abschnitte eines Schraubenganges direct abzulesen. Beträgt z. B. die Höhe eines Ganges 1 Millimeter, ist der Kreis in 100 Abtheilungen getheilt und giebt der Nonius die Zehntel, so lassen sich Längenunterschiede von 0,001 Millimeter direct bestimmen. Die Methoden des Physikers, wagerechte und senkrechte Längenunterschiede, sowie auch die Dicke dünner Blättchen zu messen, gründen sich meistens auf die Anwendung der Mikrometerschraube.

184 Schrauben mit sehr flachen Gewinden, wenn sie eingeschraubt sind, können nicht von selbst wieder aufgehen, weil der auf ihren Windungen erzeugte Reibungswiderstand grösser ist, als das relative Gewicht der

Last, d. h. des parallel mit der Spindelaxe wirksamen Gegendruckes. Der Reibungscoefficient zwischen Metallflächen bei Anwendung von etwas Schmiere ist $\mu = 0{,}12 = tng\, 6^0\, 51'$. Schrauben von Metall, deren Windungen einen Neigungswinkel von $6^0\, 51'$ nicht erreichen, können daher gebraucht werden, um Metallflächen an einander zu schrauben, weil sie freiwillig nicht wieder aufgehen. Eiserne Schrauben, die zum Festhalten von Holzflächen bestimmt sind, dürfen steilere Windungen erhalten, weil die Reibung zwischen Eisen und Holz, zumal im trocknen Zustande, bedeutend grösser ist.

Solche Schrauben, die sogenannten Holzschrauben, müssen scharfkantige Windungen haben, d. h. der Querschnitt ihres Gewindes muss ein Dreieck sein, weil sie, ähnlich dem Bohrer, sich ihr Muttergewinde in der Holzmasse gewöhnlich erst selbst auszuschneiden haben.

Uebrigens können scharfkantige Windungen überall anstatt der mit rechteckigen Querschnitten verwendet werden, ohne dass daraus ein Unterschied bezüglich der Grösse der Reibung hervorgeht. Allerdings bieten die geneigten Schraubenflächen der zuerst genannten Windungsform dem Drucke der Last eine grössere Anzahl Berührungspunkte dar, allein in demselben Verhältnisse mindert sich der gegen die reibende Fläche gerichtete Normaldruck, so dass schliesslich in beiden Fällen dieselbe Reibung entsteht. Die Annahme einiger Autoren, dass scharfkantige Schrauben eine grössere Reibung erzeugen, kann nur auf einer unrichtigen Anschauung beruhen.

185 Eine Schraube, die von selbst sich wieder öffnen, z. B. bei senkrechter Stellung in ihrer festliegenden Mutter aufgewunden, wenn sich selbst überlassen, schon durch ihr eigenes Gewicht wieder herabsinken soll, ist einem Körper zu vergleichen, der, auf einer schiefen Ebene liegend, durch sein relatives Gewicht gezwungen wird, abwärts zu gleiten. Natürlich kann dies nur geschehen, wenn das relative Gewicht grösser ist als der Widerstand der gleitenden Reibung, oder was dasselbe ausspricht, wenn der Winkel c den Winkel ϱ an Grösse übertrifft. Ganz ähnlich verhält sich das auf den Windungen der Schraubenmutter vertheilte Gewicht der Spindel, nur mit dem Unterschiede, dass das Abwärtsgleiten, insofern es stattfindet, zugleich in eine rotirende Bewegung übergeht. Es ist einleuchtend, dass der Niedergang, wenn er nicht schon freiwillig eintritt, durch vergrösserten Druck, z. B. angehängter Gewichte, nicht befördert werden kann.

Bezeichnet man das Gesammtgewicht der abwärts gleitenden Schraube mit p, so ist (Nro. 151) $p \sin c$ das relative Gewicht, $\mu\, p \cos c$ der Widerstand, folglich die entlang der Schraubenlinie treibende Kraft

$$P = p\,(\sin c - \mu \cos c),$$

oder, wenn man den Reibungswinkel einführt, nach den erforderlichen Reductionen

$$P = p \frac{\sin(c - \varrho)}{\cos \varrho}.$$

Die entsprechende Beschleunigung ist $g \frac{P}{p} = g \frac{\sin(c - \varrho)}{\cos \varrho}$, folglich die erlangte Geschwindigkeit, nachdem die Masse p der Länge l der Schraubenlinie herabgefallen ist,

$$v = \sqrt{2 g \frac{\sin(c - \varrho)}{\cos \varrho} l};$$

oder auch, da $l = \frac{h}{\sin c}$,

$$v = \sqrt{2 g \frac{\sin(c - \varrho)}{\sin c \cos \varrho} h} = \sqrt{2 g h \left(1 - \frac{tng\, \varrho}{tng\, c}\right)}.$$

Soll diese Geschwindigkeit durch einen äussern Einfluss vergrössert werden, so kann dies nur durch eine der Wechselwirkung zwischen Schrauben entsprechende Weise, nämlich durch eine Kraft vermittelt werden, die tangential an der Basis der Schraube oder auch an einem grössern dieser Basis parallelen Kreisumfange in Betrieb gesetzt wird. Bezeichnet man diese Kraft mit K, ihren Hebelarm mit R, so beträgt ihr an die Peripherie der Spindel reducirter Werth $\frac{KR}{r}$. Von demselben addirt sich die der Schraubenlinie parallele Componente $K \frac{R}{r} \cos c$ zu dem relativen Gewichte von p, während die auf der Schraubenlinie senkrechte Componente $K \frac{R}{r} \sin c$ nur den Druck auf diese Linie vermindert. Als Werth der beschleunigenden Kraft findet man daher jetzt:

$$P = p \sin c + K \frac{R}{r} \cos c - \mu p \cos c + \mu K \frac{R}{r} \sin c,$$

und nach Ausführung einiger leicht verständlicher Zwischenrechnungen

$$P = p \frac{\sin(c - \varrho)}{\cos \varrho} + \frac{R}{r} K \frac{\cos(c - \varrho)}{\cos \varrho}.$$

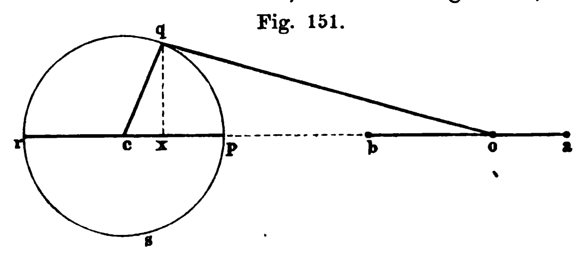
Freiwillig aufgehende Schrauben findet man verwendet als Prägstöcke, als Schneidmaschinen zum Ausschneiden kreisrunder Metallscheiben aus Blechen und dergleichen mehr.

Kurbelbewegung. Mit dem Namen Kurbel oder Krummzapf **186** bezeichnet man vorzugsweise solche Vorrichtungen, die dazu dienen, eine ursprünglich geradlinige Hin- und Herbewegung in eine fortlaufende rotirende Bewegung zu verwandeln, oder auch um das Umgekehrte zu bewirken. Z. B. die geradlinige Hin- und Herbewegung des Dampfkolbens einer Locomotive wird mit Hülfe des Krummzapfs in die Kreisbewegung der Treibräder verwandelt. Andererseits kann aber auch der geradlinige Auf- und Niedergang eines Pumpenkolbens oder einer Brett-

säge mittelst der Kurbel aus der Kreisbewegung eines Wasserrades oder irgend sonst einer rotirenden Bewegung abgeleitet werden.

Es sei ab (Fig. 151) der Spielraum der Hin- und Herbewegung eines Punktes o, an welchem z. B. die nach aussen geleitete Stange eines Dampfkolbens mit der Treibstange oq einer Kurbel durch ein Gelenk verbunden ist. Ein zweites Gelenk, das Kurbelgelenk, befindet sich

Fig. 151.

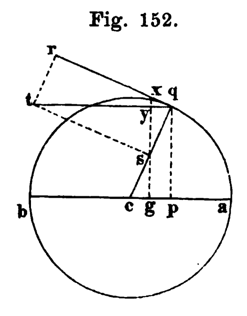


bei q, durch welches die Treibstange mit der Stange qc, der Kurbelstange, zusammenhängt. Letztere dreht sich um den festen Punkt c einer Drehaxe und zieht dadurch diese Axe selbst und alle darauf festsitzenden Theile mit in ihre rotirende Bewegung. Der Punkt q beschreibt während der Bewegung des Gelenkes o von a nach b den Halbkreis pqr, und dann, während o von b nach a zurückkehrt, den zweiten Halbkreis rsp. Der geradlinige Hin- und Hergang des Kolbens entspricht also einer vollen Umdrehung des Kurbelgelenkes um den Mittelpunkt c. Es ist einleuchtend, dass die Zeit des Ausganges des Punktes o von a mit der des Punktes q von p zusammenfällt, sowie dass der Punkt o in demselben Augenblicke b erreicht, in welchem q bei r ankommt. Es muss also $ab = pr$, d. h. der Spielraum der Bewegung des Kolbens dem Durchmesser des Kurbelkreises oder der doppelten Länge der Kurbelstange qc gleich sein. Das Geringste, was daran fehlte, würde eine Klemmung veranlassen. Ferner muss die Länge der Treibstange $oq = ap$ sein. Wenn der Punkt o sich in der Mitte zwischen a und b befindet, ist q noch nicht in der Mitte des Halbkreises pqr angelangt. Hat aber das Kurbelgelenk einen Bogen von 90^0 zurückgelegt, so muss der Kolben die Hälfte seines Spielraumes bereits überschritten haben. Soll daher die Bewegung der Kurbel eine gleichförmige werden, so muss der Kolben jedesmal in der ersten Hälfte seiner Bewegungszeit einen grössern Weg zurücklegen, als in der zweiten Hälfte. Dieser Unterschied fällt um so grösser aus, je kürzer bp, d. h. je mehr sich die Länge der Treibstange der Gränze, $2r = pr = ab$, ihrer geringsten Länge nähert; er vermindert sich dagegen mehr und mehr, eine je grössere Länge der Treibstange gegeben werden kann und verschwindet, wenn man diese Stange in ihren verschiedenen Lagen als nahezu parallel mit der Linie abc ansehen darf. Letzteres wollen wir zunächst voraussetzen.

187 Der mittlere Werth der Kraft, welche den Weg $ab = 2r$ (Fig. 152) zurücklegt, sei P. Dieser Druck wird durch die unbiegsame Treibstange

auf den Punkt q des Kurbelkreises fortgepflanzt. Da nun aber der Punkt q der Kurbelstange $qc = r$ nur in der Richtung der Tangente qr dieses Punktes bewegt werden kann, so zerfällt die Kraft $P = qt$ in die Seitenkräfte qs und qr, von welchen nur die letztere zur Bewegung beiträgt, die erstere dagegen durch den Widerstand der Axe aufgehoben wird. Bezeichnen wir den Winkel $tqs = qca$ mit φ, so ist $qr = P \sin \varphi$ und $qs = P \cos \varphi$. Es folgt hieraus, dass die in der Peripherie der Kurbel wirksame Kraft qr, selbst wenn die ursprüngliche Kraft P eine vollkommene Beständigkeit besässe, gleichwohl von sehr grosser Veränderlichkeit ist; in der Art, dass sie vom Punkte a, als Ausgang der Bewegung betrachtet, mit o beginnend, allmälig bis zu der Grösse P zunimmt, dann wieder bei b sich zu 0 vermindert u. s. w. Die Punkte a und b, an welchen die Componente $qr = P \sin \varphi$ = Null wird, nennt man die todten Punkte, weil an diesen Stellen auch der grösste Kolbendruck die Bewegung nicht würde einleiten, oder die bereits früher begonnene beschleunigen können.

Fig. 152.



Die Gesammtgrösse der von der Kraft P geleisteten Arbeit, nämlich das Moment $2 \,.\, ab \,.\, P = 2 \,.\, 2rP$ erleidet in Folge der Veränderlichkeit der Kraft qr keinen Eintrag. Es folgt dies schon im Allgemeinen aus dem Grundgesetze der Arbeit. Es lässt sich aber auch durch eine Reihe einfacher Betrachtungen unmittelbar beweisen.

Nehmen wir zu diesem Zwecke an, das Kurbelgelenk befinde sich im Laufe seiner Rotation augenblicklich an einer beliebigen Stelle q (Fig. 152). In dem nächstfolgenden sehr kleinen Zeittheilchen wird die bewegende Kraft P in ihrer Richtung den Weg pg beschreiben, und demnach die Arbeit $P \,.\, pg$ erzeugen. Gleichzeitig legt das Kurbelgelenk in der Richtung der Tangente des Punktes q den Weg qx zurück. Das zugehörige Bewegungsmoment ist also $= P \sin \varphi \,.\, qx$. Nun folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke qxy und qcp, dass Winkel $qxy = qcp = \varphi$, und dass daher

$$qx = \frac{qy}{\sin \varphi} = \frac{pg}{\sin \varphi}.$$

Man darf demnach auch setzen

$$P \sin \varphi \,.\, qx = P \sin \varphi \cdot \frac{pg}{\sin \varphi} = P \,.\, pg.$$

Auf dieselbe Weise lässt sich darthun, dass die sämmtlichen kleinen Kreisbögen, welche die Kurbel beschreibt, entsprechenden Arbeitsmomente den gleichzeitigen von der Kraft P geleisteten Arbeiten gleich sind, dass folglich die Summe aller dieser Momente oder das ganze Arbeitsmoment der Kurbelbewegung genau gleich ist dem Arbeitsmomente der bewegen-

den Kraft P. Wir haben die Kraft P bei diesen Betrachtungen als eine beständige angenommen. Selbstverständlich kann jedoch ihre Veränderlichkeit die Allgemeinheit des Beweises nicht stören, da nicht nur die Arbeit der Grundkraft im Ganzen, sondern auch die eines jeden Bruchtheiles derselben augenblicklich auf den Kurbelkreis übertragen wird.

Nennen wir die mittlere Grösse der an den Kurbelkreis übertragenen Kraft K, so ist die Grösse ihrer Arbeit

$$2 \pi r K = 2 \cdot 2 r P,$$

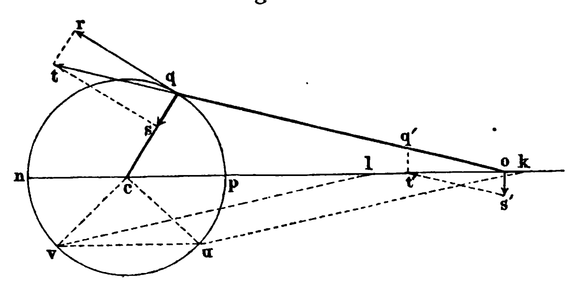
folglich

$$K = \frac{2 \cdot P}{\pi}.$$

Der Mittelwerth der Kraft K ist kleiner als P, weil die Thätigkeit der erstern sich auf einen grössern Arbeitsweg erstreckt.

188 Bei der vorhergehenden Beweisführung war allerdings vorausgesetzt worden, dass die bewegende Kraft P parallel mit ihrer Richtung auf das Kurbelgelenk einwirke, während dies doch streng genommen nie der Fall sein kann. In der That zerfällt sie schon an der Uebertragungsstelle auf die Treibstange am Gelenke o (Fig. 153) in die Seitenkräfte

Fig. 153.



$os' = P \, tng \, \varphi'$ und $oq' = \dfrac{P}{\cos \varphi'} = P'$, wenn Winkel $q'ot' = \varphi'$ gesetzt wird.

Von diesen Componenten muss $P \, tng \, \varphi'$ durch eine hinlänglich feste Widerlage aufgehoben werden. P' pflanzt sich auf den Punkt q fort und zerfällt hier wieder in die Seitenkräfte qr in der Richtung der Tangente und qs in der Richtung des Halbmessers. Da nun Winkel tqs als Aussenwinkel des Dreiecks qoc der Summe $\varphi + \varphi'$ gleich ist, so folgt

$$qr = P' \sin (\varphi + \varphi') = \frac{P \sin (\varphi + \varphi')}{\cos \varphi'}$$

und

$$qs = P' \cos (\varphi + \varphi') = \frac{P \cos (\varphi + \varphi')}{\cos \varphi'}.$$

Die veränderliche Betriebskraft an der Peripherie des Kurbelkreises heisst also eigentlich $\frac{P \sin(\varphi + \varphi')}{\cos \varphi'}$, und ihr Moment bezogen auf ein Bogenelement qx (siehe Figur 152) ist

$$qr \,.\, qx = \frac{P \,.\, pg \,.\, \sin(\varphi + \varphi')}{\sin \varphi \, \cos \varphi'} = P \,.\, pg \, (1 + \cot \varphi \,.\, tng \, \varphi').$$

Dieser Ausdruck wird $P \,.\, pg$ nur für den einzigen Fall, dass $\varphi = 90^0$, also $\cot \varphi = 0$ wird. In jedem andern Falle hat der zweite Theilsatz einen reellen bald positiven, bald negativen Werth. Diese scheinbare Ausnahme von einem allgemeinen Principe beruht jedoch auf dem Umstande, dass der Weg pg der Kraft P, wenn letztere sich durch eine schief gerichtete Treibstange fortpflanzt, nicht in aller Strenge die Höhe der schiefen Ebene qx (Fig. 152) darstellt, sondern in dem einen Quadranten (wie oben schon erörtert wurde) etwas grösser, im folgenden um eben so viel kleiner ist.

Wenn man von den Punkten p und n die gleichen Kreisbögen pu und nv abmisst, so wird die Linie uv (Fig. 153) dem Durchmesser pn gleichlaufend. Zieht man ferner von u und v die parallelen Linien uk und vl, so müssen diese an Grösse einander gleich sein. ku und lv entsprechen also zweien Lagen der Treibstange während eines Hinganges oder eines Herganges, welche mit dem Durchmesser der Kreisbahn denselben Winkel φ' bilden, während der Winkel φ für die eine Lage den für die andere Lage zu 180^0 ergänzt.

Nennen wir das Bewegungsmoment für ein verschwindend kleines Zeittheilchen in der einen Stellung der Treibstange

$$= P \,.\, pg \, (1 + \cot \varphi \; tng \, \varphi'),$$

so ergiebt sich dasjenige in der andern Stellung

$$= P \,.\, pg \, (1 - \cot \varphi \; tng \, \varphi').$$

Nun ist aber leicht zu sehen, dass es zu jeder Stellung der Treibstange noch eine andere giebt, von der Art, dass beide in ähnlicher Beziehung wie die vorher betrachteten zu einander stehen, d. h. deren Bewegungsmomente addirt, sich zu $2P \,.\, pg$ ergänzen Die Summe aller dieser Momente kann also nicht weniger noch mehr betragen, als das Product des Durchmessers der Kurbelbahn in die bewegende Kraft P. Natürlich ist dabei nicht in Anrechnung gebracht, dass ein Theil dieser Kraft während der Uebertragung durch Reibungshindernisse verloren gehen könne.

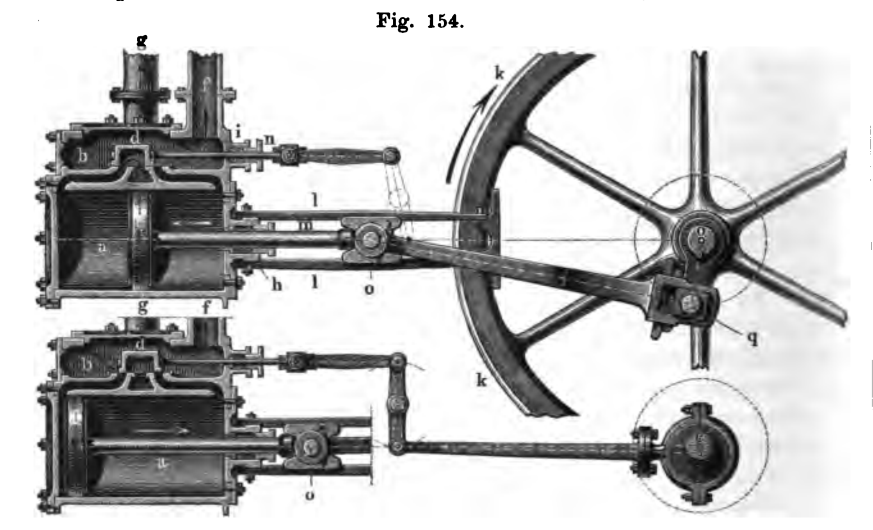
Reibungshindernisse bei der Kurbelbewegung. Bei der Uebertragung der geradlinigen Bewegung in die Kreisbahn bilden sich mehrere Veranlassungen zu Reibungen, welche dieser Bewegungsform eigenthümlich sind und die wir deshalb hier näher zu betrachten haben. **189**

Die Abweichung der Treibstange aus der mit der Richtung der Kraft gleichlaufenden Lage bewirkt, wie wir vorher (Fig. 153) gesehen

haben, einen winkelrechten Seitendruck $os' = P tng \varphi'$, der zur Wahrung einer festen und unveränderlichen Bewegungsrichtung der Kolbenstange einer Widerlage bedarf.

Ein einfaches Verfahren, diesen Zweck zu erreichen, besteht darin, dass man das die Kolbenstange mit der Treibstange verbindende Gelenk o zwischen Führungen $l\,l$ hin- und hergehen lässt, wie beispielsweise bei der Dampfmaschine (Fig. 154). Die hieraus hervorgehende gleitende

Fig. 154.



Reibung $\mu P tng \varphi'$ ändert sich mit der Grösse des Winkels φ'. Nun ist (Fig. 153)

$$sin\,\varphi' : sin\,\varphi = r : l, \quad \text{daher} \quad sin\,\varphi' = \frac{r}{l}\,sin\,\varphi.$$

Unter gegebenen Verhältnissen erreicht φ' seinen grössten Werth für $\varphi = 90^0$. Es ist in diesem Falle $sin\,\varphi' = \frac{r}{l}\cdot$ Der Spielraum der Veränderungen des Winkels φ' und folglich auch von $tng\,\varphi'$ wird um so kleiner, je geringer die Grösse des Bruches $\frac{r}{l}\cdot$ Aus diesem und anderen Gründen ist es daher vortheilhaft, der Treibstange im Vergleiche zur Kurbelstange eine beträchtliche Länge zu geben. In der That beträgt die Länge der letztern selten mehr, in der Regel weniger als $^1/_4$ von derjenigen der erstern. Nun ist $0{,}250 = sin\ 14^0\,30'$ und $tng\ 14^0\,30' = 0{,}259$. Die Grösse der Reibung schwankt also zwischen den Gränzen 0 bis $0{,}259\,\mu P$. Ihr Mittelwerth wird, in Betracht des geringen Unterschiedes des Sinus von der Tangente kleiner Winkel, in der Regel mit hinlänglicher Annäherung durch

$$\mu P \frac{sin\,\varphi'}{2} = \mu P \frac{r}{2l} = F$$

ausgedrückt sein. Diese Reibung begleitet die Kraft P auf ihrem ganzen Hin- und Herwege und beansprucht zu ihrer Ueberwindung einen verhältnissmässigen Theil von P.

Eine zweite Reibung entsteht durch den Druck gegen den Bolzen oder den Stift des Gelenkes, welches Treibstange und Kurbelstange verbindet.

Wie im vorhergehenden Paragraphen gezeigt wurde, ist dieser Druck $P' = \frac{P}{\cos \varphi'}$. Der Werth von $\cos \varphi'$ sinkt nicht leicht unter $\cos 14^0 30' = 0{,}96815$, und dann kann P' nicht über die Grösse von $\frac{P}{0{,}96815} = 1{,}033$ hinausgehen. P' wird demnach zwischen den Gränzen $P' = P$ bis $P' = 1{,}033\, P$ schwanken und sein mittlerer Werth gewöhnlich nicht über die Grösse von $P' = 1{,}0165$ hinausgehen. Die Grösse der Bolzenreibung ist daher durch den Werth μP hinlänglich genau bestimmt. Der Bolzen dreht sich bei jeder Umdrehung der Kurbel ebenfalls vollständig herum. Sein Radius sei s, so ist $2 \pi s$ der Weg und $2 \mu \pi P s$ die Arbeit der Bolzenreibung. Ein dieselbe ausgleichender Theil der Kraft legt in derselben Zeit den Weg $2 \,.\, 2 r$ zurück. Man hat daher

$$2 \mu \pi P s = 2 \,.\, 2 r F'$$

und

$$F' = \mu P \frac{\pi s}{2 r}.$$

Eine dritte Reibung wird durch den Axendruck $P \cos \varphi$ (Nro. 187) veranlasst. Dieser Druck schwankt mit der Grösse von $\cos \varphi$ und die davon abhängige Reibungsarbeit beträgt für ein Bogenelement $\varrho\, d \varphi$ des Zapfenumfanges $\mu P \cos \varphi\, \varrho\, d \varphi$. Die Summe dieser Arbeitselemente zwischen den Gränzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ beträgt $\mu \varrho P$, und da dieser Einfluss sich in jedem der folgenden Quadranten wiederholt, also viermal vorkommt, so beträgt die ganze Arbeit dieser Zapfenreibung

$$4 \mu \varrho P = 4 r F'',$$

folglich der dafür erforderliche Kraftaufwand

$$F'' = \mu P \frac{\varrho}{r}.$$

Diese Zapfenreibung ist nicht mit der von der Tangentialkraft $q r$ (Fig. 153) abhängigen zu verwechseln, welche letztere überall da vorkommt, wo eine Kraft im Kreise herum wirksam ist, die also der Kurbelbewegung nicht eigenthümlich und deren Gesammtarbeit, wie wir schon bei früheren Gelegenheiten erkannt haben, nahe gleich Null ist.

Die an den Kurbelkreis mit Rücksicht auf Reibungswiderstände übertragene Kraft bestimmt sich nunmehr nach der Gleichung

$$2\pi r K = 4r\,\{P - (F + F' + F'')\}$$

$$= 4r\left\{P - \mu P\frac{r}{2l} - \mu P\frac{\pi s}{2r} - \mu P\frac{\varrho}{r}\right\}$$

$$= 4rP\left(1 - \frac{\mu r}{2l} - \frac{\mu\pi s}{2r} - \frac{\mu\varrho}{r}\right);$$

also

$$K = \frac{2P}{\pi}\left(1 - \frac{\mu r}{2l} - \frac{\mu\pi s}{2r} - \frac{\mu\varrho}{r}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Als Beispiel zur Berechnung diene die Kurbelbewegung eines horizontal liegenden Dampfcylinders (Fig. 154), dessen Weite 38 Centimeter beträgt, und der für die Bewegung des Kolbens einen Spielraum von $2r = 50$ Centimeter bietet. Es ist demnach $r = 25$ Centimeter. Es ist ferner die Länge der Treibstange $l = 125$ Centimeter; der Halbmesser des Kurbelbolzens $s = 3{,}5$ Centimeter; der Halbmesser des Radzapfens $\varrho = 5$ Centimeter. Nimmt man ausserdem den Reibungscoefficienten zu dem Werthe $\mu = 0{,}08$, so wird erhalten

$$K = \frac{2P}{\pi}(1 - 0{,}008 - 0{,}018 - 0{,}016) = 0{,}958\,\frac{2P}{\pi}.$$

Die Uebertragung der Kraft aus der geradlinigen in die rotirende Bewegung geschieht also unter diesen Verhältnissen mit einer Einbusse von etwas mehr als 4 Procent der Kraft.

Wenn eine in gleichem Sinne fortdauernde Kreisbewegung in eine geradlinige Hin- und Herbewegung verwandelt werden soll, so kann man auf ähnliche Weise wie vorher die Reibung von dem Drucke P abhängig machen, indem nunmehr dieser Druck als Widerstand oder als Last wirksam ist und durch den Reibungswiderstand um einen aliquoten Theil vermehrt wird. Es ist demnach in diesem Falle

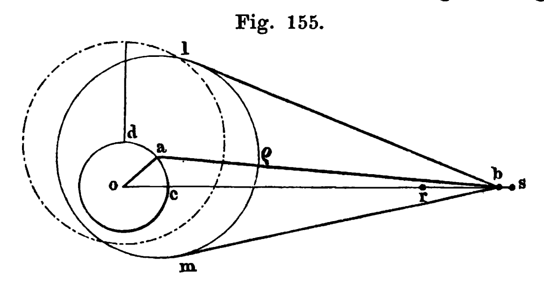
$$K = \frac{2P}{\pi}\left(1 + \frac{\mu r}{2l} + \frac{\mu\pi s}{2r} + \frac{\mu\varrho}{r}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

Es ist aus den vorstehenden Erörterungen und Berechnungen zu erkennen, dass die Umsetzung der geradlinigen in die Kreisbewegung, oder umgekehrt der letztern in die erstere durch Vermittlung der Kurbel ohne bedeutenden Kraftverlust geschehen kann; dass folglich die Kurbel eine zu diesem Behufe sehr geeignete Vorrichtung ist, vorausgesetzt freilich, dass bezüglich der Grössenverhältnisse ihrer Bestandtheile zweckmässige Dimensionen eingehalten werden.

Die Kurbelbewegung gewährt aber hierbei noch einen andern sehr wesentlichen Vortheil. Es liegt nämlich in der Natur einer jeden geradlinigen Hin- und Herbewegung, dass sie aus der Ruhe nur durch allmälige Abstufungen zu einem Maximum der Geschwindigkeit und dann wieder rückwärts zur Ruhe übergehen kann. Die Verbindung zwischen Treibstange und Kurbelstange hat nun das Eigne, dass sie sich dieser Art der Bewegung ungemein gut anpasst und dabei doch eine gleichförmige Rotation des Kurbelgelenkes gestattet (Nro. 21).

190 Das sogenannte **excentrische Rad** lässt sich als eine Abänderung der Kurbel betrachten, bei welcher der Bolzen des Kurbelgelenkes einen Durchmesser von ganz ungewöhnlicher Grösse besitzt, so dass derselbe sogar grösser geworden ist als derjenige des Kurbelkreises. Es sei o (Fig. 155) ein Punkt in der Axe des excentrischen Rades, $oa = oc = r$ der Radius des Kurbelkreises, also $2r = rs$ der geradlinige Hin- und

Fig. 155.



Hergang. Es sei ferner $cs = ab = l$ die Länge der Treibstange. Der Verbindungspunkt derselben mit der Kurbelstange, der Mittelpunkt des Kurbelgelenkes, befindet sich augenblicklich in a; derselbe bewegt sich aber während eines Hin- und Herganges des Punktes b durch den ganzen Umfang des Kreises $cadc$.

Der Bolzen dieses Gelenkes hat sich nun in eine Scheibe von beträchtlicher Grösse verwandelt, deren Radius $a\varrho = s$ grösser als r. Dieselbe dreht sich in einem Ringe von entsprechender Weite, der mit der Treibstange zusammenhängt und so, ähnlich dem Gelenke der gewöhnlichen Kurbel, in der Kurbelbahn herumgetrieben wird. Während dieser Drehung erfährt die Scheibe, das excentrische Rad, wegen des grossen Halbmessers s einen sehr bedeutenden Reibungswiderstand, der sich übrigens wie bei der gewöhnlichen Kurbel nach der Formel II (Nro. 189)

$$K = \frac{2P}{\pi}\left(1 + \frac{\mu r}{2l} + \frac{\mu \pi s}{2r} + \frac{\mu \varrho}{r}\right)$$

berechnen lässt, wenn man beispielsweise annimmt, dass eine im Kurbelkreise, am Halbmesser oa (Fig. 155) thätige Kraft K in die gerade Linie rs übertragen werden soll.

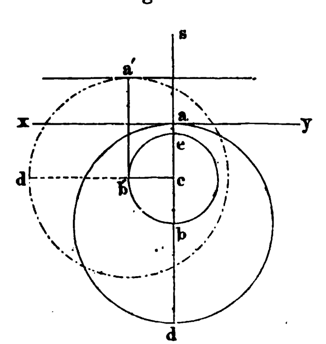
In dem Beispiele des vorhergehenden Paragraphen war das Verhältniss $\frac{s}{r} = \frac{3,5}{25}$ gesetzt worden, und dadurch erhielt man $\frac{\mu \pi s}{2r} P = 0,018 P$. Wird jedoch s grösser als r, z. B. nur $= 2r$ genommen, so verwandelt sich dieser Ausdruck in $\frac{\mu \pi s}{2r} = 0,25 P$; d. h. der vierte Theil der Kraft geht durch die Reibung des excentrischen Rades in seinem Ringe verloren.

Wegen dieses grossen Kraftverlustes, den die Anwendung des excentrischen Rades herbeiführt, wird es nicht als Hauptfortpflanzungsmittel der Kraft, sondern nur für abgeleitete Bruchtheile derselben oder für

solche Bewegungen benutzt, die überhaupt nur wenig Kraft in Anspruch nehmen, z. B. bei Dampfmaschinen zum Betriebe des Schieberventils, bei welchem andere Bewegungshindernisse ausser der Reibung gar nicht vorkommen (Fig. 154). Das excentrische Rad gewährt in solchen Fällen den Vorzug, dass die eigenthümlichen Vortheile der Kurbelbewegung erzielt werden können, ohne dass darum eine Unterbrechung der Welle nothwendig wird.

191 Das excentrische Rad kann auch gebraucht werden, um ein regelmässig fortdauerndes Heben und Senken unmittelbar, d. h. ohne Dazwischenkunft von Ring und Treibstange zu bewirken. Es mag c (Fig. 156) die Axe der Kurbelwelle, cb einen Radius des Kurbelkreises vorstellen. In der Peripherie dieses Kreises bewegt sich der Mittelpunkt b des excentrischen Rades, dessen Halbmesser durch die Linie $bd = ba$ gegeben ist. Der Punkt b gelangt nach und nach in die Lagen b', e und wieder zurück nach b. Eine ebene Fläche XY, nur parallel mit sich selbst beweglich, die auf dem excentrischen Rade ruhend, anfangs den Punkt a berührt, wird durch die excentrische Drehung allmälig bis zu dem Punkte s gehoben und sinkt ebenso wieder nach a zurück. Die Höhe des Punktes s fällt mit der Ankunft von b in e, also mit dem höchsten Stande des Punktes d, nach einer halben Umdrehung zusammen. Es ist mithin $es = bd$ und

Fig. 156.



$$as = es - ae = bd - ae = ab - ae = be.$$

Die Hubhöhe ist gleich dem Durchmesser des Kurbelkreises, ganz so wie bei jeder andern Form der Kurbel.

Die Grösse der excentrischen Scheibe hat demnach keinen Einfluss auf diejenige der geradlinigen Hin- und Herbewegung, welche ausschliesslich nur von dem Durchmesser des Kurbelkreises abhängig ist.

Da der Mittelpunkt der Scheibe seine Stelle wechselt, so ist es einleuchtend, dass auch die Berührungspunkte der ebenen Fläche XY mit dem Umfange der Scheibe sich verändern müssen, und zwar innerhalb eines Spielraumes cb' links sowie rechts von der Drehaxe c. Es folgt hieraus, dass die Reibung nur theilweise eine gleitende, grossentheils aber auch wälzende ist. Um den Einfluss der erstern so klein wie möglich zu machen, ist es rathsam, dem excentrischen Rade den kleinsten durch die äusseren Verhältnisse gestatteten Halbmesser zu geben. Aber auch dann bleibt bei der Anwendung dieses Fortpflanzungsmittels der Kraft ein verhältnissmässig bedeutender Reibungswiderstand in Anschlag zu bringen, der überdies noch in Folge des Seitendruckes gegen die

Widerlagen oder Führungen des auf- und niedergeschobenen Körpers eine nicht ganz unbeträchtliche Vermehrung erfahren kann.

Die Ueberführung einer geradlinigen Hin- und Herbewegung in eine Hin- und Herbewegung in Bogenform, wie z. B. die des Balanciers einer Watt'schen Dampfmaschine, lässt sich als Umwandlung in eine Art Kurbelbewegung ansehen, bei welcher der Durchmesser der Kurbelbahn grösser ist als die Sehne des beschriebenen Bogens, dergestalt, dass die volle Umdrehung unmöglich wird.

Die dabei in Betracht kommende Reibung, so lange das Gelenk gut in Schmiere gehalten wird, ist sehr gering. Sie lässt sich nach der Formel

$$F' = \frac{\mu \pi s}{2 r} P \text{ (Nro. 189)}$$

beurtheilen, wenn statt π der beschriebene Bogen φ, für s der Radius des Gelenkes, für r der dem Bogen φ zugehörende Radius gesetzt wird. Z. B. bei der Watt'schen Dampfmaschine ist die Hubhöhe h des Kolbens gleich der Sehne des Bogens, den das Kolbenstange und Balancier verbindende Gelenk beschreibt, r gleich der halben Länge des Balanciers. Setzt man nun, in Betracht dass $r\varphi$ gewöhnlich nur einen kleinen Theil des Kreises $2 r \pi$ darstellt, als eine erste Annäherung $r \varphi = h$, also $\varphi = \frac{h}{r}$, so wird

$$F' = \mu P \frac{h s}{2 r^2}.$$

Da $h s$ immer nur einen kleinen Bruchtheil von r^2 bedeutet, so ist ersichtlich, dass dieser Reibungswiderstand, wenn selbst doppelt genommen, wie es bei dem Balancier geschehen muss, nur wenig in Betracht kommen kann.

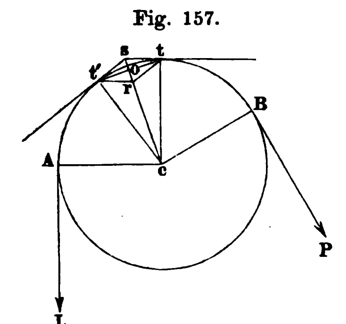
Fortpflanzung der Bewegung durch Seile. Wir haben schon **192** öfter Gelegenheit gehabt, auf die Seile als Hülfsmittel hinzuweisen, bewegende Kräfte zu leiten. Die feste und bewegliche Rolle, die Flaschenzüge, selbst Haspel und Winde sind in vielen Fällen nur Anwendungen dieses ebenso einfachen als wirksamen Fortpflanzungsmittels der Kraft. Dieselbe lässt sich mit Hülfe eines Seiles nach jeder beliebigen Richtung und sogar auf beträchtliche Entfernungen hin leiten; ohne bedeutenden Verlust an Kraft, sobald man die Vorsicht gebraucht, an jeder Stelle veränderter Richtung und überall da, wo das Seil an einem festen Körper anstreifen könnte, eine Leitrolle anzubringen. Wenn Seile an den Umfängen der Leitrollen nur anlehnen oder nur an sehr kleinen Bögen derselben sich anschliessen, so ist der daraus entspringende Widerstand der wälzenden Reibung sehr gering und an einzelnen Rollen fast verschwindend. Sobald das Seil einen grössern Bogen von wenigstens 90° oder mehr umfangen muss, entsteht freilich in Folge der Zapfenreibung und Steifigkeit ein grösserer Widerstand, der bis zu 8 bis 9 Procent der Kraft

gehen kann. Derselbe fällt, wie wir früher (Nro. 157) gesehen haben, um so geringer aus, je geringer die Dicke des Seiles sein kann, und je grösser der Durchmesser der Rolle im Vergleiche zu dem ihres Zapfens. Flach geflochtene Seile, sogenannte Seilbänder, veranlassen geringern Widerstand als cylindrische Seile.

193 **Seilreibung.** Der Widerstand nimmt alsbald in sehr auffallender Weise zu, wenn die Beweglichkeit der Rolle um ihre Axe gestört und das Seil genöthigt ist zu gleiten. Es ist eine allgemein bekannte Erfahrung, dass die Grösse desselben von der Grösse des umschlungenen Bogens abhängt und dass er durch eine geringe Anzahl Umwicklungen ganz unüberwindlich werden kann.

Denken wir uns eine festliegende Walze, von welcher die Fig. 157 einen mit der Grundfläche parallel geführten Querschnitt zeigt. Um dieselbe ist ein Seil $LABP$ gebogen, an dessen einem Ende eine Last L angehängt ist, die durch eine am andern Ende wirksame Kraft P aufwärts gezogen werden soll. Da die Walze sich nicht dreht, so kann die Bewegung des Seiles nur gleitend geschehen; es entsteht daher Reibung an allen Punkten, an welchen das Seil die Walze berührt. Der Druck, welcher diese Reibung bewirkt, ist von der an den einzelnen Berührungspunkten herrschenden Spannung abhängig. Z. B. an einem Punkte s ist das Seil durch eine Kraft gespannt, die der Last L vermehrt um den von A bis s eintretenden Reibungswiderstand das Gleichgewicht hält. Bezeichnen wir diese Spannung mit T, so kann man sich vorstellen, dass der Punkt s von zwei entgegengesetzt gleichen Kräften, jede gleich T, von s nach t und von s nach t' gezogen wird. In Folge der vom Punkte s nach beiden Seiten hin stattfindenden Krümmungen müssen die beiden gleichen Kräfte einen wenn auch sehr stumpfen Winkel tst' bilden, also gegen die Oberfläche der Walze einen centralen Druck erzeugen. Dieser Druck ist die Ursache der Reibung am Punkte s. Es ist nun leicht einzusehen, warum die Spannung und mit ihr die Reibung von A nach B hin, und warum sie überhaupt mit der Grösse des umspannten Bogens zunehmen muss.

Fig. 157.



Zum Zwecke genauerer Bestimmung setzen wir Bogen $As = r\varphi$, und das Bogenelement $tst' = rd\varphi$. Es sei ferner die Kraft T durch die in ihre Richtung fallende Linie $st = st'$ ausgedrückt, so ist nach den Regeln des Parallelogrammes der Kräfte der von T abhängige centrale Druck $dx : T = sr : st$, folglich

$$dx = T\frac{sr}{st} = T\frac{2 \, . \, so}{st} = 2\,T\cos\frac{tst'}{2}.$$

Die Linien st und st' sind die Tangenten der Punkte t und t'. Daraus folgt, dass Winkel $cst + sct = 90^0$, und ferner dass

$$\cos cst = \cos\frac{tst'}{2} = \cos(90^0 - sct) = \sin sct = \sin\frac{tct'}{2}.$$

Daher

$$dx = 2\,T\sin\frac{tct'}{2}.$$

Nun ist Bogen $tct' = r\,d\varphi$, folglich Winkel $tct' = d\varphi$, und $\sin\frac{tct'}{2} = \sin\frac{d\varphi}{2}$.

Da der Bogen $r\,d\varphi$ nach Annahme ein Bogenelement sein soll, so darf man setzen $\sin\frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$. Es ist daher

$$dx = 2\,T\frac{d\varphi}{2} = T\,d\varphi.$$

Es bedeutet dx ein Differential der von A bis s wirksamen centralen Pressungen, deren Summe $= x$. Die Reibung auf der Bogenlänge $r\varphi$ beträgt μx. Die am Punkte s eintretende, aus der Last und der Reibung zusammengesetzte Spannung muss daher sein:

$$T = L + \mu x,$$

woraus folgt:

$$dT = \mu\,dx \quad \text{und} \quad dx = \frac{dT}{\mu}.$$

Indem man diesen Werth von dx dem vorher gefundenen gleichsetzt, erhält man die Differentialgleichung

$$T\,d\varphi = \frac{dT}{\mu} \quad \text{oder} \quad \mu\,d\varphi = \frac{dT}{T} = d\,log\,nat\,T,$$

deren Integralwerth zwischen den Gränzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = AcB$ = einem beliebig gewählten Bogen $n\pi$, an dessen Ende die Kraft P wirksam ist, ausgedrückt werden kann durch

$$\mu \, . \, n\pi = log\,nat\,\frac{P}{L} = 2{,}3\,log\,\frac{P}{L}$$

oder auch durch

$$\frac{\mu n \pi}{2{,}3} = log\,\frac{P}{L} \quad \text{oder durch} \quad 10^{\frac{\mu n \pi}{2{,}3}} = \frac{P}{L}\ \text{*)}.$$

In dieser Formel bedeutet L die zu hebende Last, P die dazu erforderliche Kraft, $n\pi$ eine Anzahl halber Umwicklungen des Riemens

*) In der Entwicklung dieser Formel haben wir uns im Wesentlichen an den schon von Eytelwein in seinem Handbuche der Mechanik gewählten Gang gehalten.

oder des Seiles. Der Reibungscoefficient beträgt nach den Versuchen Morin's, für neue trockne Riemen aus Rindsleder auf hölzernen oder gusseisernen Trommeln, $\mu = 0{,}56$. Derselbe sinkt, nachdem der Riemen einige Zeit im Gebrauche war und etwas fettig geworden ist, auf 0,47 herab. Durch Schmieren des Riemens mit Talg wird $\mu = 0{,}16$. Für gewöhnliche fette Riemen auf gusseisernen Rollen beträgt derselbe $\mu = 0{,}28$.

Für Hanfseile auf hölzernen Trommeln ist $\mu = 0{,}50$, und sinkt für Seile auf glatten gusseisernen Walzen bis auf $\mu = 0{,}33$.

Setzen wir beispielsweise $\mu = 0{,}33$, so wird

$$\frac{\mu n \pi}{2{,}3} = 0{,}45\, n,$$

folglich

$$P = 10^{0{,}45 \cdot n} L.$$

Hiernach ergiebt sich für

$$\begin{aligned} n &= 1; & P &= 2{,}82\, L, \\ n &= 2; & P &= 7{,}94\, L, \\ n &= 3; & P &= 22{,}39\, L, \\ n &= 4; & P &= 63{,}10\, L, \\ n &= 10; & P &= 31630\, L. \end{aligned}$$

Also schon bei 10 halben oder 5 ganzen Umwicklungen des Seiles würde eine Kraft von 316 300 Kilo erforderlich sein, um auch nur 10 Kilo an einer festliegenden Walze aufwärts ziehen zu können. Umgekehrt würden 10 Kilo Kraft genügen, um mittelst des Reibungswiderstandes von 5 Umwindungen des Seiles eine schwebende Last bis zu 316 300 Kilo im Gleichgewichte halten zu können.

Diese Zahlenresultate wurden gefunden, unabhängig vom Durchmesser der Walze; unter der Voraussetzung allerdings, dass das Seil genügende Biegsamkeit besitze, um sich der gekrümmten Oberfläche ganz anschliessen zu können. Denn nur unter dieser Bedingung kann die oben berechnete ausserordentliche rasche Zunahme des Reibungswiderstandes eintreten.

Sollte ein sehr schwerer Gegenstand P, der an einem mehrmals um eine Walze geschlungenen Seile hängt, unter dem Widerstande L eines Arbeiters langsam senkrecht niedergelassen werden, so findet man die nothwendige Anzahl Umwicklungen mittelst der Gleichung

$$n = \frac{2{,}3}{3{,}14\, \mu} \log \frac{P}{L},$$

oder, wenn $\mu = 0{,}33$ wieder als Reibungscoefficient gelten kann,

$$n = 2{,}22 \log \frac{P}{L}.$$

Z. B. für $P = 2000$ Kilo, $L = 20$ Kilo findet man:

$$n = 2{,}22 \log \frac{2000}{20} = 2{,}22 \,.\, 2 = 4{,}44 \text{ halbe Umwindungen.}$$

Riemen und Seile ohne Ende. Anstatt der gezahnten Räder **194** wendet man sehr häufig Riemen oder Seile an, um die Bewegung von einer Rotationsaxe auf die andere fortzupflanzen. Diese Bänder sind ohne Ende, oder in sich selbst zurückkehrend, um zwei Räder oder Rollen geschlungen und hinlänglich gespannt, um bei der Drehung nicht gleiten zu können. Das eine Rad, durch eine äussere Kraft gedreht, führt vermöge der zwischen Radumfang und Band eintretenden Reibung das letztere, und dieses wieder aus demselben Grunde das zweite Rad mit in seine Bewegung. Dadurch wird es möglich, die Bewegung in derselben gleichförmigen Weise wie durch richtig construirte Zähne, und auch mit derselben Sicherheit von einer Radperipherie auf die andere zu übertragen.

Allerdings ist dieses Verfahren nur auf solche Räder anwendbar, die sich wenigstens nahezu in derselben Ebene und um parallele Axen drehen. Innerhalb dieser Gränzen bietet es aber häufig grosse Vortheile, theils wegen des gleichförmigen, sanften und fast geräuschlosen Ganges, welchen es gestattet, theils weil es erlaubt, die Bewegung von einer Axe auf die andere aus Entfernungen zu übertragen, auf welche hin die Verbindung durch Zahneingriffe nicht in gleich einfacher Weise, zuweilen auch nicht ohne Schwierigkeit und immer nur unter grösserm Kraftverluste zu bewerkstelligen sein würde.

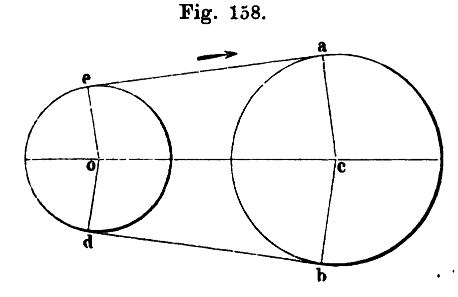
Durch die Spannung der Seile oder Riemen entsteht ein Druck auf die Axen der Rollen, um welche sie gehen und folglich Reibung. Es ist daher von Wichtigkeit in jedem vorkommenden Falle, die Spannung nicht grösser oder doch nicht viel grösser zu machen, als erforderlich, um eine regelmässige Fortleitung der Kraft zu erzielen, ohne ein Gleiten des Riemens befürchten zu müssen.

Wenn ein um eine Rolle geschlungenes Band fortgleiten soll, während am einen Ende eine Last L wirksam ist, so wird dazu am andern Ende eine Kraft erfordert, deren Betrag, wie vorher gezeigt wurde, ist

$$P = 10^{\frac{\mu \pi n}{2,3}} L.$$

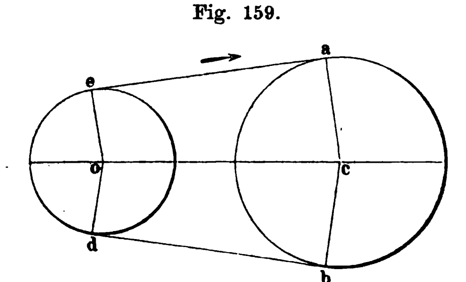
Es seien C und o (Fig. 158) die Mittelpunkte der beiden durch einen Riemen oder ein Seil ohne Ende verbundenen Rollen, und die Bewegung möge von der Rolle C auf o fortgeleitet werden. Der um beide laufende Treibriemen kann, sowie die Figur andeutet, geführt sein oder auch sich zwischen beiden durchkreuzen. Den letztern Fall wendet man an, wenn die Rolle o die entgegengesetzte Bewegungsrichtung von c erhalten soll. Denken wir uns

Fig. 158.



den gewöhnlichern ersten Fall und beide Axenpunkte nicht sehr nahe bei einander, so ist von jeder Rolle ungefähr der halbe Umfang vom Riemen umspannt, also n in obiger Formel $= 1$ oder doch nahezu so. Um die erforderliche Spannung hervorbringen zu können, muss sich der Abstand oc vergrössern lassen, in der Art z. B., dass die Axe des Rades o mittelst einer Schraube, parallel mit sich selbst, verschiebbar gemacht wird. Durch Anziehen oder Ablassen dieser Schraube lässt sich dann versuchsweise gerade die nothwendige Spannung herbeiführen.

Fig. 159.



Diese Spannung wird sich während der Ruhe auf beide Stücke ea und db des Treibriemens offenbar gleichförmig vertheilen. Sobald aber die Bewegung beginnt, und unter der Voraussetzung, dass das Band über keine der Rollen gleitet, muss sich das eine Stück desselben, z. B. ea, wenn die Bewegung von e nach a geht, und die Kraft P bei a ihre Angriffsstelle hat, stärker spannen als das andere.

Da der Riemen nach Annahme nicht gleitet, so kann die Spannung von ea wohl grösser, aber unmöglich kleiner sein als P. Man darf sich diese Kraft an jedem beliebigen Punkte des Bandes ea (das ja mit der Peripherie der Rolle c gleichsam ein durch Reibung zusammenhängendes Stück ausmacht), und folglich auch an den Punkt e, d. h. an die Peripherie der Rolle o versetzt denken. Es ist hieraus ersichtlich, dass die Bewegung von der einen auf die andere Rolle mit unveränderter Stärke übertragen wird.

Angenommen, die Spannung von ea sei während der Drehung genau gleich P, so muss für die Bedingung des Gleichgewichtes die Spannung T von db um die ganze Grösse der zwischen e und d vorhandenen gleitenden Reibung kleiner sein als P. Es ist daher

$$T = L = \frac{P}{10^{\frac{\mu \pi n}{2,3}}};$$

und wenn $\mu = 0,28$, $n = 1$ gesetzt wird,

$$T = \frac{P}{2,411} = 0,415\ P.$$

Die Summe der Spannungen auf beiden Seiten muss also um ein Geringes mehr betragen als

$$P + T = (1 + 0,415)\ P,$$

wenn das Gleiten vermieden werden soll. Unter dieser Bedingung wird dann die Kraft P ihre Wirksamkeit an die Peripherie der Rolle o fort-

pflanzen und die Anzahl Umdrehungen beider Rollen werden sich verhalten umgekehrt wie die Grössen ihrer Halbmesser.

Man gewinnt auf diesem Wege ein sehr bequemes Hülfsmittel, grosse Rotationsgeschwindigkeiten hervorzubringen. In der That bedarf es hierzu nur, zwei Rollen von sehr ungleichen Halbmessern durch eine Treibschnur zu verbinden, dann die grössere in geeignete Bewegung zu setzen. Macht diese z. B. zwei Umdrehungen in einer Secunde und das Verhältniss der Halbmesser ist wie 10 zu 1, so muss die kleinere Rolle in derselben Zeit 20 Umdrehungen vollenden.

Die Grösse der Spannung der Treibschnur oder des Treibriemens ist unabhängig von der Rotationsgeschwindigkeit, so dass man nicht zu befürchten hat, bei einer grössern Geschwindigkeit möge Gleiten eintreten, wenn es bei einer geringern nicht stattgefunden hatte. Allerdings ist hierbei vorausgesetzt, dass mit der grössern Geschwindigkeit nicht zugleich auch die zu wältigende Last zunehme.

Noch dürfte es nicht überflüssig sein hervorzuheben, dass, entsprechend den bekannten Gesetzen der Reibung, auf die Grösse der Seilreibung nur die des umschlungenen Bogens, nicht aber die Breite des Bandes einen Einfluss äussert. Letztere braucht daher in keinem Falle grösser zu sein, als es die Festigkeit des Zusammenhanges erheischt.

Die vorher berechnete Spannung $P + T = 1{,}415\,P$ wirkt als Druck auf beide Rollzapfen und bedingt auf beiden die Reibungsgrösse $\mu'(P + T)$, folglich für eine Umdrehung der Rolle c, von welcher die Bewegung ausgeht, die Reibungsmomente

$$\mu'\,(P + T)\,2\pi\varrho + \mu'\,(P + T)\,\frac{R}{R'}\,2\pi\varrho' = 2\pi R\,.\,F,$$

wenn man mit R, R' die Halbmesser der Rollen, mit ϱ, ϱ' die ihrer Zapfen, mit μ' den betreffenden Reibungscoefficienten und endlich mit F den Bruchtheil der Kraft P bezeichnet, welcher der Reibung das Gleichgewicht hält. Es ist im Allgemeinen

$$F = \mu'\,(P + T)\left(\frac{\varrho}{R} + \frac{\varrho'}{R'}\right).$$

Setzt man $\mu' = 0{,}1$; $\frac{\varrho}{R} = {}^1/_{12}$ und $\frac{\varrho'}{R'} = {}^1/_6$, so ergiebt sich für das berechnete Beispiel

$$F = 0{,}1\;.\;1{,}415\,P\,({}^1/_{12} + {}^1/_6) = 0{,}035\,P.$$

Es ist leicht zu sehen, dass man es innerhalb gewisser Gränzen in der Gewalt hat, durch verhältnissmässige Vergrösserung der Rollen diesen Widerstand noch weiter zu vermindern. Zum Zwecke der Erzeugung grosser Rotationsgeschwindigkeiten dürfte demnach die Fortleitung der Bewegung durch Riemen oder Seile ohne Ende derjenigen durch das Ineinandergreifen von Zähnen in der Regel vorzuziehen sein.

Elfter Abschnitt.

Von den Trägheitsmomenten rotirender Massen.

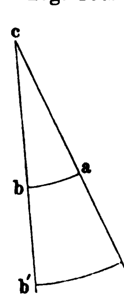
195 Die Masse eines jeden in gerader Linie fortschreitenden Körpers darf man sich wie in seinem Schwerpunkte verdichtet vorstellen. Der Einfluss der Massengrösse auf die Bewegung lässt sich hiernach ohne Schwierigkeit vorherrschen, denn er entspricht demjenigen eines einzigen materiellen Punktes. In der That haben wir denselben schon früher in den beiden folgenden Sätzen zusammengestellt.

Die Beschleunigung eines geradlinig fortschreitenden Körpers verhält sich umgekehrt wie seine Masse (Nro. 44). Seine lebendige Kraft dagegen steht im geraden Verhältnisse seiner Masse (Nro. 53).

Diese Sätze verlieren jedoch ihre Richtigkeit, sobald die Bewegung nicht mehr die gerade Linie einhält, und in Folge dessen verschiedene Punkte des bewegten Körpers ungleiche Geschwindigkeiten annehmen.

Betrachten wir z. B. zwei Körpertheilchen a, a' (Fig. 160), deren Lage sowohl zu einander wie zu einer durch den Punkt c gelegten Drehaxe gegeben und unveränderlich ist. Ihre senkrechten Abstände von der Drehaxe seien r und r'. Da sie sich nach Annahme dieser Axe weder nähern, noch auch von derselben sich entfernen können, so müssen sie während der Drehung um den Punkt c ungleiche Bogenlängen beschreiben, und zwar immer so, dass die Bedingung der unveränderlichen gegenseitigen Lage gewahrt bleibt. Wäre z. B. $r' = 2r$, so müssten auch die in gleichen Zeittheilen beschriebenen Bögen ab und $a'b'$ im Verhältnisse von 1 zu 2 stehen.

Fig. 160.



Es würde dies selbst dann der Fall sein, wenn die Ursache der Bewegung sich unmittelbar nur gegen den einen Punkt, etwa gegen a gerichtet hätte, denn dieser Punkt kann sich nicht bewegen, ohne dass in Folge der Festigkeit des Zusammenhanges der andere folgt. Offenbar verbreitet sich also die Wirksamkeit der Kraft von a aus gerade im nothwendigen Verhältnisse auch auf a' *). Bezeichnen wir mit v und v' die dadurch gewonnenen Geschwindigkeiten, so ist

$$v : r = v' : r',$$

oder auch

$$\frac{v}{r} = \frac{v'}{r'} = u = \text{einer Constanten.}$$

*) Von dem diese Vertheilung der Kraft bedingenden innern Vorgange erhalten wir eine deutliche Vorstellung aus dem sichtbaren Verhalten eines leichten, sehr biegsamen Stabes oder eines Fadens, der bei a und a' Bleikugeln

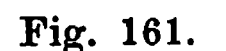
Begreiflicher Weise gilt dasselbe Verhalten für jeden andern Körpertheil, der mit den Punkten a und a' in unzertrennlicher Verbindung steht, folglich in dieselbe drehende Bewegung um die Axe c herum versetzt wird. Man kann daher ganz allgemein aussprechen:

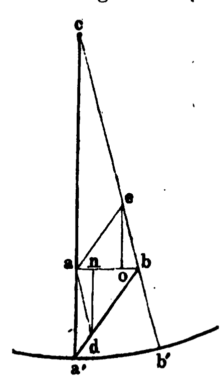
Wenn ein Körper gezwungen ist, sich um eine Axe zu drehen, mit der seine Theile in festem Zusammenhange stehen, so werden zwar verschiedene Punkte desselben, je nach ihrem senkrechten Abstande von der Drehaxe ungleiche Geschwindigkeiten annehmen, die Bögen jedoch, welche sie beschreiben, entsprechen bei allen gleichen Winkelöffnungen, und ihre Geschwindigkeiten dividirt je durch ihre senkrechten Entfernungen von der Drehaxe geben eine und dieselbe beständige Zahl.

Diese Constante u hat eine wirkliche physikalische Bedeutung. Es ist die Geschwindigkeit derjenigen Punkte eines rotirenden Körpers,

---

trägt und, einem Pendel ähnlich, um den Punkt c (Fig. 161) in schwingende Bewegung gesetzt werden kann. Angenommen, ein Druck P wirke gegen die Kugel a, so wird dieselbe durch einen Theil dieses Druckes wirklich in Bewegung gesetzt. Dieser Bewegung folgt jedoch nicht augenblicklich auch die Kugel a'. Man bewirkt, dass eine Biegung $c\,b\,a'$ des Stabes vorhergeht, die in Folge der daraus entspringenden von b nach a', wie von b nach c fortschreitenden, in jedem Punkte entgegengesetzt gleichen Spannung, einem andern Theile des Druckes P Widerstand leistet. Bezeichnen wir mit $a\,b = P'$ den aus dem Biegungswinkel erwachsenden Gegendruck, der folglich für die Bewegung der Kugel a verloren geht, so folgt aus dem Parallelogrammgesetze, dass die nach $b\,a'$ und nach $b\,c$ erzeugten Zugkräfte zu $a\,b$ im Verhältniss der Linien $b\,d$ und $b\,e$ stehen. Der Druck $a\,b = P'$ verwandelt sich also in die Seitenkräfte $b\,d = Q$ und $b\,e = Q'$, von welchen die eine gegen die Kugel a' von a' nach b, die andere gegen den Stützpunkt c gerichtet ist. Q zerfällt bei a' wieder in eine senkrecht gegen $a'c$ gerichtete Componente von der Grösse $n\,b$, welche die Kugel a' durch den Bogen $a'b'$ zu treiben sucht, und in eine entlang der Linie $a'c$ wirksame Componente $n\,d$. Die letztere wird durch eine ihr gleiche aber entgegengesetzte Seitenkraft $o\,e$, welche aus $b\,e = Q'$ hervorgeht, wieder aufgehoben; während die zweite, von Q' abhängige senkrecht auf die Linie $a'c$ gegen den Punkt c gerichtete Componente $o\,b$ in dem Widerstande der Drehaxe ihre Ausgleichung finden muss.


Fig. 161.



Man erkennt aus dieser nähern Analyse des beschriebenen Vorganges, warum der gegen einen beliebigen Punkt eines schwingenden biegsamen Stabes gerichtete Druck seine Wirksamkeit nicht nur gegen alle beweglichen Punkte seiner Masse, sondern auch gegen den Stützpunkt ausbreitet.

Da es keinen Körper giebt, dessen Theile nicht einen gewissen Grad der Verschiebung zuliessen, so lässt sich die aus biegsamen Stäben gezogene Folgerung auch auf solche Körper anwenden, die nur eine geringe, mit blossem Auge vielleicht gar nicht wahrnehmbare Biegsamkeit besitzen. Nur belehren uns die Elasticitätsgesetze, dass der Druck von dem zuerst betroffenen Theile eines Körpers auf entferntere Theile sich um so rascher überträgt, je grösser der gegen die Biegung geleistete Widerstand.

welche sich in einer Entfernung gleich der Längeneinheit von der Drehaxe befinden. Man nennt u die Winkelgeschwindigkeit eines rotirenden Körpers.

Durch Multiplication mit r führt sie zu der Geschwindigkeit $v = r u$ eines Punktes, der sich in einem beliebigen Abstande r von der Drehaxe befindet.

Sehr kurze Strecken einer jeden krummlinigen Bahn lassen sich auf Kreisbahnen zurückführen, sobald man das Krümmungsgesetz derselben kennt und dadurch im Besitz der Hülfsmittel ist, für jedes Bahnelement den entsprechenden Krümmungshalbmesser aufzusuchen. Der Begriff der Winkelgeschwindigkeit kann folglich auch auf solche krummlinige Bewegungen der Körper angewendet werden, welche, wie z. B. elliptische, von der Kreisbahn abweichen; mit der Einschränkung allerdings, dass eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit nur so lange Geltung hat, als es gestattet ist, die beschriebenen Bogenlängen verschiedener Punkte des rotirenden Körpers mit Kreisbögen zu verwechseln, welche je denselben Halbmessern angehören.

196 Alle diejenigen Theilchen eines rotirenden Körpers, welche in gleichen Entfernungen um die Axe herum etwa in einem kreisförmigen Ringe vertheilt sind, besitzen eine gleiche Geschwindigkeit v. Nennt man p die Summe ihrer Massentheile, so ist $p v^2$ ihre lebendige Kraft. Ebenso ist $p' v'^2$ die lebendige Kraft einer andern Summe p', in gleichen Abständen um die Drehaxe mit der Geschwindigkeit v' rotirender Massentheile. Angenommen, beide lebendigen Kräfte seien gleich gross, also $p v^2 = p' v'^2$, so wird es für die eine wie die andere desselben Arbeitsmaasses bedürfen, sei es um sie zu erzeugen, sei es um sie wieder zu zernichten.

Wenn wir nun noch die weitere Bedingung setzen, dass die beiden Massen p und p' Bestandtheile desselben rotirenden Körpers bilden, so müssen auch ihre Winkelgeschwindigkeiten gleich, also

$$v = r u \quad \text{und} \quad v' = r' u$$

sein. Es ist daher, indem diese Werthe von v und v' in obige Gleichung eingesetzt werden,

$$p r^2 u^2 = p' r'^2 u^2,$$

oder auch durch Weglassung des gemeinschaftlichen Factors u^2,

$$p r^2 = p' r'^2.$$

Die Grössen zweier Massen, die vermöge ihrer Lage zu der Drehaxe, bei gleicher Winkelgeschwindigkeit auch gleiche lebendige Kräfte gewinnen, verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Axe.

Mit Beziehung auf die erforderliche Arbeit, um diesen ungleich grossen Massen p und p' gleiche Winkelgeschwindigkeit einzuflössen, sind sie gleichwerthig. Jede in ihrem Abstande von der Axe genommen kann die andere ersetzen.

197 Das Product, welches erhalten wird, indem man eine Masse p, deren sämmtliche Theile in gleicher Entfernung r von der Drehaxe liegen, mit dem Quadrate dieser Entfernung multiplicirt, heisst: Trägheitsmoment dieser Masse. Also Massen, deren Trägheitsmomente gleich sind, sind gleichwerthig; sie können die eine anstatt der andern gesetzt werden, ohne dass dadurch eine Aenderung in der Winkelgeschwindigkeit des betreffenden rotirenden Körpersystemes vorgeht.

Eine Masse p', welche im Abstande r' dieselbe Bedeutung hat, wie die Masse p im Abstande r, findet man aus Gleichung $p' r'^2 = p r^2$ durch Division mit r'^2. Es ergiebt sich

$$p' = \frac{p r^2}{r'^2}.$$

Setzt man $r' = 1$, so wird $p' = p r^2$, also gleich dem Trägheitsmomente selbst. In gleicher Weise kann jedes Trägheitsmoment als eine Masse betrachtet werden, die, in der Entfernung $= 1$ um die Drehaxe vertheilt, dieselbe Bedeutung hat, welcher einer beliebigen Masse p in ihrem Abstande r zukommt.

Jedes Massentheilchen eines rotirenden Körpers besitzt ein Trägheitsmoment, das durch eine seiner Grösse gleiche Masse im Abstande $= 1$ von der Drehaxe vertreten werden kann. Die Summe der Trägheitsmomente sämmtlicher Theile dieses Körpers bestimmt folglich die Grösse einer Masse M, welche im Abstande $= 1$ von der Drehaxe, in einem Punkte oder auch in einem Radreifen verdichtet gedacht, gleichen Werth hat mit den im Raume des betreffenden Körpers wirklich vorhandenen aber in sehr verschiedenen Entfernungen von der Axe vertheilten Massentheilchen.

Man nennt M das Trägheitsmoment des betreffenden Körpers.

Nach der Begriffsentwickelung des Trägheitsmomentes ist übrigens

$$M = p z^2.$$

D. h. die wirkliche Masse eines Körpers, bezogen auf eine bestimmte Drehaxe, kann durch jede beliebige Masse p, wofür unter andern auch seine Gewichtsmasse gelten darf, vertreten werden, sobald sich diese nur in dem Abstande $z = \sqrt{\frac{M}{p}}$ von der Drehaxe anbringen lässt. Man nennt $p = \frac{M}{z^2}$ die an den Punkt z reducirte Masse eines rotirenden Körpers.

198 Da wir durch Vermittlung des Trägheitsmomentes nunmehr im Stande sind, die Masse zu bestimmen, die bei einem rotirenden Körper in einer beliebigen Entfernung z von der Drehaxe gleichsam in einem Punkte concentrirt ist, so lässt sich jetzt auch die Beschleunigung ableiten, welche dieser Punkt unter dem Eindrucke einer Kraft P erfahren wird.

Befinden sich mehrere Kräfte an verschiedenen Punkten des rotirenden Körpers in Angriff gesetzt, so bedeutet die Summe ihrer statischen Momente eine Kraft P, welche im Abstande 1 von der Drehaxe, oder an dem Hebelarme 1 angreifend, sämmtliche vorhandene Kräfte vertreten kann. Es ist folglich die Beschleunigung eines Punktes in der Entfernung 1 von der Axe

$$c = g \frac{P}{M}.$$

D. h. die Beschleunigung eines unter dem Trieb verschiedener Kräfte rotirenden Körpers, bezogen auf einen Abstand von der Drehaxe gleich der Längeneinheit, ist gleich der Beschleunigung der Schwere, multiplicirt mit dem Quotienten der Summe der statischen Momente der Kräfte, dividirt durch die Summe der Trägheitsmomente sämmtlicher unter gleicher Winkelgeschwindigkeit rotirender Massen.

Die gleichzeitige Beschleunigung irgend eines andern Punktes desselben rotirenden Systemes, bezogen auf den Abstand z findet sich dann

$$c z = g z \frac{P}{M}.$$

Kennt man die Winkelgeschwindigkeit u, sowie das Trägheitsmoment M einer rotirenden Masse, so ist ihre lebendige Kraft $= M u^2$. Eine Kraft, an welcher Stelle immer des in Rotation zu versetzenden Körpers sie angreifen möchte, hätte, um die Winkelgeschwindigkeit u hervorzubringen, eine der lebendigen Kraft $M u^2$ entsprechende Arbeit zu verrichten.

199 Da allen derartigen Berechnungen die Kenntniss des Trägheitsmomentes vorhergehen muss, so haben wir uns nach Mitteln umzusehen, dasselbe zu bestimmen. Es bieten sich zu diesem Zwecke Rechnung und experimentelle Methoden. Eine der letzteren haben wir sogar schon angewendet, indem wir die träge Masse des beweglichen Theiles der Fallmaschine, reducirt auf die Peripherie ihrer Rolle aufsuchten (Nro. 52). Es bedurfte nur noch die gefundene Masse mit dem Quadrate des Radius der Rolle zu multipliciren, um das Trägheitsmoment zu erhalten. Das Verfahren gründet sich auf eine Anwendung der bekannten (Nro. 45) Gleichung

$$s = \frac{g}{2} \frac{P}{p} t^2, \text{ aus welcher folgt: } p = \frac{g}{2} \frac{P}{s} t^2.$$

Es bedeutet hier p die an den Radius der Rolle reducirte durch einen Druck P beschleunigte Masse. Hatte man z. B. gefunden, dass ein Uebergewicht von 2 Gramm diese Masse binnen 6 Secunden durch einen Raum von 36 pariser Zoll bewegte, so ist, da $g = 360$ pariser Zoll,

$$p = \frac{360}{2} \cdot \frac{2}{36} (6)^2 = 360 \text{ Gramm}.$$

Das wirkliche Gewicht der Rolle ist nicht unbeträchtlich grösser. Denn die der Axe näher liegenden Theile nehmen eine geringere Beschleunigung an, und vermindern deshalb, an die Peripherie reducirt, ihre Bedeutung im umgekehrten Verhältnisse zum Quadrate ihres Abstandes.

Dasselbe oder ein ähnliches Verfahren würde in zahlreichen anderen Fällen brauchbar sein, wenn der betreffende Körper um eine durch seinen Schwerpunkt gelegte Axe in Rotation versetzt werden kann.

Bei solchen Körpern, die um ihre Drehaxe eine hin- und herschwingende Bewegung annehmen können, lässt sich das Trägheitsmoment aus der Schwingungszeit ableiten. Hiervon kann jedoch erst später ausführlicher die Rede sein.

Durch das Versuchsverfahren wird das Trägheitsmoment eines rotirenden oder schwingenden Körpers gefunden, ganz abgesehen von seiner äussern Gestalt und innern Beschaffenheit. Die experimentellen Methoden, besonders die der Schwingungen, sind daher sehr werthvoll. In häufigen Fällen die einzig verwendbaren, bieten sie in allen Fällen eine sehr zuverlässige Controle.

200 Berechnen lässt sich das Trägheitsmoment nur von solchen rotirenden Körpern, deren Gestalt geometrisch bestimmbar und deren Rauminhalt mit gleichartigem Stoffe ausgefüllt ist. Diese Rechnungen, um nicht weitläuftig und schwerfällig zu werden, lassen sich jedoch nur mit Hülfe der höheren Analysis ausführen. Bevor wir uns zu einigen der praktisch wichtigsten derselben wenden, deren Lösung überdies einfach ist und eine nützliche Uebung bietet, müssen wir einen Lehrsatz kennen lernen, der sich auf alle Trägheitsmomente bezieht und die Berechnung derselben in der Mehrzahl der Fälle sehr vereinfacht und abkürzt.

Angenommen, das Trägheitsmoment eines Körpers, bezogen auf eine Axe, die durch seinen Schwerpunkt geht, sei bekannt und $= M$. Diese Zahl bedeutet die Grösse einer trägen Masse im Abstande $= 1$ von der Drehaxe, ohne übrigens Näheres über die Art ihrer Vertheilung auszusagen. In der That ist diese bei einer trägen, also gewichtslos gedachten Masse völlig gleichgültig, insofern nur sämmtliche Theile gleichweit von der Axe entfernt liegen, mithin, um gleiche Beschleunigungen zu gewinnen, ihren Grössen proportionale Kraftantheile bedürfen. Diese Folgerung bleibt geltend, wenn wir uns die Masse M in den Abstand l reducirt denken, so dass

$$\frac{M}{l^2} = p$$

$=$ dem wirklichen Gewichte des Körpers. Es ist die Annahme gestattet, dass p auf beiden Seiten des Schwerpunktes s (Fig. 162 a. f. S.) gleichmässig und in gleichem Abstande von s vertheilt sei, so dass, wenn $as = bs = l$, die Hälfte von p bei a, die andere Hälfte bei b seinen Sitz hat. Mit Beziehung auf den Schwerpunkt ist daher

$$M = \frac{1}{2}p\,(as)^2 + \frac{1}{2}p\,(bs)^2 = p\,l^2.$$

Angenommen jetzt, das Trägheitsmoment der Masse p soll auf eine andere Axe cc' bezogen werden, die mit der frühern gleichlaufend ist, von ihr um die Länge $cs = a$ entfernt und mit den Punkten a, s und b in derselben Ebene liegt, so ist dieses neue Trägheitsmoment

Fig. 162.

$$M' = \tfrac{1}{2} p\,(ac)^2 + \tfrac{1}{2} p\,(bc)^2$$
$$= \tfrac{1}{2} p\,(a - l)^2 + \tfrac{1}{2} p\,(a + l)^2$$
$$= p\,l^2 + p\,a^2.$$

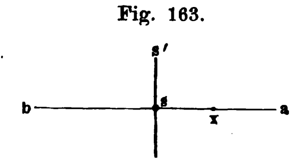
Das Trägheitsmoment eines Körpers, bezogen auf eine beliebige Axe cc' kann also bestimmt werden, indem man zu dem, auf eine mit cc' gleichlaufende durch den Schwerpunkt des Körpers gelegte Axe ss', bezogenen Trägheitsmomente $M = p\,l^2$, die Gewichtsmasse des Körpers, multiplicirt mit dem Quadrate des winkelrechten Abstandes beider Axen von einander addirt.

Unsere vorherige, zum Zwecke der Rechnung nothwendige Annahme, dass die Punkte a und b in der durch die Axen cc' und ss' gebildeten Ebene liegen müssen, lässt die Allgemeingültigkeit vorstehender Regel unberührt, da man volle Freiheit hat, die Sitze der beiden Hälften des Gewichtes p in der durch Rotation der Punkte a und b um die Axe ss' erzeugten Kreisperipherie, wohin man will zu verlegen.

Wir schreiten nunmehr zur Berechnung der Trägheitsmomente von einigen der wichtigeren geometrisch gestalteten Körper.

201 **Trägheitsmoment eines geraden, dünnen Stabes.** Wenn ein Stab, ein Draht, ein Faden so dünn ist, dass sein übrigens allenthalben gleich gedachter Querschnitt fast mit einem physikalischen Punkte verwechselt werden darf, so ist die Grösse seines Trägheitsmomentes wesentlich nur von seiner Länge abhängig.

Fig. 163.



Durch den Schwerpunkt eines derartigen Körpers werde eine Drehaxe ss' (Fig. 163) winkelrecht zur linealen Richtung gelegt, und es sei $as = bs = \frac{l}{2}$.

Der materielle Punkt dx im Abstande $sx = x$ von der Drehaxe besitzt das Trägheitsmoment $x^2\,dx$. Der Integralwerth dieses Ausdruckes, auf beiden Seiten der Axe und zwischen den Gränzen $x = o$ bis $x = \frac{l}{2}$ genommen, ist

$$M = 2\int x^2\,dx = \frac{2\,x^3}{3} = \frac{2\,x\,.\,x^2}{3};$$

also für $x = \frac{l}{2}$ wird $M = \frac{l \, . \, l^2}{3 \, . \, 4} = l \, \frac{l^2}{12}$,

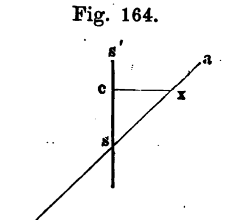
oder auch, da der Factor l das Gewicht der Linie vorstellt,

$$M = p \, \frac{l^2}{12}$$

gleich dem wirklichen Gewichte des Stabes, multiplicirt mit dem Quadrate seiner Länge, dividirt durch 12.

202 Wenn die Linie $a b$ mit der Axe einen Winkel $s' s a = \alpha$ (Fig. 164) bildet, so ist die Entfernung eines Stabelementes $d x$ von der Axe nicht mehr $s x = x$, sondern $c x = x \sin \alpha$. Sein Trägheitsmoment wird daher

Fig. 164.



$$= d x \, . \, x^2 \sin^2 \alpha.$$

Folglich das Trägheitsmoment der ganzen Linie, in derselben Weise wie vorher bestimmt, verwandelt sich in

$$M = l \, \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{12} = p \, \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{12}.$$

Für $\alpha = 90^0$ kommen wir auf den vorhergehenden Fall zurück, und für $\alpha = 0$ verschwindet M. Dies will sagen, dass die Linie, selbst als Axe genommen, (da sie nach Annahme, ausser der linearen keine andere Erstreckung hat), kein Trägheitsmoment besitzt.

Wird die Axe mit sich selbst parallel an das eine oder andere Ende der Stange verlegt, so entsteht zwischen diesen beiden Lagen die Entfernung

$$\frac{l \sin \alpha}{2}.$$

Das veränderte Trägheitsmoment ist folglich

$$M = l \, \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{12} + l \, \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{4} = l \, \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{3} = p \, \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{3}.$$

Derselbe Werth von M behauptet sich aber auch, wenn die Axe nicht an einem der Punkte a oder b, sondern überhaupt nur in die senkrechte Entfernung $\frac{l \sin \alpha}{2}$ und parallel mit $s s'$ verlegt worden ist. Es giebt also zahllose Stellungen der Axe zu der Linie $a b$, welche den Bedingungen der Gleichung genügen. Alle haben jedoch das mit einander gemein, dass sie entlang einer Cylinderoberfläche liegen, deren Radius $= \frac{l \sin \alpha}{2}$, und deren Cylinderaxe mit der durch den Schwerpunkt des Stabes gelegten Drehaxe zusammenfällt.

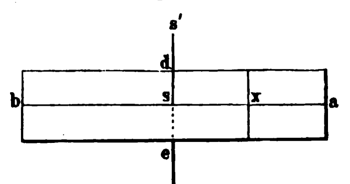
203 **Trägheitsmoment einer dünnen, ebenen Scheibe, von der Gestalt eines rechtwinkligen Vierecks.** Es sei $a b = l$ die Länge, $d e = b$ die Breite dieser Scheibe. Eine durch ihren Schwerpunkt s (Fig. 165 a. f. S.) gelegte Drehaxe stehe senkrecht auf der Scheibenfläche. Das

Trägheitsmoment eines kleinen Segmentes von der Länge de und Breite dx, parallel mit der Linie de und im Abstande $sx = x$ von der Drehaxe befindlich, hat (nach Nro. 200) den Werth:

$$b \cdot dx \left(\frac{b^2}{12} + x^2\right),$$

indem man $b \cdot dx$ als sein Gewicht ansieht. Das Integral dieses Ausdruckes, auf beiden Seiten der Axe und zwischen den Gränzen $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2} l$ genommen, ist

Fig. 165.



$$= 2 \int b \cdot dx \left(\frac{b^2}{12} + x^2\right)$$

$$= 2b \left(\frac{b^2 x}{12} + \frac{x^3}{3}\right).$$

Hieraus folgt, sobald $x = \frac{l}{2}$ gesetzt wird, das Trägheitsmoment der Scheibe

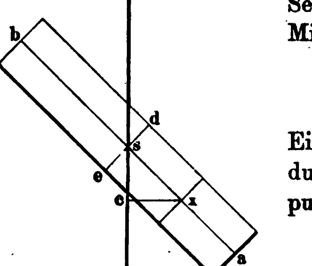
$$M = 2b \left(\frac{b^2 l}{2 \cdot 12} + \frac{l^3}{8 \cdot 3}\right) = 2bl \frac{b^2 + l^2}{2 \cdot 12},$$

und indem man bedenkt, dass der Flächeninhalt bl hier das Gewicht p der Scheibe bedeutet:

$$M = p \frac{b^2 + l^2}{12}.$$

Wenn die Axe ss' (Fig. 166) in die Ebene der Scheibe fällt, mit sd aber den Winkel $s'sd = \alpha$ bildet, so ist das Trägheitsmoment des sehr schmalen Segmentes $de \cdot dx$ oder bdx, durch dessen Mittelpunkt s die Axe geht,

Fig. 166.



$$= b\,dx \frac{b^2 \sin^2 \alpha}{12} \text{ (Nro. 202).}$$

Ein gleiches Segment, das parallel mit ed durch den Punkt x geht, und dessen Schwerpunkt x in der Entfernung

$$cx = sx \cdot \sin (csx) = x \cos \alpha$$

von der Axe liegt, hat das Trägheitsmoment

$$b \cdot dx \left(\frac{b^2 \sin^2 \alpha}{12} + x^2 \cos^2 \alpha\right).$$

Der Integralwerth auf beiden Seiten der Axe genommen ist daher

$$= 2 \int b\,dx \left(\frac{b^2 \sin^2 \alpha}{12} + x^2 \cos^2 \alpha\right),$$

$$= 2b \left(\frac{b^2 \sin^2 \alpha\, x}{12} + \frac{x^3 \cos^2 \alpha}{3}\right).$$

Folglich wenn wieder $x = \frac{l}{2}$ gesetzt wird,

$$M = 2bl\left(\frac{b^2 \sin^2\alpha}{2\,.\,12} + \frac{l^2 \cos^2\alpha}{3\,.\,8}\right)$$
$$= p\,\frac{b^2 \sin^2\alpha + l^2 \cos^2\alpha}{12}.$$

Für $\alpha = 0$, d. h. wenn die Drehaxe ss' mit der Linie de zusammenfällt, wird

$$M = \frac{p\,l^2}{12},$$

für $\alpha = 90^0$, d. h. wenn die Drehaxe mit der Linie ab zusammenfällt, wird

$$M = \frac{p\,b^2}{12}.$$

Das Trägheitsmoment der Scheibe unterscheidet sich in diesen beiden Fällen von dem einer geraden Linie, die in ihrem Schwerpunkte von der Axe senkrecht durchschnitten wird, nur durch das grössere Gewicht.

204 Ein rechtwinkliges Parallelopipedon kann man sich durch symmetrisches Aufeinanderlegen einer Reihe gleich grosser rechtwinkliger Scheiben, jede von der Dicke dx, entstanden denken. Geht die Drehaxe durch den Schwerpunkt eines solchen Körpers, und zwar wie in Fig. 166 parallel mit der Ebene der Scheiben, so ist das Trägheitsmoment einer Scheibe, die sich im Abstande x vom Schwerpunkte befindet, und deren Gewicht durch ihren cubischen Inhalt $b\,.\,l\,.\,dx$ dargestellt werden mag,

$$= b\,l\,dx\left(\frac{b^2 \sin^2\alpha + l^2 \cos^2\alpha}{12} + x^2\right).$$

Das vollständige Integral dieses Ausdruckes, zwischen den Gränzen $x = 0$ bis $x = \frac{h}{2}$, oberhalb und unterhalb der Axe genommen, dann $x = \frac{h}{2}$ und $blh = p$ gesetzt, führt zu dem Trägheitsmomente eines rechtwinkligen Parallelopipedons, mit Beziehung auf eine Axe, die gleichlaufend mit der Seitenfläche lb durch den Schwerpunkt gelegt ist:

$$M = p\,\frac{b^2 \sin^2\alpha + l^2 \cos^2\alpha + h^2}{12}.$$

Diese Gleichung verwandelt sich für $\alpha = 0$, d. h. wenn die Axe mit einer Seitenfläche parallel läuft und eine andere winkelrecht durchschneidet, in

$$M = p\,\frac{l^2 + h^2}{12}.$$

205 **Trägheitsmoment einer dreieckigen Scheibe.** Nehmen wir zuerst an, die Drehaxe ss' (Fig. 167 a. f. S.) berühre nur ein Eck c der Figur, und zwar gleichlaufend mit der Basis ab. Es sei $ab = c$, $ch = h$, $cx = x$, so ist, weil $de : cx = ab : ch$, also $de : x = c : h$, die mit ab parallele Linie

$$de = \frac{c\,.\,x}{h},$$

folglich $$dM = \frac{cx}{h}\, dx \,.\, x^2,$$

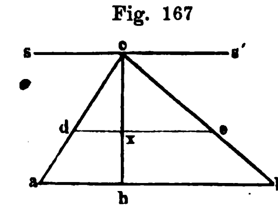


Fig. 167

und zwischen den Gränzen $x = 0$ bis $x = h$, das Trägheitsmoment der Scheibe, deren Flächeninhalt als Repräsentant des Gewichtes $p = \frac{c \,.\, h}{2}$,

$$M = \frac{c}{h} \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{c \,.\, h}{2 \,.\, 2} h^2 = \frac{p}{2} h^2.$$

M hat genau denselben Werth, wie wenn die Hälfte vom Gewichte der Scheibe in der Basis ab verdichtet wäre.

Die Gleichung lehrt ferner, dass die Trägheitsmomente verschiedener Dreiecke bei gleicher Höhe sich wie ihre Gewichte oder Flächeninhalte verhalten.

Der Schwerpunkt des Dreiecks liegt, von c aus gerechnet, in dem Abstande $^2/_3\, h$. Wäre das Trägheitsmoment $p z^2$, bezogen auf eine durch den Schwerpunkt gleichlaufend mit ss' geführte Axe bekannt, so würde daraus durch Hinzufügung des Werthes $p\, (^2/_3\, h)^2$ das Trägheitsmoment bezogen auf den Punkt c und die mit der Basis gleichlaufende Axe ss' abgeleitet werden können. Es ist folglich

$$p z^2 + {}^4/_9\, p h^2 = {}^1/_2\, p h^2,$$

also

$$p z^2 = p h^2 \left(\frac{9 - 8}{18}\right) = {}^1/_{18}\, p h^2.$$

Bezogen auf die Basis ab (Fig. 167) als Drehaxe findet man in ähnlicher Weise das Trägheitsmoment einer ebenen dreieckigen Fläche,

$$M = p z^2 + p\, (^1/_3\, h)^2 = p h^2\, (^1/_{18} + {}^1/_9) = {}^1/_6\, p h^2.$$

Da das Parallelogramm aus zwei Dreiecken von gleicher Höhe und gemeinschaftlicher Grundlinie gebildet ist, so folgt, dass das Trägheitsmoment eines beliebigen Parallelogrammes, bezogen auf eine seiner Diagonalen als Drehaxe (Fig. 168), noch einmal so gross ist, als dasjenige eines der Dreiecke, welchen diese Diagonale zur Grundlinie dient.

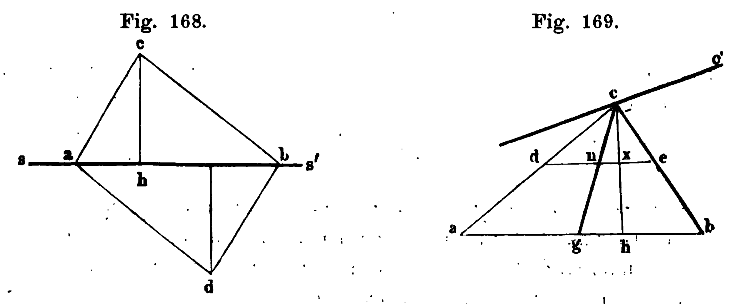


Fig. 168. Fig. 169.

Wenn die Drehaxe durch den Punkt c gehend, auf der Ebene der Scheibe senkrecht steht (Fig. 169), ist die Entfernung eines beliebigen Segmentes $(de)\; dx$ des Dreiecks nicht mehr mit der Höhe $cx = x$ iden-

tisch, sondern es muss dafür die Linie nc gesetzt werden, welche aus der Mitte von de senkrecht gegen die Axe gezogen ist (Nro. 202). Das Trägheitsmoment der Linie de bezogen auf die Axe cc' ist dann

$$= (de)\, dx \left(\frac{(d\,e)^2}{12} + (n\,c)^2\right).$$

Nun ist $de = \frac{c}{h} x$ und $nc = \frac{x}{\sin\alpha}$, wenn Winkel cgb mit α bezeichnet wird. Das Differential des gesuchten Trägheitsmomentes ergiebt sich hiernach

$$d\,M = \frac{c}{h}\, x dx \left(\frac{c^2 x^2}{12\,h^2} + \frac{x^2}{\sin^2\alpha}\right).$$

Zwischen den Gränzen $x = 0$ bis $x = h$ führt es zu dem Integralwerthe

$$M = \frac{c\,.\,h}{4\,.\,12 \sin^2\alpha} (c^2 \sin^2\alpha + 12\,h^2)$$

$$= \frac{p}{2}\, \frac{c^2 \sin^2\alpha + 12\,h^2}{12 \sin^2\alpha}.$$

Wenn die dreieckige Scheibe gleichschenklig ist, wird

$$\alpha = 90^0 \text{ und } M = \frac{p}{2}\, \frac{c^2 + 12\,h^2}{12}.$$

Wird der Quotient der aus der Seite dieses Dreiecks als Radius gebildeten Kreisperipherie, dividirt durch die Basis c eine ganze Zahl $= n$, so kann die Formel auch zur Bestimmung des Trägheitsmomentes des entsprechenden regelmässigen nEcks dienen, sobald man nur für p das Gewicht des nach dieser Figur gestalteten Körpers setzt.

Nimmt man n unendlich gross, so wird die Basis $c = \frac{2\,\pi\,r}{n}$ unendlich klein und verschwindet gegen h, das sich in diesem Falle in r verwandelt. Das betrachtete Vieleck wird zur Kreisfläche und ihr Trägheitsmoment ist

$$M = \frac{p}{2}\, r^2 \text{ (vergl. Nro. 206).}$$

Derselbe Ausdruck giebt das Trägheitsmoment eines Kreisausschnittes, sobald nur für p dessen Gewicht gesetzt wird.

Es ist übrigens leicht einzusehen, dass die Formel

$$M = \frac{p}{2}\, \frac{c^2 \sin^2\alpha + 12\,h}{12 \sin^2\alpha}$$

ihre Geltung nicht verliert, wenn die dünne Scheibe sich in ein dreiseitiges Prisma von beliebiger Dicke verwandelt, dessen eine Kante als Drehaxe gewählt wird. Natürlicher Weise muss dann für p das Gewicht des Prismas gesetzt werden.

Soll die Axe von dem Ecke c auf den Schwerpunkt des Dreiecks übertragen werden, so geschieht dies genau nach der vorher angegebenen Regel, und man findet, bezogen auf eine Axe, die senkrecht gegen die Dreiecksebene durch den Schwerpunkt gelegt ist,

$$p\,z^2 = \frac{3\,c^2 \sin^2 \alpha + 4\,h^2\,p.}{72 \sin^2 \alpha}$$

Um dieses Trägheitsmoment auf die Mitte g (Fig. 169) der Grundlinie ab als Drehpunkt beziehen zu können, hat man nur noch, erwägend, dass der Punkt g vom Schwerpunkte um $^1/_3\,g\,c$ entfernt liegt, den Werth $p \cdot \frac{(g\,c)^2}{9}$ zuzufügen. Da nun $g\,c = \frac{h}{\sin \alpha}$, so folgt das gesuchte

$$M = \left(\frac{3\,c^2 \sin^2 \alpha + 4\,h^2}{72 \sin^2 \alpha} + \frac{h^2}{9 \sin^2 \alpha}\right) p$$

$$= \frac{c^2 \sin^2 \alpha + 4\,h^2}{24 \sin^2 \alpha}\,p.$$

Es ist g (Fig. 170) der Schwerpunkt des Parallelogramms $a\,b\,c\,d$, welches sich aus den Dreiecksseiten $a\,c$ und $b\,c$ ergänzen lässt, und dessen Trägheitsmoment bezogen auf den Punkt g nach demselben soeben gefundenen Ausdrucke bestimmt wird. Nun bedeutet c in dieser Formel die Diagonale $a\,b$. Soll die Dreieckshöhe h als Function von $g\,c$ durch die andere Diagonale ausgedrückt werden, so bemerke man, dass

Fig. 170.

$$g\,c = \frac{c\,d}{2} = \frac{h}{\sin \alpha},$$

folglich $\quad 2\,h = c\,d \sin \alpha = c' \sin \alpha.$

Wird dieser Werth in die Gleichung eingesetzt, so verwandelt sie sich in

$$M = p\,\frac{c^2 + c'^2}{24}.$$

Ist das Parallelogramm rechtwinklig, so wird

$$c = c' \quad \text{und} \quad c^2 = a^2 + b^2,$$

folglich

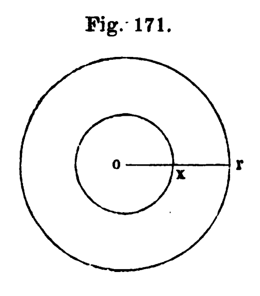
$$M = p\,\frac{a^2 + b^2}{12}.$$

Dies ist der schon früher, auf anderm Wege, entwickelte Ausdruck (Nro. 204).

206 **Trägheitsmoment einer Walze, bezogen auf deren Axe als Drehaxe.** Die Walze lässt sich als eine Uebereinanderlagerung gleichhoher Cylindermäntel auffassen, von denen der eine immer den andern concentrisch umhüllt. Alle Theile eines Mantels befinden sich daher in gleichem senkrechtem Abstande von der Axe, und dieser Abstand ist der Halbmesser der kreisförmigen Basis des Mantels. Der Kreis (Fig. 171) sei ein durch die Axe der Walze senkrecht geführter Querschnitt; die Linie $o\,r = r$ ein Halbmesser des Umfangs; $o\,x$ der Halbmesser eines innern Mantels von der Dicke dx und h die Höhe oder Länge des Cylinders.

Die Masse des Mantels, dessen Radius $o x = x$, beträgt $2 \pi x h . d x$, indem dieser Rauminhalt mit Rücksicht auf die angenommene Gleichartigkeit seines materiellen Inhaltes als Masse in Rechnung gebracht wird. Es ist folglich ein Differential des Trägheitsmomentes, bezogen auf den Punkt o,

Fig. 171.



$$d M = 2 \pi x h \; . \; d x \; . \; x^2$$
$$= 2 \pi h . d x . x^3 = 2 \pi h . d \frac{x^4}{4} .$$

Das Trägheitsmoment der ganzen Walze zwischen den Gränzen $x = o$ bis $x = r$, d. h. indem man den ganzen innern Raum, vom Mittelpunkte bis zum äussersten Umfange hin mit gleichartigem Stoffe ausgefüllt annimmt, erhält demnach den Werth

$$M = 2 \pi h \frac{r^4}{4} = \pi r^2 h \frac{r^2}{2} = p \frac{r^2}{2} .$$

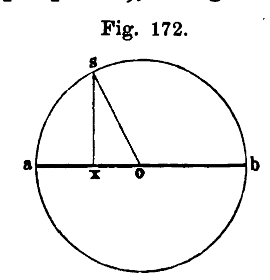
Das Trägheitsmoment einer Walze, Rolle, kreisförmigen Scheibe, die um ihren Mittelpunkt schwingt, ist also gleich dem eines dünnen Radreifes von gleichem Halbmesser, aber nur von der Hälfte ihres Gewichtes.

Das Trägheitsmoment einer hohlen Walze wird gefunden, indem man das der Höhlung, diese mit gleichartigem Stoffe gefüllt gedacht, von dem der ganzen Walze abzieht. Es ist, indem der Radius der Höhlung mit r' bezeichnet wird:

$$M = \pi r^2 h \frac{r^2}{2} - \pi r'^2 h \frac{r'^2}{2}$$
$$= \frac{\pi h}{2} (r^2 - r'^2) \; (r^2 + r'^2) = p \frac{r^2 + r'^2}{2} .$$

Trägheitsmoment eines dünnen kreisförmigen Ringes (Kreisperipherie), bezogen auf einen seiner Durchmesser. 207 In dem Ringe (Fig. 172) sei der Halbmesser $o a = o s = r$, der Bogen $a s = r \varphi$. Ein Element $r . d \varphi$ desselben, das bei s in dem Abstande $s x = y$ von der Drehaxe $a b$ sitzt, hat das Trägheitsmoment

Fig. 172.



$$d M = r \; . \; d \varphi \; . \; y^2 .$$

Mit Beziehung auf den Winkel $a o s = \varphi$, ist $y = r \sin \varphi$, daher

$$d M = r \; . \; d \varphi \; . \; r^2 \sin^2 \varphi$$
$$= r^3 d \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} \right) .$$

Das Integral dieser Differentialgleichung, zwischen den Gränzen $\varphi = o$ bis $\varphi = 2 \pi$ genommen, wird, da $\sin 2 \pi = o$, durch Einsetzung von 2π als Bogen φ,

$$M = r^3 \pi = 2 \pi r \frac{r^2}{2} = p \frac{r^2}{2} .$$

208 **Trägheitsmoment einer kreisförmigen Scheibe, die um einen ihrer Durchmesser schwingt.** Man kann sich die Scheibe aus zahllosen concentrischen Ringen, jeden von der Dicke dx, zusammengesetzt denken. So gelangt man zu dem Differentialausdruck

$$dM = 2\pi x \frac{x^2}{2} dx = \pi x^3 dx,$$

aus welchem in bekannter Weise das Trägheitsmoment der Scheibe

$$M = \frac{\pi r^4}{4} = \pi r^2 \frac{r^2}{4} = p \frac{r^2}{4}$$

hervorgeht. Dieser Werth von M ist nur halb so gross, als der früher gefundene (Nro. 206), bezogen auf eine Axe, die senkrecht durch den Mittelpunkt der Scheibe gelegt war.

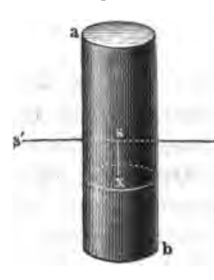
Sollte die Drehaxe parallel mit ab (Fig. 172) in beliebigem Abstand x angebracht werden, so würde das Trägheitsmoment sich verändern in

$$M = \pi r^2 \left(\frac{r^2}{4} + x^2\right).$$

Von der Neigung der Scheibenfläche gegen die Linie x ist dieser Werth unabhängig, so lange der winkelrechte Abstand beider Axen von einander keine Aenderung erfährt.

209 **Trägheitsmoment eines cylindrisch gestalteten Körpers, dessen Drehaxe durch den Schwerpunkt senkrecht gegen die Cylinderaxe gelegt ist.** Es sei ss' (Fig. 173) die durch den Schwerpunkt gelegte Drehaxe. Eine im Abstande $sx = x$ zur Grundfläche parallel liegende Querschnittsfläche hat den Quadratinhalt πr^2 und bildet mit dx multiplicirt ein Element der Cylindermasse, dessen Trägheitsmoment, wie vorher gezeigt worden, durch

Fig. 173.



$$dM = \pi r^2 dx \left(\frac{r^2}{4} + x^2\right)$$

dargestellt werden kann. Hieraus folgt das Trägheitsmoment des ganzen Cylinders, wenn dessen Länge mit l bezeichnet wird:

$$M = \pi r^2 l \frac{3r^2 + l^2}{12} = p \frac{3r^2 + l^2}{12}.$$

Ist der Cylinder hohl und r' der Radius der Höhlung, so findet man aus dem Unterschiede der Trägheitsmomente des gefüllt gedachten Cylinders und der Höhlung, wenn diese ebenfalls gefüllt wäre, das Moment des hohlen Cylinders

$$M = \pi r^2 l \frac{3r^2 + l^2}{12} - \pi r_,^2 l \frac{3r_,^2 + l^2}{12} = \frac{\pi l}{12} \left\{3r^4 + r^2 l^2 - 3r_,^4 - r_,^2 l^2\right\}$$

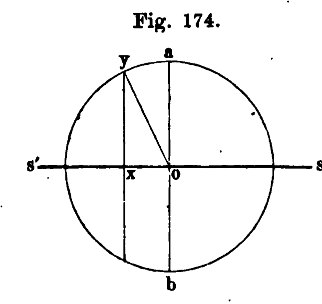
$$= \pi l (r^2 - r'^2) \frac{3(r^2 + r'^2) + l^2}{12} = \frac{3(r^2 + r'^2) + l^2}{12} p.$$

Auf ähnliche Weise wie das Trägheitsmoment eines Cylinders kann auch das eines Kegels berechnet werden, dessen Höhe h und Grundflächendurchmesser $2r$ bekannt sind. Z. B. bezogen auf einen Durchmesser der Grundfläche als Drehaxe, findet man das Trägheitsmoment des Kegels

$$M = p\,\frac{3r^2 + 2h^2}{10}.$$

210 **Trägheitsmoment der Kugel, bezogen auf einen ihrer Durchmesser.** Die Kreisfläche Fig. 174 bezeichne denjenigen grössten Kugeldurchschnitt, welcher die Drehaxe ss' enthält. Es sei $oa = r$ ein Radius des dieser Axe zugehörigen Aequatorialkreises, $xy = y$ der Radius eines Parallelkreises im Abstande $ox = x$ vom Aequator. Der Parallelkreis πy^2 multiplicirt mit dx giebt ein Element der Kugelmasse, dessen Trägheitsmoment bezogen auf ss' beträgt:

Fig. 174.



$$dM = \pi y^2 \,.\, dx\,\frac{y^2}{2};$$

wie weiter oben (Nro. 206) gezeigt wurde.

Nun ist

$$y^2 = r^2 - x^2;$$

daher

$$dM = \frac{\pi}{2}\,dx\,(r^2 - x^2)^2 = \frac{\pi}{2}\,dx\,(r^4 - 2r^2x^2 + x^4)$$

$$= \frac{\pi}{2}\,d\left(r^4x - \frac{2r^2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right).$$

Der Integralwerth auf beiden Seiten des Punktes o und zwischen den Gränzen $x = o$ bis $x = r$ genommen giebt das Trägheitsmoment der Kugel:

$$M = \pi\,(r^5 - {}^2/_3\,r^5 + {}^1/_5\,r^5) = {}^4/_3\,\pi r^3 \,.\, {}^2/_5\,r^2 = {}^2/_5\,p\,r^2.$$

211 Mittelst der vorstehenden Regeln lassen sich die Trägheitsmomente rotirender Körper, auch da, wo die experimentelle Untersuchung nicht thunlich ist, wie bei dem Räderwerke vieler Maschinen, in den meisten Fällen durch Rechnung bestimmen. Freilich haben die so gewonnenen Zahlen, in so weit sie nicht durch das Experiment controlirt werden können, nur die Bedeutung von Annäherungen, weil sie eine Bedingung voraussetzen, die selten genau, und in aller Strenge wohl niemals zutrifft, nämlich Gleichartigkeit in der Dichte der rotirenden Massen.

Aber auch Annäherungswerthe können häufig von grossem Nutzen sein, z. B. beim Betriebe der Maschinen, um die Bedingungen vorauszu-

sehen, unter welchen die Bewegung einen befriedigenden Grad der Gleichförmigkeit annehmen wird.

Das Trägheitsmoment eines Hornhaspels (Nro. 162) bestimmt sich im Wesentlichen durch das seiner Welle. Dieses beträgt $\frac{p}{2} r^2$ (Nro. 206). Es belehrt uns, dass die träge Masse der von der Welle etwa an einem Seile herabhängenden Last noch um die Hälfte vom Gewichte der Welle vermehrt werden muss, wenn man sich ein annähernd richtiges Urtheil über die Werthigkeit der in Bewegung gesetzten Massen verschaffen will. Für die Frage des Gleichgewichtes zwischen Kraft und Last ist dies freilich ohne Bedeutung. Allein dieses Gleichgewicht knüpft sich nur an ein mittleres Verhältniss, indem die wirkliche Kraftäusserung des Arbeiters beim Betriebe des Haspels, wie wir wissen, von wechselnder Stärke ist und periodisch sogar auf Augenblicke ganz erlischt (Nro. 162). Angenommen, die mittlere Kraft, die aus dem Arbeitsmaasse abgeleitet, als continuirlich thätig sich ergiebt, sei P. Dieselbe besteht jedoch in Wirklichkeit aus einer Summe von Kraftäusserungen, die periodisch weit über P hinaus anwachsen und dann ebenso unter P zurücksinken. In Ermangelung genauerer Erfahrungen über den Gang dieser Aenderungen denken wir uns beispielsweise den Kurbelkreis in vier gleiche Abtheilungen gebracht. In dem ersten und dritten dieser Quadranten, während der Arbeiter, die Handhabe des Krummzapfens fortstossend oder an sich ziehend, unter den günstigsten Verhältnissen arbeitet, betrage der ausgeübte Druck durchschnittlich $^3/_2\, P$, im zweiten und vierten Quadranten dagegen nur $^1/_2\, P$. Die mittlere Geschwindigkeit v der Umdrehung, die dem Gleichgewichte entspricht, wird demnach abwechselnd während ungefähr $^1/_4$ der Umdrehungszeit t beschleunigt und dann wieder während eines gleichen Zeitraumes verzögert. Es sei R der Halbmesser des Kurbelkreises, r derjenige der Welle. Das Moment der Kraft ist abwechselnd $^3/_2\, PR$ und $^1/_2\, PR$. Das der Last bleibt unverändert $= L\,.\,r = PR$.

Da nun das Trägheitsmoment der bewegten Massen, wie vorher gezeigt wurde, durch

$$M = \left(L + \frac{p}{2}\right) r^2$$

ausgedrückt werden kann, so ergiebt sich die Beschleunigung im Abstande R von der Axe, d. h. an der Angriffsstelle der Kraft (Nro. 198):

$$c = g\,R\,\frac{^3/_2\, PR - Lr}{\left(L + \frac{p}{2}\right) r^2} = g\,R\,\frac{^1/_2\, PR}{\left(L + \frac{p}{2}\right) r^2},$$

und die darauf folgende Verzögerung:

$$c_{,} = g\,R\,\frac{^1/_2\, PR - Lr}{\left(L + \frac{p}{2}\right) r^2} = -\,g R\,\frac{^1/_2\, PR}{\left(L + \frac{p}{2}\right) r^2}.$$

Die Werthe von c und $c,$ unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. (Unter L im Nenner hätte man, wo etwas darauf ankommt, z. B. beim bergmännischen Haspel, die Gewichte der Seile und Tonnen einzurechnen.) Die Zunahme der Geschwindigkeit von ihrem kleinsten bis zu ihrem grössten Werthe, oder umgekehrt die Abnahme von diesem zu jenem findet man durch die Multiplication von c mit $\frac{t}{4}\cdot$ Die Schwankungen halten sich also zwischen den Gränzen

$$v - \frac{c \,.\, t}{2 \,.\, 4} \text{ bis zu } v + \frac{c \,.\, t}{2 \,.\, 4}.$$

Die Summe dieser zwei Werthe giebt die mittlere Geschwindigkeit v und ihre Differenz die Schwankung $\frac{c\,t}{4}\cdot$

Nimmt man beispielsweise $R = 57$ Centimeter, $r = 19$ Centimeter, $P = 6{,}4$ Kilo, folglich $L = 19{,}2$ Kilo, $p = 100$ Kilo, die Umdrehungszeit $t = 2{,}44$ Secunden, $\frac{t}{4} = 0{,}61$ und endlich $v = \frac{2\pi R}{t} = 146{,}5$ Centimeter, so wird erhalten

$$c = 90{,}88 \,.\, 57 \frac{{}^1\!/_2 \,.\, 6{,}4 \,.\, 57}{(19{,}2 + 50)\; 19 \,.\, 19} = 5180 \cdot \frac{182{,}4}{25\,000} = 37{,}8,$$

folglich

$$\frac{c \,.\, t}{4} = 37{,}8 \,.\, 0{,}61 = 23{,}0 \text{ Centimeter.}$$

Die Geschwindigkeit schwankt hiernach zwischen den Gränzen von 135 Centimeter bis zu 158 Centimeter um ihren Mittelwerth von 146,5 Centimeter.

Derartige Unregelmässigkeiten in der Bewegung, wenn sie auffallend werden, können Unbequemlichkeiten und selbst Nachtheile zur Folge haben.

Beim Haspelbetriebe z. B. können sie eine raschere Ermüdung des Arbeiters herbeiführen, weil sie periodisch, wenn auch immer nur momentan eine übermässige Anstrengung der Muskeln in Anspruch nehmen. Dieser Nachtheil lässt sich durch Vergrösserung des Trägheitsmomentes vermindern und selbst unfühlbar machen. Es ist klar, dass er nicht stattfinden könnte, wenn die Bewegung ganz unabhängig von der Arbeitsweise des Haspelziehers (vorausgesetzt nur, dass dessen mittlere Kraftäusserung unverändert bliebe) sich gleichförmig erhalten müsste. Dieser Gleichförmigkeit nähert man sich aber durch die Vergrösserung des Trägheitsmomentes.

Ein Blick auf die Formel der Beschleunigung lässt sogleich erkennen, dass c mit dem Anwachsen des Bruchnenners, d. h. mit der Zunahme des Trägheitsmomentes sich verkleinern, und dass also auch die Schwankung in der Geschwindigkeit $\frac{c\,t}{4}$ verhältnissmässig abnehmen muss.

Sollte mit Bezug auf das vorher berechnete Beispiel die Schwankung von 23 auf 5 Centimeter reducirt werden, so hätte man zu setzen:

$$\frac{ct}{4} = 0{,}61 \; . \; c = 5, \quad \text{also} \quad c = 8{,}2 \text{ Centimeter.}$$

Das zur Erzielung dieser Beschleunigung zuzufügende Trägheitsmoment M würde sich dann aus der Gleichung

$$c = 8{,}2 = 90{,}88 \; . \; 57 \, \frac{182{,}4}{25000 + M}$$

bestimmen lassen. Man findet

$$M = 115230 - 25000 = 90230.$$

M bedeutet ein Gewicht oder eigentlich eine träge Masse von 90230 Kilo im Abstande von 1 Centimeter um die Drehaxe vertheilt. Da man indessen bezüglich der Massengrösse eines Trägheitmomentes ganz freie Hand hat, sobald man nur die Grösse des letztern unverändert lässt, so ist es auch gestattet, eine gleichwerthige Masse in beliebigem andern Abstande von der Axe anzubringen. Wählt man dazu die Entfernung von 57 Centimeter, entsprechend derjenigen der Handhabe des Arbeiters, so ist $p = \frac{90230}{57 \, . \, 57} = 28$ Kilo.

Wenn man also zur Befestigungsstelle der Handhabe anstatt der Kurbelstange einen mit der Welle zusammenhängenden Radkranz von 28 Kilo Gewicht und 57 Centimeter Halbmesser wählt, so werden die in unserm Beispiele vorausgesetzten Schwankungen in der Geschwindigkeit bis zu einem fast unmerklichen Betrage vermindert.

212 **Schwungrad.** Ein Rad, das ohne die Gleichgewichtsverhältnisse einer Maschine zu ändern nur dazu dient, die Geschwindigkeit der Drehung möglichst gleichförmig zu erhalten, führt den Namen Schwungrad. Es bildet in dieser Eigenschaft als Regulator der Bewegungen einen sehr wichtigen Bestandtheil vieler Maschinen. So findet man ein Schwungrad fast bei allen stehenden Dampfmaschinen. Es ist aber auch schon wiederholt hervorgehoben worden, dass die auf den Kolben einer Dampfmaschine wirkende Kraft durchaus nicht im richtigen Verhältnisse zu der gleichförmig rotirenden Bewegung steht, zu deren Erzeugung und Erhaltung sie gewöhnlich dienen soll. Hierzu kommt noch, dass in sehr häufigen Fällen der Zutritt des Dampfes in den Dampfcylinder abgeschlossen wird, bevor noch der Kolben nach der einen und andern Seite das Ende seines Weges erreicht hat. Ja man findet sogar Dampfmaschinen, die nur einseitig wirken, d. h. bei welchen der Kolben durch den Dampfdruck nur gehoben, dann aber sich selbst überlassen, also nicht durch die Kraft des Dampfes zurückgeführt wird, ungeachtet der Widerstand der Last fortdauert. In allen solchen Fällen muss das Schwungrad die Fortdauer der gleichförmigen Bewegung vermitteln.

Andererseits giebt es Maschinenvorrichtungen, die bestimmt sind, Lasten, die nur periodisch auftreten oder an Stärke wechseln, zu bewältigen. Wir sehen Derartiges bei den Walzwerken, den Eisenhämmern, den Stampfmühlen u. s. w. Während des Leerganges einer solchen Maschine, d. h. während sie nicht arbeitet, da doch die Einwirkung der Kraft fortdauert, kann eine sehr rasche, die Abnutzung beschleunigende und sogar die Haltbarkeit der Maschine bedrohende Vermehrung der Geschwindigkeit eintreten. Ein richtig construirtes Schwungrad mässigt jedoch die Zunahme, ohne dass darum die Thätigkeit der Betriebskraft in der Zeit des Leerganges verloren geht. Vielmehr wird dieselbe von dem Schwungrade als lebendige Kraft gesammelt, um dieselbe dann für die folgende Arbeit wieder nützlich zu verwerthen.

In welchem Grade eine drehende Bewegung gleichförmig erhalten werden, über welche Gränze hinaus eine Rotationsgeschwindigkeit nicht steigen soll, kann, wie schon im vorhergehenden Paragraphen erläutert wurde, durch die Rechnung im Voraus festgestellt werden. Alles hängt davon ab, dass in dem der Berechnung zu Grunde liegenden Ausdrucke

$$c = g \frac{P}{M} x,$$

in welchem P das statische Moment der Ueberkraft, oder im andern Falle, nämlich dem der verzögerten Bewegung, das Uebergewicht der Last vorstellt, das Trägheitsmoment M so gewählt worden sei, dass ein im Voraus festgesetztes Maximum der Beschleunigung nicht überschritten werden kann. Wenn die zum Betriebe einer Maschine durchaus unentbehrlichen Bestandtheile des Räderwerkes die zu obigem Zwecke erforderliche träge Masse nicht bieten, so pflegt man das Fehlende in Gestalt eines Schwungrades zuzusetzen.

Es kommt gar nicht selten vor, dass Maschinen, die ohne Beihülfe des Schwungrades sich durch die verfügbare Kraft nur schwer im Gange erhalten lassen, vergleichungsweise leicht betrieben werden, sobald man sie mit einem geeigneten Schwungrade versehen hat. So gewinnt es den Anschein, als ob das Schwungrad die Betriebskraft vermehre, und wird auch von dem Unkundigen häufig so aufgefasst. Wir wissen jetzt, dass es nur ein Sammler der Kraft ist, um dieselbe dann zum Zwecke der zu verrichtenden Arbeit richtiger zu vertheilen, als es ohne seine Beihülfe geschehen könnte.

In der Figur 154 (S. 254) sehen wir den Durchschnitt einer Dampfmaschine mit Schwungrad von Gusseisen abgebildet. Um das Trägheitsmoment des letztern kennen zu lernen, ist es nothwendig, jeden seiner Hauptbestandtheile besonders in Betracht zu ziehen. Man hat in dieser Beziehung als wesentlich zu unterscheiden: den Radkranz, die Speichen und die Welle. Die Gewichtsbestimmung dieser Theile ist nur durch Rechnung und nur annäherungsweise ausführbar, aber zu unserm Zwecke auch ausreichend.

Der Radkranz lässt sich als ein hohler Cylinder ansehen, dessen

Gewicht $p = \pi h (r^2 - r'^2) \delta$. Nun ist in unserm Beispiele $r = 100$ Centimeter, $r' = 88{,}5$ Centimeter, die Cylinderhöhe, d. h. die Dicke des Radkranzes $h = 8$ Centimeter, und die Dichtigkeit des Gusseisens, hier gleichbedeutend mit dem Gewichte von 1 Cubikcentimeter Masse, $\delta = 7{,}2$ Gramm. Danach findet man

$$p = 3{,}14 \,.\, 8\,(100^2 - 88{,}5^2)\, 7{,}2 = 392000 \text{ Gramm},$$

oder in Kilogramm ausgedrückt $p = 392$. Wir wollen statt dessen setzen $p = 400$ Kilo und erhalten dann (Nro. 206) das Trägheitsmoment

$$M' = p\,\frac{r^2 + r'^2}{2} = 400\,\frac{100^2 + 88{,}5^2}{2} = 400 \,.\, 8916 = 3566400.$$

Die Welle kann als massiver Cylinder gelten. Ihre Abmessungen sind $r = 12{,}5$ Centimeter, $h = 24$ Centimeter, $\delta = 7{,}2$ Gramm wie vorher. Hiernach ergiebt sich

$$p = \pi r^2 h \delta = 84{,}8 \text{ Kilo},$$

und

$$M'' = p\,\frac{r^2}{2} = 84{,}8 \,.\, \frac{156}{2} = 6625.$$

Die Speichen, welche die Verbindung der Welle mit dem Kranze herstellen, nähern sich ihrem äussern Ansehen nach der parallelopipedischen Form. Ihre Länge beträgt 76 Centimeter, die mittlere Breite 7,5 Centimeter, die Dicke 6 Centimeter. Danach bestimmt sich das Gewicht einer Speiche

$$p = 76 \,.\, 7{,}5 \,.\, 6 \,.\, 7{,}2 = 24\,670 \text{ Gramm} = 24{,}67 \text{ Kilo}.$$

Das Trägheitsmoment eines Parallelopipedons bezogen auf seinen Schwerpunkt ist (Nro. 204)

$$L = p\,\frac{l^2 + h^2}{12} = 24{,}67\,\frac{76^2 + 7{,}5^2}{12}$$

$$= 24{,}67\,\frac{5776 + 56}{12} = 12\,000.$$

Da aber 6 Speichen in Betracht kommen, so haben wir zu setzen $6\,M = 72\,000$.

Die Speichen schwingen jedoch nicht um ihren Schwerpunkt, sondern um eine gleichlaufende Axe in der Entfernung

$$a = \frac{76}{2} + 12{,}5 = 50{,}5 \text{ Centimeter}.$$

Wir haben daher (Nro. 200) zu dem gefundenen Momente von 72000 noch

$$6\,p\,a^2 = 6 \,.\, 24{,}67 \,.\, 50{,}5^2 = 377\,400$$

zuzufügen.

Das Gesammtträgheitsmoment der Speichen bezogen auf die Axe des Schwungrades ist daher

$$M_{\prime\prime\prime} = 449\,400.$$

Diese Zahl würde um 7000, d. h. um noch nicht 0,2 Procent geringer ausgefallen sein, wenn man die Speichen als dünne Stäbe betrachtet hätte, anstatt dieselben als Parallelopipeda in Rechnung zu nehmen.

Die drei berechneten Trägheitsmomente addirt, ergiebt sich nunmehr das des Schwungrades

$$M = M_{,} + M_{,,} + M_{,,,} = 3566400 + 6625 + 377400 = 3950425.$$

Das Gewicht von Welle und Speichen zusammen beläuft sich auf 233 Kilo, also auf mehr als die Hälfte von dem des Kranzes, gleichwohl übersteigt ihr Einfluss auf die Grösse des Trägheitsmomentes kaum $^1/_{10}$ von dem des Kranzes. Insbesondere hätte das der Welle vernachlässigt werden können, ohne dass dadurch ein merklicher Fehler entstanden wäre. Ein Kilo vom Gewichte des Radkranzes erscheint für die Regulirung der Bewegung von grösserer Bedeutung, als das ganze Gewicht der Welle.

213 Die Grösse des Trägheitsmomentes eines zusammengesetzten Räderwerkes steht in Abhängigkeit von den Beziehungen des zusammengesetzten Hebels. Betrachten wir z. B. drei Räder an der Welle die im Eingriffe mit einander stehen (Fig. 175). Es seien R, R' und R'' die Halbmesser der Räder, r, r' und r'' diejenigen der Wellen; mz^2, $m'z_{,}^2$ und $m''z_{,,}^2$ die Trägheitsmomente der drei Systeme, jedes derselben für sich genommen. Die träge Masse der gesammten Maschinerie soll auf den Drehpunkt o des ersten Rades an der Welle bezogen werden.

Fig. 175.

Nun entspricht das Trägheitsmoment des dritten Systems $m''z_{,,}^2$ einer trägen Masse $\frac{m''z_{,,}^2}{R_{,,}^2}$, concentrirt im Punkte c, an welchem das erste und zweite System in einander greifen. Diese Masse wird also durch die am Hebelarme $o'c$ des zweiten Systemes thätige Kraft in rotirende Bewegung gesetzt. Ihr Trägheitsmoment, bezogen auf den Punkt o', ist daher $= \frac{m''z_{,,}^2}{R_{,,}^2} r_{,}^2$. Auf denselben Punkt o' bezieht sich auch das Trägheitsmoment $m'z_{,}^2$. Die auf den Punkt b, an welchem das zweite und erste System zusammenhängen, reducirte Masse ist daher

$$= m''z_{,,}^2 \frac{r_{,}^2}{R_{,,}^2 R_{,}^2} + m'z_{,}^2 \frac{1}{R_{,}^2}.$$

Endlich das Gesammtträgheitsmoment der Maschinerie, bezogen auf die erste Axe:

$$= m''z_{,,}^2 \frac{r_{,}^2 r^2}{R_{,,}^2 R_{,}^2} + m'z_{,}^2 \frac{r^2}{R_{,}^2} + mz^2.$$

Wenn auch bei der Last noch eine träge Masse in Betracht kommt, so ist deren Moment, bezogen auf den Punkt o, wie jetzt leicht zu sehen,

$$= L \frac{r_{,,}^2 r_,^2 r^2}{R_{,,}^2 R_,^2},$$

und muss dem Gesammtträgheitsmomente des Räderwerkes zugefügt werden. Die Summe der statischen Momente von Kraft und Last, bezogen auf den Punkt o, beträgt nach Nro. 163:

$$KR = L \frac{r'' r'}{R'' R'} r.$$

Um die Beschleunigung oder Verzögerung des Punktes a zu bestimmen, hat man daher zu setzen:

$$c = gR \frac{(P - K) R}{m z^2 + m' z_,^2 \frac{r^2}{R_,^2} + m'' z_{,,}^2 \frac{r_,^2 r^2}{R_{,,}^2 R_,^2} + L r_{,,}^2 \frac{r_,^2 r^2}{R_{,,}^2 R_,^2}}.$$

Der Werth c kann eine Beschleunigung oder auch eine Verzögerung vorstellen, je nachdem die an den Hebelarm R der Rolle o reducirte Last L, oder die Kraft K, welche der Last das Gleichgewicht hält, grösser oder kleiner ist als die ebenfalls am Hebelarme R wirksame Betriebskraft P.

Die Grösse des Einflusses, welchen das zweite und dritte Radsystem auf das Trägheitsmoment haben, hängt davon ab, ob die Hebelarme r' und r'' kleiner oder grösser sind als die Hebelarme R' und R''. Der erste Fall tritt bei einem Haspel mit Vorgelege ein; der zweite bei dem Laufsteine einer Mahlmühle. Dieser Stein in Folge der Schnelligkeit seiner Umdrehungen übernimmt daher die Stelle eines Schwungrades.

214 **Schwingungsmittelpunkt.** Aus der Gleichung $c = g \frac{P}{M} x$, in welcher P das statische Moment und M das Trägheitsmoment eines rotirenden Körpers vorstellt, kann die Grösse der Beschleunigung für jeden beliebigen Abstand x von der Drehaxe abgeleitet werden. Einer dieser zahllosen Fälle, die in Betracht kommen können, bietet ein besonderes Interesse. Es ist diejenige Wahl von x, für welche $c = g =$ der Beschleunigung der Schwere wird. Aus

$$c = g = g \frac{P}{M} x \text{ findet man } x = \frac{M}{P}.$$

Die gesuchte Entfernung von der Drehaxe wird bestimmt, indem man das Trägheitsmoment durch das statische Moment dividirt.

Für jeden Körper, der um eine feste Axe, die nicht durch seinen Schwerpunkt geht, drehbar ist, findet sich im Abstande $x = \frac{M}{P}$ ein Punkt, der die erwähnte Eigenschaft besitzt. Man hat ihm den Namen des Schwingungsmittelpunktes oder kürzer des Schwingungspunktes beigelegt.

Da der Schwingungspunkt gleich einem frei fallenden Körper beschleunigt wird, so ist es einleuchtend, dass die an diesen Punkt reducirte Masse des rotirenden Körpers durch dieselbe Zahl ausgedrückt werden muss, wie sein an denselben Punkt reducirtes Gewicht.

Dasselbe lehrt übrigens auch die Rechnung. Denn wenn man das Trägheitsmoment des Körpers bezogen auf seinen Schwerpunkt mit $p z^2$, den Abstand des Schwerpunktes von der Axe mit s, und den Abstand des Schwingungspunktes mit x bezeichnet, so ist

$$\frac{p z^2 + p s^2}{p s} = x,$$

folglich

$$p z^2 + p s^2 = p s x$$

und

$$\frac{p z^2 + p s^2}{x^2} = \frac{p s}{x} = m,$$

gleich dem in den Schwingungspunkt reducirten Gewichte sowohl, wie der in denselben Punkt reducirten Masse.

Die im Schwingungspunkte verdichtet gedachte träge Masse eines Körpers besitzt in der Kreisbahn dieselbe freie Beweglichkeit, wie die im Schwerpunkt verdichtete Masse beim freien Falle. Gleich wie der frei fallende Körper durch eine in der Richtung der Schwere neu hinzutretende Kraft eine Vermehrung seiner Beschleunigung erfährt, die sich zu g verhält, genau wie die Grösse des Kraftzuschusses zum Gewichte des Körpers, so muss auch ein gegen den Schwingungspunkt, tangential zur Kreisbahn gerichteter Druck zu der seiner Grösse entsprechenden vollen Wirksamkeit gelangen. D. h. die Beschleunigung, welche er erzeugt und der bereits vorhandenen zufügt, ist $c = g \frac{P}{m}$, wo m wie oben die in den Schwingungspunkt reducirte Masse vorstellt.

Jeder Druck, der einen rotirenden Körper zwar tangential trifft, aber nicht direct gegen den Schwingungspunkt gerichtet ist, wirkt nur theilweise auf den letztern ein, theilweise wird er von der Axe getragen. Es sei x der Abstand des Schwingungspunktes, a der des Druckpunktes von der Axe, P die Grösse des Druckes, so ist nach dem Hebelgesetze: $P a = P' x$, also die auf den Schwingungspunkt wirksame Kraft

$$P' = \frac{P a}{x}.$$

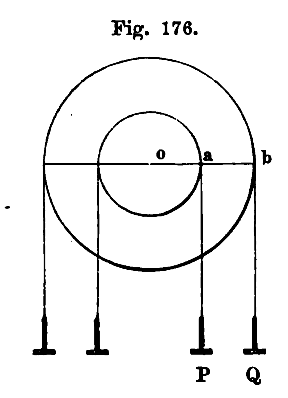
Von der Axe wird folglich aufgenommen

$$D = P - P' = P - \frac{P a}{x} = P \frac{x - a}{x}.$$

Der Druck D kann, ganz so wie es das Hebelgesetz erheischt, einen positiven oder negativen Werth erhalten, je nachdem a kleiner oder grösser wird als x.

Diese Resultate, welche sich aus der Theorie als nothwendige Folge ergeben, können durch eine Abänderung der Fallmaschine auch experimentell anschaulich gemacht werden. Man denke sich das gewöhnliche Rad dieser Maschine durch zwei concentrische Räder (Fig. 176) ersetzt.

Fig. 176.



Der Halbmesser des kleinern sei $oa = 2{,}5$ Pariser Zoll, der des grössern $ob = 5$ Pariser Zoll. Um beide Räder laufen Fäden, an deren Enden kleine Träger (Teller) zur Aufnahme von Gewichten befestigt sind. Diese sind so regulirt, dass die träge Masse auf den Punkt a reducirt im Falle des Gleichgewichtes 1080 Gramm beträgt. Die beschleunigende Kraft eines bei P aufgelegten Uebergewichtes wird folglich im Verhältniss dieser vergrösserten Masse vermindert. Da nun die Beschleunigung der Schwere 360 Pariser Zoll ausmacht, so muss ein bei P aufgelegtes Gewicht von 6 Gramm eine Beschleunigung $c = \frac{360\,.\,6}{1080} = 2$ Zoll*) erzeugen. In der That betrug der Weg, welchen der Teller P in 6 Secunden zurücklegte: $36'' = \frac{c}{2}\,.\,6\,.\,6$, woraus sich ergiebt $c = 2$ Zoll.

Legte man jetzt bei P ein Gewicht von 4 Gramm, bei Q ebenfalls 4 Gramm auf, so ist es gerade so, als seien auf dem Teller P 12 Gramm angebracht worden, denn ein Druck 4 Gramm vom Punkte b auf den Punkt a reducirt, gewinnt hier die Wirksamkeit von 8 Gramm. Wirklich war der vom Teller P in 4 Secunden beschriebene Weg jetzt 32 Zoll, entsprechend einer Beschleunigung von 4 Zoll an dieser Stelle.

Die Geschwindigkeit am Punkte b ist doppelt so gross. Die an diesen Punkt reducirte Kraft beträgt nur 6 Gramm, nämlich $\frac{12\,.\,2{,}5}{5} = 6$, die an denselben Punkt reducirte Masse

$$\frac{1080\,.\,2{,}5^2}{5^2} = 270.$$

Die bewegende Kraft erscheint also nur halb so gross, die träge Masse aber bis zu $^1/_4$ vermindert, die Beschleunigung des Punktes b muss folglich noch einmal so gross werden, als die des Punktes a.

Man sieht, wie die Festigkeit des Zusammenhangs eine Vertheilung der vorhandenen bewegenden Kräfte an irgend beliebige Punkte eines rotirenden Systems genau in der Art vermittelt, dass die an einen Punkt reducirte träge Masse durch die an denselben Punkt reducirte Kraft ge-

*) Zur Vereinfachung der Rechnung ist unberücksichtigt geblieben, dass durch das aufgelegte Gewicht streng genommen auch die Masse um 6 Gramm vermehrt worden ist.

rade so beschleunigt wird, wie die Bedingung gleicher Winkelgeschwindigkeit erfordert.

Die Summe der statischen Momente der beiden auf den Tellern P und Q angebrachten Gewichte ist $4 \,.\, 2{,}5 + 4 \,.\, 5$. Indem man diesen Werth in das Trägheitsmoment $1080 \,.\, 2{,}5^2$ dividirt, erhält man den Schwingungspunkt

$$x = \frac{1080 \,.\, 2{,}5 \,.\, 2{,}5}{4 \,.\, 2{,}5 + 4 \,.\, 5} = 225 \text{ Pariser Zoll.}$$

Derselbe liegt also in diesem Falle weit ausserhalb des Umfanges des rotirenden Systemes. Die in diesem Punkte, falls er einen wirklichen Bestandtheil des rotirenden Körpers ausmachte, thätige Kraft würde sein:

$$\frac{4 \,.\, 2{,}5 + 4 \,.\, 5}{225} = \frac{30}{225}.$$

Dieselbe legt während der Drehung um einen Bogen φ den Weg $225\,\varphi$ zurück und erzeugt mithin eine Arbeit

$$\frac{30}{225} \cdot 225\,\varphi = 30\,\varphi.$$

Diese einer freithätigen Kraft von $\frac{30}{225}$ Gramm entsprechende Arbeit ist aber eigentlich von den in freier Bewegung gehemmten Kräften, die bei a und b ihren Sitz haben, vollzogen worden. Die eine derselben hat den Weg $2{,}5\,\varphi$, die andere den Weg $5\,\varphi$ beschrieben. Die Summe ihrer Arbeiten ist daher $4 \,.\, 2{,}5\,\varphi + 4 \,.\, 5\,\varphi = 30\,\varphi$. Die beiden Kräfte haben also dadurch, dass sie einen Druck gegen die Axe ausübten, von ihrer Arbeitsfähigkeit nichts verloren, nur ist das Endresultat derselben verzögert worden.

Wenn die Drehaxe eines rotirenden Körpers durch dessen Schwerpunkt geht, so besitzt er keinen Schwingungspunkt, oder derselbe liegt, wenn man will, in unbegränzter Ferne. Eine äussere Kraft, die an beliebiger Stelle dieses Körpers angreift, ohne jedoch zugleich seine Masse zu vergrössern, welche also auf die Lage des Schwingungspunktes ohne Einfluss bleibt, kann auf diesen in unendlicher Ferne liegenden Punkt keinen messbaren Druck ausüben. Die ganze Stärke desselben richtet sich folglich gegen die Axe, welche hier zugleich der Schwerpunkt ist. Hierin liegt der physikalische Grund des bemerkenswerthen Vorganges, von welchem wir schon früher (Nro. 112) mehr in schematischer Form Rechenschaft zu geben versucht haben. Denn jeder ganz frei bewegliche Körper, gegen welchen eine äussere Kraft excentrisch gerichtet ist, da er um den anfangs noch ruhenden, also beziehungsweise gleichsam gestützten Schwerpunkt rotiren muss, ist einem um feste Axe rotirenden Körper, der keinen Schwingungspunkt besitzt, zu vergleichen.

Um die Rotationsbeschleunigung an der Angriffsstelle der Kraft kennen zu lernen, hat man ihr statisches Moment, bezogen auf den Schwerpunkt durch das Trägheitsmoment des rotirenden Körpers, zu

dividiren und mit dem Abstande von dem Schwerpunkte zu multipliciren. Dieser Abstand sei r und die Kraft P, so ist

$$c = gr \frac{Pr}{mz^2}.$$

Bei gleicher Winkelgeschwindigkeit vermehrt sich die Beschleunigung proportional zum Abstande. Bei zunehmender Entfernung der Angriffsstelle der Kraft vergrössert sich aber die Beschleunigung wie das Quadrat der Entfernung. Bei unveränderter Grösse des Druckes P wächst also die Winkelgeschwindigkeit im Verhältniss des zunehmenden Abstandes der Angriffsstelle.

Zwölfter Abschnitt.

Von der Schwungkraft.

215 Die Kreisbewegung ist ein besonderer Fall der Art krummliniger Bewegungen, die man Centralbewegungen nennt (Nro. 31). Sie haben alle das gemein, dass ein zu einem beliebig gewählten Zeitpunkte winkelrecht zum Krümmungshalbmesser seiner Bahn fortschreitender Körper gegen einen bestimmten Punkt, den Centralpunkt, abgelenkt wird. Die Ablenkung kann eine Annäherung zu dem Centralpunkte oder auch eine Entfernung von demselben, oder auch keines von beiden zur Folge haben. Die erste ist von einer Zunahme, die andere von einer Abnahme der Geschwindigkeit begleitet. Bei der Kreisbewegung findet weder Annäherung noch Entfernung statt, und die Geschwindigkeit bleibt unverändert.

Die Ursachen der Ablenkung, so mannigfaltig dieselben ihren letzten Gründen nach sein mögen oder können, umfasst man mit dem Namen Centripetalkraft (Mittelpunktsanziehung), und denkt sich darunter eine Anziehung, welche von dem Centralpunkte gegen einen seine krummlinige Bahn verfolgenden materiellen Punkt (bei Körpern, deren Umfang, verglichen zu der Entfernung des Centralpunktes, gering ist, wollen wir uns darunter einstweilen den Schwerpunkt vorstellen) gerichtet ist. So gehört die Gravitation, welche die Erde sowie die übrigen Körper unseres Planetensystems gegen die Sonne ablenkt, zu den Centripetalkräften. Bei einem Rade, das um seine Axe läuft, bei einer Bleikugel, die man, an einem Faden befestigt, im Kreise herum schwingt, übernimmt die Cohäsion die Rolle der Centripetalkraft.

Sobald ein Körper unter dem Einflusse einer derartigen Kraft dem Centralpunkte näher tritt, oder sich davon entfernt, also in der Richtung der Kraft sich bewegt, verrichtet diese eine Arbeit. Die Geschwindigkeit

muss folglich zunehmen oder abnehmen. Betrug dieselbe z. B. v zu dem Zeitpunkte, da die Bewegung in stetigem Uebergange eine Annäherung zu dem Centralpunkte oder eine Entfernung von demselben zur Folge hatte, bezeichnet man mit s den Unterschied zwischen der anfänglichen und der nach Verlauf einiger Zeit eingetretenen Entfernung beider Punkte, mit P die treibende Kraft und mit p die bewegte Masse, so ergiebt sich das Quadrat der Endgeschwindigkeit (Nro. 47)

$$V^2 = v^2 + 2g\,\frac{Ps}{p}.$$

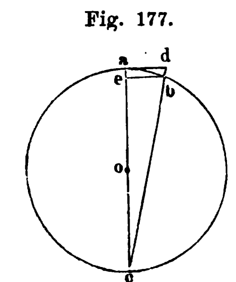
Ist $s = o$, so hat die Centripetalkraft nicht gearbeitet und v bleibt ungeändert. Dies ist der Fall der Kreisbewegung.

Ohne die Einwirkung einer Centripetalkraft würde kein materieller Punkt in der Kreisbewegung auch nur einen Augenblick zu verharren vermögen, sondern er müsste zufolge bereits erhaltener Geschwindigkeit, entsprechend dem Gesetze der Trägheit, sich in der Richtung fortbewegen, die er in dem Augenblicke, da die Anziehung aufhörte, gerade besass. So lange ein Körper der vom Centralpunkte ausgehenden anziehenden Kraft unterworfen bleibt, äussert sich sein Widerstand gegen die Annäherung gleich einer in der Richtung des Radius stattfindenden Abstossung, deren Ursache, obgleich sie nichts Anderes ist, als ein Ergebniss der lebendigen Kraft der rotirenden Masse, gleichsam zur Abkürzung mit dem Namen Schwungkraft oder Centrifugalkraft bezeichnet wird.

Centripetalkraft und Centrifugalkraft führen auch wohl den gemeinschaftlichen Namen Centralkräfte. Sie sind, im Sinne von Druck und Gegendruck, in jedem Augenblicke einander gleich.

216 Eine rotirende Masse p, die unter dem Einfluss einer Centripetalkraft P steht, wird dadurch, ganz unabhängig von ihrer Ausgangsgeschwindigkeit v im Verhältnisse $\frac{P}{p}$ beschleunigt, und muss in Folge dessen während einer Zeit t in der Richtung gegen den Mittelpunkt o (Fig. 177) irgend einen Weg

Fig. 177.



$$ae = \frac{g}{2}\,\frac{P}{p}\,t^2$$

zurücklegen. Vermöge der Geschwindigkeit v würde sie in derselben Zeit und unabhängig von der Centralkraft einen Weg $ad = vt$ beschreiben müssen. Die Mittlere zwischen beiden Wegen ist die wirkliche Bahn der schwingenden Masse. Angenommen nun, die Wirkung der Centripetalkraft sei von der Art, dass die Masse p, welche vermöge ihrer lebendigen Kraft die Kreisbahn in jedem Augenblicke in tangentialer Richtung zu verlassen sucht, durch die Centripetalkraft immer wieder in dieselbe zurückgeführt wird, so ist der Weg ae, um

welchen sich p in Folge der Anziehung dem Mittelpunkte nähert, demjenigen gleich, um welchen derselbe Körper in Folge seiner Geschwindigkeit vom Mittelpunkte entfernt wird. Da nun die Centrifugalkraft der Centripetalkraft gleich ist, so müssen auch ihre gemeinschaftlichen Arbeiten einander gleich sein und sich wechselseitig aufheben, der rotirende Punkt bleibt in der Kreisbahn und seine Geschwindigkeit unverändert.

Errichten wir auf ao die Senkrechte eb, so ist Bogen $ab = vt$, denn dieser Bogen entspricht der Bedingung der Gleichheit des Einflusses der beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte. Nehmen wir t als ein Zeitelement, so entspricht der in dieser Zeit zurückgelegte Weg $ab = vt$ einem Bogenelemente und kann als gerade Linie betrachtet werden. Der Winkel abc ist nach den Eigenthümlichkeiten des Kreises ein rechter; es ist daher

$$ae : ab = ab : ac,$$

folglich

$$ae = \frac{ab \,.\, ab}{ac} = \frac{v^2 t^2}{2r}.$$

Wird dieser Werth von ae dem weiter oben gefundenen gleichgesetzt, so erhält man

$$\frac{g}{2} \frac{P}{p} t^2 = \frac{v^2 t^2}{2r},$$

also

$$P = \frac{v^2 p}{gr}.$$

P bedeutet die Centripetalkraft und folglich auch die ihr gleiche Schwungkraft. Dieser Ausdruck gilt übrigens nicht bloss für die Kreisbahn, sondern lässt sich auch auf andere Centralbewegungen, bei welchen der Abstand vom Centralpunkte sich ändert, anwendbar machen, sobald man nur für das betreffende Bogenelement, für welches die Schwungkraft gefunden werden soll, anstatt r den entsprechenden Krümmungshalbmesser einsetzt.

Wenn die Umlaufszeit T eines rotirenden Punktes bekannt ist, so ergiebt sich daraus die Geschwindigkeit

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

Indem dieser Werth für v genommen wird, erhält man für die Schwungkraft den folgenden abgeänderten Ausdruck

$$P = \frac{4\pi^2}{g T^2} r p.$$

217 Die Schwungkraft erklärt mancherlei Vorgänge, die bei rotirenden Körpern die Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen. So macht sie uns nicht nur verständlich, warum ein Faden, an welchem eine Bleikugel im Kreise herumschwingt, gespannt wird, sondern sie gestattet uns, diese Spannung zu berechnen, denn letztere ist nichts anderes als die in Anspruch genommene elastische Kraft des Fadens, welche (als Centripetalkraft) der Schwungkraft das Gleichgewicht hält.

Hatte man z. B. an einem Faden von 1 Meter Länge ein Gewicht von 50 Gramm angeknüpft, und es so in Rotation gesetzt, dass in jeder Secunde 2 Umläufe erfolgten, so wird, weil $T = 1/2$

$$P = \frac{4 \cdot 3{,}14^2}{9{,}088 \cdot 1/4} 1 \cdot 50 = 866 \text{ Gramm.}$$

Der Faden wird durch einen Druck von 866 Gramm gespannt, durch einen Druck also, der das Gewicht des angehängten Körpers weit übertrifft. Sollte er dadurch reissen, so fliegt der Körper fort mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1}{1/2} = 12{,}56 \text{ Meter,}$$

und in der Richtung der Tangente des Punktes, an welchem er im letzten Augenblicke seiner rotirenden Bewegung gerade angekommen war. Es ist einleuchtend, dass der Gebrauch der Schleuder auf diesem Verhalten beruht.

Wenn man das andere Ende des durch ein rotirendes Gewicht gespannten Faden in geeigneter Weise mit einer Wage, am bequemsten mit einer Federwage in Verbindung setzt, so lässt sich die Stärke der Spannung sogar abwiegen, und so das Ergebniss der Rechnung unmittelbar durch einen Versuch controliren. Jedoch muss zu diesem Zwecke die Drehung in horizontaler Ebene vor sich gehen, damit der störende Einfluss des Gewichtes der rotirenden Masse während des Versuches ausgeschlossen bleibt.

Eine andere Art der Abwägung lässt sich in folgender Weise erhalten. Eine halbkreisförmige, glatte Rinne (Fig. 178) werde auf einem Rotationsapparate, etwa auf der aus den Lehrbüchern der Physik bekannten Schwungmaschine (Fig. 179) bei a senkrecht und so befestigt, dass sie in drehende Bewegung um den senkrechten Halbmesser oa versetzt werden kann. Setzt man dann eine kleine glatte Kugel bei a in die Rinne, so wird dieselbe durch die Rotation in dem einen oder andern

Fig. 178.

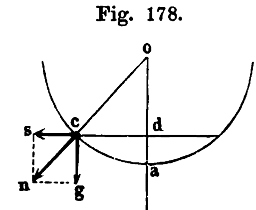
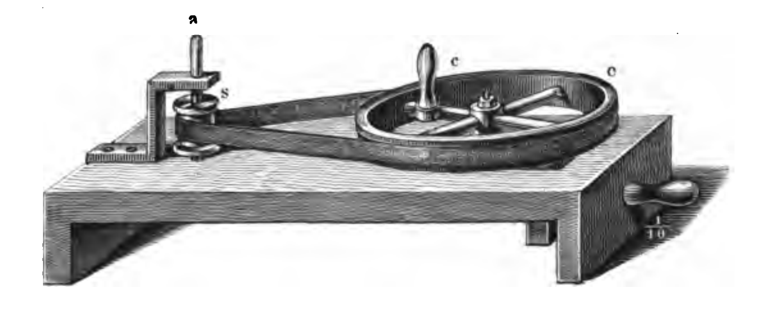


Fig. 179.



Aste emporgetrieben werden, um so höher, je rascher die Umdrehung. Aber immer wird sie, sobald die Bewegung gleichförmig geworden ist, in irgend einer Bogenhöhe stehen bleiben. Angenommen, es sei c dieser Punkt, also $cd = r$ ein Radius des Rotationskreises. Die Schwungkraft P äussert sich in der Richtung dieses Radius von c nach s. Für den Fall des Gleichgewichtes setzt sie sich mit dem Gewichte $p = cg$ der Kugel zu einer Mittelkraft zusammen, deren Richtung den Bogen der Rinne am Punkte c winkelrecht, also nach der Richtung des Halbmessers oc durchschneidet. Aus der bekannten Lage der drei Kräfte cs, cg und cn lässt sich nunmehr, da das Gewicht p ebenfalls gegeben ist, der Werth von P ableiten. In der That, nennen wir Winkel $ncg = noa = \varphi$, so ist, da $P : p = sc : cg$, die Schwungkraft

$$P = \frac{p \,.\, sc}{cg} = p \, tng \, \varphi = \frac{v^2 p}{g r} = \frac{4 \pi^2}{g T^2} p r.$$

Nennen wir $oa = a$, so ist in unserm Falle $r = cd = a \sin \varphi$, daher

$$tng \, \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{4 \pi^2}{g T^2} a \sin \varphi$$

und

$$\cos \varphi = \frac{g}{4 \pi^2 a} T^2.$$

Das Quadrat der Umlaufszeit verhält sich wie der Cosinus des Bogens, zu dem sich die Kugel erheben muss. Da für $\varphi = 90^0$, $\cos \varphi = 0$ wird, so erkennt man, dass es keine Umdrehungsgeschwindigkeit giebt, bei der die Kugel bis zu 90^0 emporsteigen könnte.

Da sich die Schwungkraft aus der Umlaufszeit T und zugleich auch aus dem Bogen φ ableiten lässt, so ist ein Mittel geboten, den berechneten Werth durch einen Versuch zu controliren, also den Druck P gleichsam zu wiegen.

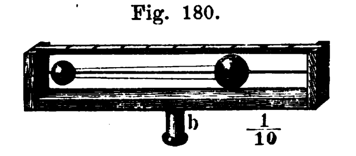
Körper, die bei gleicher Umlaufszeit Kreisbahnen von gleicher Grösse beschreiben, gewinnen Schwungkräfte, die im geraden Verhältniss ihrer Massen stehen. Sind die Kreisbahnen und folglich auch deren Halbmesser von ungleicher Grösse, so verhalten sich die Schwungkräfte wie die Multiplicationsproducte der Massen mit ihren Drehungshalbmessern. Zwei ungleiche Massen bei gleicher Umlaufszeit können also sehr wohl gleiche Schwungkräfte annehmen, wenn ihre Massen sich verhalten umgekehrt wie ihre Abstände von der Drehaxe; oder wenn

$$p r = p' r'.$$

Sobald man sich unter p ein Gewicht denkt, ist mit Beziehung auf die Drehaxe $p r$ sein statisches Moment, und wenn $p r = p' r'$, so ist der Drehpunkt zugleich der Schwerpunkt beider Massen. Man kann daher sagen: Bei gleicher Umlaufszeit erhalten zwei Massen gleiche Schwungkräfte, wenn sie gleiche statische Momente besitzen, oder auch, wenn sie sich um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt drehen.

Setzt man z. B. den bekannten Kugelapparat (Fig. 180) auf die Schwungmaschine und richtet dann die eine Kugel so, dass die Drehaxe durch ihren Mittelpunkt geht, ihr statisches Moment folglich Null wird, so muss sie durch die andere, mittelst eines Fadens damit verbundene Kugel bei einiger Schnelligkeit der Drehung stets fortgerissen werden.

Fig. 180.



Dasselbe wird geschehen, wenn sie sich, sowie die Figur andeutet, zwar auf der andern Seite der Drehaxe befindet, aber das geringere statische Moment besitzt. Erst dann wird Gleichgewicht der Schwungkräfte eintreten, nachdem der Bedingung $pr = p'r'$ vollständig genügt worden ist.

Schwungkraft der Erde und der Planeten. In Folge der täglichen Umwälzung der Erde um ihre Axe gewinnen ihre sämmtlichen Theile, mit einziger Ausnahme der in der Axe selbst liegenden, Schwungkraft. Da sie alle ihre Umdrehung in gleicher Zeit vollenden, so hängt die Grösse der Schwungkraft gleicher Massentheile ausschliesslich nur von der Grösse ihres senkrechten Abstandes von der Erdaxe ab und lässt sich allgemein aus der Gleichung 218

$$P = \frac{4\pi^2 p}{g T^2} r$$

bestimmen.

Die Zeit einer Erdumwälzung ist gleich einem Sternentag (Nro. 12) = 86 164 Secunden. Die Schwere ist eine nicht ganz unveränderliche Grösse (Nro. 44). Setzen wir dafür den unter dem Aequator geltenden Werth $g = 30{,}10$ Pariser Fuss, ferner $4\pi^2 = 39{,}4784$, so wird gefunden:

$$\log P = \log p r - 9{,}7528588.$$

Der Halbmesser des Erdäquators hält 859,437 geographische Meilen = 19 631 770 Pariser Fuss = r.

Die Centrifugalkraft an der Oberfläche der Erde unter dem Aequator beträgt hiernach

$$P = \frac{p}{288{,}33}.$$

Der Halbmesser eines beliebigen Breitegrades wird bestimmt, indem man den des Aequators mit dem Cosinusse der Breite multiplicirt. Die Schwungkraft an der Erdoberfläche in der Breite β ist folglich *)

$$P' = P \cos\beta = \frac{p \cos\beta}{288{,}33}.$$

Die Schwungkraft der Erdtheile in Folge der Axenumdrehung, selbst wenn sie am grössten ist, beträgt doch nur einen sehr kleinen Bruchtheil

*) Wenn man den sehr kleinen Fehler wegen des in der Breite β veränderten Werthes der Schwere unberücksichtigt lässt.

der Schwere. Unter dem Aequator, wo sie der Schwere direct entgegengesetzt ist, vermindert sie dieselbe um $^1/_{288}$ ihres Werthes. Die wahre Beschleunigung der Schwere, sowie sich dieselbe auf einer ruhenden Erde unter dem Aequator geltend machen müsste, mit x bezeichnet, ist

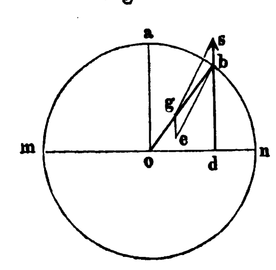
$$30{,}10 = \left(1 - \frac{1}{288{,}33}\right) x,$$

also

$$x = 30{,}204 \text{ Pariser Fuss.}$$

In höheren Breiten sind Schwere und Schwungkraft einander nicht direct entgegengesetzt; denn während die Richtung der einen auf der Erdoberfläche senkrecht steht, fällt die der andern in die Ebene eines Parallelkreises. Es sei *man* (Fig. 181) ein beliebiger Meridian, *ao* ein Halbmesser des Aequators, *bd* der eines Parallelkreises in der Breite $aob = \beta$, so ist *bo* die Richtung der Schwere, *bs* diejenige der Schwungkraft an dem Punkte *b*. Beide Richtungen bilden einen Winkel $obs = 180^0 - \beta$.

Fig. 181.



Was man gemeinhin die Schwere in irgend einer Breite β nennt, ist eine Mittelkraft, zusammengesetzt aus der wahren Anziehungskraft der Erde und der Schwungkraft. Ihre Richtung geht also zwischen der letztern und der wahren Schwere. Es sei *be* (Fig. 181) die noch unbekannte Richtung von dieser. Wir bestimmen sie durch Ergänzung des Parallelogrammes *sbeg*, von welchem die Linien *sb* und *bg* (das Verhältniss der Schwungkraft und der scheinbaren Schwere ausdrückend), sowie der Winkel *sbg*, den diese Linien einschliessen, gegeben sind. Die wirkliche Schwere verhält sich wie die dritte Dreiecksseite $sg = be$ und kann also nach bekannten Regeln berechnet werden (Nro. 85).

Da die Schwungkraft in der Breite β durch die Gleichung

$$P = \frac{4\pi^2 p}{g T^2} r \cos\beta$$

bestimmt ist, so ergiebt sich die ihr entsprechende Beschleunigung an derselben Stelle

$$\frac{gP}{p} = \frac{4\pi^2 r \cos\beta}{T^2} = 0{,}1044 \cos\beta,$$

wofür wir zur Abkürzung c setzen wollen. Die scheinbare Beschleunigung der Schwere g in beliebiger Breite β kann mittelst der schon früher (Nro. 44) mitgetheilten Erfahrungsformel gefunden werden. Somit sind wir im Besitze alles Erforderlichen, um die wahre Schwere x aus der Gleichung (Nro. 85)

$$x = \sqrt{g^2 + c^2 + 2gc \cos(180^0 - \beta)}$$
$$= \sqrt{g^2 + c^2 + 2gc \cos\beta}$$

ableiten zu können. Z. B. unter dem 60. Breitegrade ist $\cos\beta = \frac{1}{2}$; $g = 30{,}225$; $c = 0{,}0522$; daher

$$x = \sqrt{(30{,}225)^2 + (0{,}0522)^2 + 2 \cdot 30{,}225 \cdot 0{,}0522 \cdot \frac{1}{2}}$$
$$= 30{,}251.$$

Der Winkel $gbe = \psi$, welchen die Richtung der wahren mit derjenigen der scheinbaren Schwere bildet, ergiebt sich aus dem Verhältnisse:

$$gs : sb = x : c = \sin\beta : \sin\psi,$$

woraus folgt

$$\sin\psi = \frac{c\sin\beta}{x} = \frac{0{,}1044\sin\beta\cos\beta}{x} = \frac{0{,}0522\sin 2\beta}{x}.$$

In dem angenommenen Falle, da $\beta = 60^0$ und $x = 30{,}251$, findet man $\sin\psi = \sin(0^0, 0', 31'')$. Dieser Winkel bezeichnet die Abweichung der Richtungslinie der wahren Schwere vom Lothe, da die der beobachteten Schwere g natürlicher Weise mit der Lothlinie zusammenfallen muss, und auf der wagerechten Erdoberfläche, auf der Oberfläche des ruhenden Wassers, senkrecht steht. Die erwähnte Abweichung erklärt sich aus der Abplattung der Erde gegen die Pole hin, welche ihrerseits wieder eine Folge der Schwungkraft ist. Denn da diese mit dem Lothe einen Winkel β bildet, so kann man sie in zwei Seitenkräfte $P'\cos\beta$ und $P'\sin\beta$ zerlegt denken, von welchen die erste in die Richtung des Lothes fällt, folglich aufgehoben wird, die zweite aber allem Beweglichen auf der Erde einen Trieb einprägt, gegen den Aequator vorzuschreiten. Dadurch mussten sich, insofern die Erde nicht von Urbeginn ihre gegenwärtige Gestalt besass, insbesondere die flüssigen Massen von den Polen wegziehen und gegen den Aequator vordrängen, so lange bis die Schwerlinie be, Fig. 181, der ruhend gedachten Erde, so weit aus dem Lothe gewichen war, dass die wahre Schwere mit der Schwungkraft eine Resultirende bilden konnte, die auf der nunmehr etwas abgeplatteten Erde senkrecht stand.

Die Abplattung der Erde ist durch geodätische Messungen ausser Zweifel gestellt. Aber auch die Abweichung der wahren Schwere von dem Lothe und die Zunahme des Werthes g vom Aequator gegen die Pole hin geben Zeugniss dafür. Aus dem unmittelbaren Beobachtungswerthe der Beschleunigung der Schwere lässt sich freilich keine sichere Folgerung für die Abplattung der Erde ziehen, da er, wie wir gesehen haben, ein zusammengesetzter Ausdruck ist. Allein die wahre Schwere, die auf einer ruhenden und folglich kugelgestalteten Erde senkrecht stehen müsste, lässt sich daraus ableiten. So geben die oben gefundenen Zahlen 30,204 und 30,251 das Verhältniss der Schwere auf einer ruhend gedachten Erde, unter dem Aequator und unter dem 60. Breitegrade ungetrübt von dem Einflusse der Schwungkraft.

Der Unterschied dieser Zahlen ist freilich nicht unbeträchtlich geringer, als man nach den Werthen g (unter dem Aequator $g = 30{,}10$; unter 60^0 der Breite $g = 30{,}225$) zu vermuthen hätte versucht sein können.

Immerhin zeigt sich ein Unterschied, und da derselbe in allen Fällen in demselben Sinne gefunden wird, und in höheren Breiten zunimmt, so kann er nicht zufällig sein, sondern berechtigt zu der Annahme, dass man sich in hohen Breiten dem Mittelpunkte der Erdanziehung näher befindet, als am Aequator. Ueber den 66° nördlicher Breite hinaus ist die Beschleunigung der Schwere nicht gemessen worden. Aus den Gradmessungen abgeleitet ist der Umfang eines Erdmeridians 5391 geographische Meilen, während der des Aequators 5400 Meilen beträgt. Der Halbmesser des Aequators ist 859 437 Meilen, die halbe Erdaxe 856 564 Meilen, die Abplattung 2,873 Meilen = 65 627 Pariser Fuss.

Ganz auf dieselbe Weise, wie vorher die Schwungkraft der Erdtheile mit Beziehung auf die Erdaxe, lässt sich diejenige der Mondmasse oder eines Theiles derselben mit Beziehung auf die Erde berechnen. Die Umlaufszeit des Mondes beträgt 27 Tage 7 Stunden 42 Minuten = 655,7 . 60 . 60 Secunden; der mittlere Abstand des Mittelpunktes des Mondes vom Mittelpunkte der Erde 60 Erdhalbmesser; daher die Schwungkraft des Mondes

$$P = \frac{4 \,.\, 9{,}8696 \,.\, 19631770 \,.\, 60 \,.\, p}{30{,}10\,(655{,}7 \,.\, 60 \,.\, 60)^2} = \frac{p}{60 \,.\, 60}.$$

Die Beschleunigung des Mondes gegen die Erde vermöge der Gravitation, da sie der durch die Centrifugalkraft erzeugten gleich sein muss, ist 3600mal kleiner als die Schwere. Da der Mond 60 Erdhalbmesser von uns entfernt liegt, so ergiebt sich dasselbe Resultat aus der Voraussetzung, dass die Anziehungskraft zwischen Erde und Mond eine Aeusserung der Schwere sei, und dass die Stärke der letztern sich vermindere umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung.

Durch die Gravitation stehen Erde und Mond in einer unzertrennlichen Verbindung. Durch die Centrifugalkraft des Mondes sind beide Weltkörper einem Zuge ausgesetzt, in Folge dessen der Mond die Erde in jedem Augenblicke nach der geraden Verbindungslinie beider Körper fortzureissen sucht, ähnlich wie die Hand einen Zug empfindet, wenn man einen schweren Körper an einem Faden im Kreise herum schwingt, oder ähnlich wie auf der Schwungmaschine (Nro. 217) eine Kugel, deren Schwerpunkt in die Drehaxe fällt, durch die Centrifugalkraft einer andern, mit jener verbundenen fortgezogen wird.

Das Gleichgewicht zwischen Erde und Mond kann folglich nur dadurch erhalten werden, dass beide sich gleichzeitig um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt drehen, also gleichgrosse Schwungkräfte nach entgegengesetzten Richtungen erhalten. Die Schwungkräfte vertreten hier die Rolle wechselseitiger Abstossungskräfte, welchen durch eine eben so grosse wechselseitige Anziehung fortdauernd das Gleichgewicht gehalten wird.

Dieser Vorgang bietet ein in hohem Grade bemerkenswerthes Beispiel von Kraftäusserungen, die bis zu ihrem Ursprunge verfolgt, nur Bewe-

gungsphenômene sind und sich als unmittelbare Folgerungen aus dem Trägheitsgesetze ergeben, welche aber dessenungeachtet die vollkommenste Analogie mit abstossenden Kräften zeigen, nicht bloss dem äussern Verhalten nach, sondern auch hinsichtlich ihrer Behandlung in der Rechnung.

Die Masse des Mondes beträgt nur etwa $^1/_{88}$ von derjenigen der Erde. Der gemeinschaftliche Schwerpunkt beider Weltkörper fällt daher noch ziemlich tief in das Innere der Erde.

Kepler'sche Gesetze. Die Schwungkräfte der Planeten gegen die Sonne geben uns Aufschluss über die Stärke der wechselseitigen Anziehung der Sonne zu dem einen oder andern der Planeten, denn diese Anziehung muss der Schwungkraft gleich sein. **219**

Nennen wir R die Entfernung des einen Planeten R' die eines andern von der Sonne; so ist die Schwungkraft einer Masse p und folglich auch deren Attractionskraft zur Sonne, bezüglich des einen Planeten

$$P = \frac{4\pi^2 p}{g} \frac{R}{T^2},$$

bezüglich des andern

$$P' = \frac{4\pi^2 p}{g} \frac{R'}{T'^2}.$$

Nach dem Gravitationsgesetze stehen die wechselseitigen Anziehungen der Massen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grössen, und im umgekehrten zum Quadrate ihrer Entfernungen. Es ist demnach, wenn S die Masse der Sonne vorstellt,

$$P : P' = \frac{S \cdot p}{R^2} : \frac{S \cdot p}{R'^2} = R'^2 : R^2.$$

Folglich

$$R'^2 : R^2 = \frac{R}{T^2} : \frac{R'}{T'^2},$$

und

$$\frac{R'^3}{T'^2} = \frac{R^3}{T^2},$$

oder auch

$$R'^3 : R^3 = T'^2 : T^2.$$

Mit Worten ausgesprochen: Die dritten Potenzen der Entfernungen irgend zweier Planeten von der Sonne verhalten sich wie die Quadrate ihrer Umlaufszeiten.

Dies ist das dritte der Erfahrungsgesetze, welche Kepler aus der Bewegung der Planeten abgeleitet, und aus welchen dann Newton durch eine, der vorher angegebenen umgekehrte Reihe von Schlüssen das umfassendere Gesetz der Gravitation gefolgert hat.

Das erste Kepler'sche Gesetz sagt uns, dass die Bahnen der Planeten Ellipsen sind, in deren einem gemeinschaftlichen Brennpunkte die Sonne steht (Nro. 31).

Nach dem **zweiten Gesetze beschreibt der Leitstrahl (Radius vector) der Bahn eines Planeten in gleichen Zeiten immer gleiche Flächen** (Nro. 31).

220 **Masse der Sonne.** Da die Schwungkraft der Erde gegen die Sonne zugleich die Stärke der wechselseitigen Anziehung ihrer Massen ausdrückt, so ist hierdurch ein Mittel gegeben, die Masse der Sonne gegen diejenige der Erde abzuwiegen. Der mittlere Abstand der Erde von der Sonne beträgt 24 000 Erdhalbmesser, die Umlaufszeit der Erde 365 256 $\times$ 86 400 Secunden. Hiernach ist die Centrifugalkraft eines Gewichtes p der Erde

$$P = \frac{4\,\pi^2 (24\,000\,r)\,p}{30{,}10\,T^2} = \frac{p}{1611{,}55}.$$

Ebenso gross ist die Stärke der Anziehung, welche die Sonne gegen die Masse p auf die Entfernung von 24 000 Erdhalbmesser hin ausübt. Die Anziehung der Erde gegen dieselbe Masse an der Erdoberfläche, also auf die Entfernung von 1 Erdhalbmesser vom Mittelpunkte, beträgt p Gramm, auf 24000 Erdhalbmesser Entfernung könnte sie nur $\frac{p}{(24\,000)^2}$ ausmachen. Es ist daher, wenn wir die Masse der Sonne mit S, die der Erde mit E bezeichnen:

$$S : E = \frac{p}{1611{,}55} : \frac{p}{(24\,000)^2},$$

woraus folgt

$$S = \frac{(24\,000)^2 E}{1611{,}55} = 357\,420\,.\,E.$$

Die Grösse der Sonnenmasse lässt sich auch aus einer Vergleichung der Schwungkraft der Erde gegen die Sonne mit derjenigen des Mondes gegen die Erde ableiten. Nennt man die mittlere Entfernung des Mondes, zu 60 Erdhalbmesser angenommen, $= R$, so ist die der Sonne $400\,R$. Da nun die Schwungkraft der Erde

$$P = \frac{4\,\pi^2 p}{g}\,\frac{400\,R}{T^2} = a\,\frac{400\,R}{T^2},$$

die des Mondes

$$P' = \frac{4\,\pi^2 p}{g}\,\frac{R}{T'^2} = a\,\frac{R}{T'^2};$$

da ferner die Anziehung der Erde auf die Masse p, welche im Abstande R beträgt $\frac{p}{R^2} = P' =$ der Schwungkraft des Mondes, sich im Abstande von $400\,R$ bis zu

$$\frac{p}{(400\,R)^2} = \frac{P'}{(400)^2} = a\,\frac{R}{(400)^2\,T'^2}$$

verringern muss, die Massen aber, wenn man ihre Anziehungen zu einer Masse p auf gleichen Abstand bezieht, sich wie die Anziehungen verhalten, so folgt:

$$S : E = a \frac{400\, R}{T^2} : a \frac{R}{(400)^2\, T'^2} = \frac{(400)^3}{T^2} : \frac{1}{T'^2},$$

daher

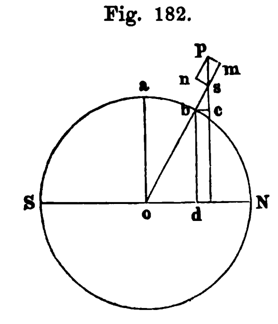
$$S = (400)^3 E \frac{T'^2}{T^2} = \frac{(400)^3\,(655{,}7)^2}{(365{,}256\,.\,24)^2}\, E = 358\,074\, E.$$

Die Massen derjenigen Planeten, welche Trabanten besitzen, können auf ähnliche Weise mit der Sonnenmasse verglichen, und dadurch wieder ihre Verhältnisse zur Erdmasse abgeleitet werden.

221 Die Schwungkraft der Erde wegen der täglichen Umwälzung um ihre Axe ist nicht ganz ohne Einfluss auf den Fall der Körper. Unmittelbar an der Erdoberfläche haben sich zwar Schwere und Schwungkraft zu einer Resultirenden ausgeglichen, deren Richtung (Nro. 217) in das Loth fällt. Bei senkrechter Erhebung ändert sich jedoch sowohl die Grösse wie die Richtung der Resultirenden beider Kräfte, und zwar die letztere im Sinne einer zunehmenden Abplattung der Erde. Eben daraus nun erfolgt ein winkelrecht gegen das Loth und (auf der Nordseite der Erde) südlich gerichteter Druck. Der Betrag der hieraus erfolgenden Abweichung vom Lothe ist jedoch sehr gering, und ein fast verschwindender Bruchtheil der östlichen Abweichung (Nro. 50).

Man denke sich unter dem Kreise (Fig. 182) einen Meridian. In der Breite $aob = \beta$ falle ein Körper aus der Höhe $sb = h$ senkrecht abwärts. Die Centrifugalkraft b ist

Fig. 182.



$$P = \frac{4\,\pi^2 p}{g\,T^2}\, r \cos\beta.$$

Bei s erhebt sie sich, da $sc = h\cos\beta$ auf

$$P' = \frac{4\,\pi^2 p}{g\,T^2}\,(r + h)\cos\beta.$$

Der Unterschied beider Kräfte, der sich zwischen s und b geltend macht, beträgt

$$sp = P' - P = \frac{4\,\pi^2 p}{g\,T^2}\, h\cos\beta.$$

Derselbe lässt sich in die beiden Componenten sn und sm zerlegen, von welchen die letztere in die Schwerlinie fällt, während

$$sn = sp\,.\,\sin\beta = \frac{4\,\pi^2 p}{g\,T^2}\sin\beta\cos\beta\, h = \frac{4\,\pi^2 p}{2\,g\,T^2}\sin 2\,\beta\,.\,h$$

als Druck in der Richtung von b gegen a zur Wirksamkeit kommt.

Die Beschleunigung, die er erzeugt, hat bei beginnendem Fall den Werth

$$g\,\frac{sn}{p} = \frac{4\,\pi^2}{2\,T^2}\sin 2\,\beta\,.\,h = a\,.\,h,$$

vermindert sich aber stufenweise während des Niederganges, so dass sie in jedem Augenblicke der noch übrigen Fallhöhe proportional bleibt, und endlich bei der Ankunft in b verschwindet.

Aus diesen Motiven folgt zunächst, im Augenblicke der Ankunft des fallenden Körpers in einer beliebigen Höhe x, ein Differential der Geschwindigkeit

$$dv = a\,x\,dt,$$

und ferner, da $x = \frac{g}{2}t^2$, zwischen den Gränzen $x = h$ bis $x = o$, die seitliche Geschwindigkeit bei der Ankunft in der Höhe x,

$$v = \frac{a\,g}{2\,.\,3}t^3.$$

Die Abweichung gegen Süden ergiebt sich dann aus der Gleichung $ds = v\,dt = \frac{a\,.\,g}{2\,.\,3}t^3\,dt$, die zwischen denselben Gränzen wie vorher zu dem Ausdrucke führt

$$s = \frac{a\,.\,g}{2\,.\,3\,.\,4}t^4.$$

Statt desselben kann auch gesetzt werden, indem man beachtet, dass, sobald t als die ganze Fallzeit genommen wird, $t^2 = \frac{2\,h}{g}$, und indem für a der oben bestimmte Werth wieder eingesetzt wird:

$$s = \frac{\pi^2 \sin 2\,\beta}{3\,g\,T^2}h^2 = \frac{h^2 \sin 2\,\beta}{67927\ (1000)^2}.$$

Man erkennt leicht, dass die Frage über den Einfluss der Schwungkraft auf den freien Fall der Körper mehr ein theoretisches Interesse, als irgend eine praktische Bedeutung hat. Ein Körper z. B. unter dem 50sten Breitegrade aus 500 Fuss Höhe im leeren Raume herabfallend, würde um 0,005 Linien südlich abgelenkt werden.

222 **Schwungkraft rotirender Massen.** Sämmtliche fest zusammenhängende Theile eines rotirenden Körpers besitzen gleiche Winkelgeschwindigkeit (Nro. 195). Setzen wir dieselbe $= u$ und den Abstand irgend eines materiellen Punktes von der Drehaxe $= r$, so ist seine wirkliche Geschwindigkeit $v = u\,r$. Indem man diesen Werth von v in der Gleichung der Schwungkraft $P = \frac{v^2 p}{g\,r}$ einsetzt, verwandelt sie sich in

$$P = \frac{u^2}{g}\,p\,r.$$

Dieser Ausdruck gilt für jeden beliebigen Punkt einer rotirenden Masse, deren sämmtliche Theile gleiche Umlaufszeit besitzen. Wenn daher in irgend einer geraden Linie, senkrecht von der Drehaxe aus sich erstreckend, verschiedene materielle Punkte vertheilt liegen, deren Gewichte p, p', p'' u. s. w. und deren Abstände von der Axe r, r', r'' u. s. w. sein mögen, so ist die Summe ihrer Schwungkräfte

$$P = \frac{u^2}{g}(p\,r + p'\,r' + p''\,r'' + \cdots)$$

gleich einer Summe von Zugkräften, die sämmtlich nach einerlei Richtung und zwar entlang der betrachteten Linie gehen. Die Werthe pr, $p'r'$ u. s. w. sind als statische Momente anzusehen. Ihre Summe ist folglich gleich dem statischen Momente ihres Schwerpunktes; d. h. gleich der Summe der Massentheilchen, multiplicirt mit dem Abstande ihres Schwerpunktes von der Drehaxe. Setzen wir dafür MR, so ist

$$P = \frac{u^2}{g} MR.$$

Dasselbe gilt für jede andere schwere Linie, die auf der Drehaxe senkrecht steht und zu demselben rotirenden Systeme gehört.

Die Schwungkräfte sämmtlicher materieller Punkte, welche um die Axe vertheilt liegen, kann man sich mit Beziehung auf zwei willkürlich gewählte Coordinatenaxen je in zwei rechtwinklige Componenten zerlegt denken, so dass schliesslich zwei Summen von Zugkräften von der Form

$$P' = \frac{u^2}{g} MR' \quad \text{und} \quad P'' = \frac{u^2}{g} MR''$$

entstehen, deren Richtungen einen rechten Winkel bilden, und welche man wieder als die Componenten einer Mittelkraft

$$P = \sqrt{P_{,}^2 + P_{,,}^2} = \frac{u^2}{g} M \sqrt{R_{,}^2 + R_{,,}^2}$$

ansehen kann (Nro. 89).

Eine gerade Linie, die parallel mit der Axe der x durch den Punkt $R_{,}$ geführt wird, enthält den Schwerpunkt der Gesammtmasse M. Ebenso ist ihr Schwerpunkt in einer Geraden enthalten, die parallel mit der Axe der y durch den Punkt $R_{,,}$ geführt wird; es muss folglich (Nro. 97)

$$\sqrt{R_{,}^2 + R_{,,}^2} = R$$

die Entfernung des Schwerpunktes der Masse M von der Drehaxe sein.

Die Grösse der Schwungkraft einer rotirenden Masse M ist folglich identisch mit derjenigen ihres Schwerpunktes, wenn man sich in diesem die ganze Masse verdichtet vorstellt.

223 Der Ausdruck $P = \frac{u^2}{g} pr$ giebt demnach die Schwungkraft eines jeden rotirenden festen Körpers, sobald man für p dessen Gewicht und für r den Abstand seines Schwerpunktes von der Drehaxe setzt. Geht diese Axe durch den Schwerpunkt selbst, so wird $r = 0$, folglich auch $P = 0$. Dies will sagen, dass die Zugkräfte, welche die rotirenden Körpertheile gegen die Axe ausüben, sich wechselseitig aufheben. Natürlich ist dabei hinlänglicher Zusammenhang der Theile vorausgesetzt, damit ihre Verbindung durch die Gewalt ihres Bestrebens, sich vom Mittelpunkte zu entfernen, nicht gelöst werden kann.

Betrachten wir beispielsweise einen Mühlstein (Läufer) von 0,6 Meter Halbmesser und 960 Kilo Gewicht, der in jeder Minute 120 Umgänge macht, dessen Winkelgeschwindigkeit, d. h. Geschwindigkeit im Abstande von 1 Meter von der Drehaxe, hiernach $\frac{120}{60} 2\pi = 12{,}56$ Meter beträgt. Der Schwerpunkt einer Hälfte desselben befindet sich in dem Abstande $\frac{4}{3} \frac{r}{\pi} = 0{,}424 \,.\, 0{,}6 = 0{,}2544$ Meter von der Mitte. Die Schwungkraft jeder Hälfte ist demnach

$$P = \frac{12{,}56 \,.\, 12{,}56}{9{,}8088} \,.\, 0{,}2544 \,.\, 480 = 1950 \text{ Kilo.}$$

Betrüge die Kraft des Zusammenhanges weniger als diese Zahl, so müssten beide Hälften aus einander reissen.

Das Gewicht eines beliebigen Ausschnittes eines Cylinders ist $p = \frac{\varphi r^2}{2} h \delta$. Angenommen, derselbe drehe sich um seine Cylinderaxe, und es sei n die Anzahl der Umläufe in jeder Secunde, so ist die Winkelgeschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit eines Punktes in der Entfernung 1 von der Axe $u = 2\pi n$. Da nun der Abstand des Schwerpunktes von dem Mittelpunkte $s = \frac{4}{3} \frac{r \sin {}^1\!/_2 \varphi}{\varphi}$, so ergiebt sich der allgemeine Ausdruck für die Schwungkraft eines Ausschnittes

$$P = \frac{4\pi^2 n^2}{g} \,.\, p \,.\, \frac{4}{3} \frac{r \sin {}^1\!/_2 \varphi}{\varphi} = \frac{16 n^2 \pi^2}{3g} p r \frac{\sin {}^1\!/_2 \varphi}{\varphi}.$$

Entspricht der Ausschnitt einem sehr kleinen Bogen, so nähert sich $\sin {}^1\!/_2 \varphi$ dem Werthe ${}^1\!/_2 \varphi$. Setzen wir diesen Annäherungswerth, so ergiebt sich für kleine Ausschnitte eines Cylinders

$$P = \frac{8 n^2 \pi^2}{3g} p \,.\, r = 2{,}683 p r n^2 \, {}^*).$$

Nimmt man z. B. $r = 0{,}5$ Meter, die Bogenlänge des Ausschnittes $r\varphi = 1$ Centimeter, seine Höhe h ebenfalls gleich 1 Centimeter, so wird sein Gewicht $p = \frac{1 \,.\, 50 \,.\, 1}{2} \delta = 25\,\delta$ Gramm, und

$$P = 33{,}54\, \delta n^2.$$

Wäre ein hohler Cylinder von der angenommenen Grösse mit Wasser gefüllt, unter Verhältnissen, dass dieses an der Rotation sich vollständig betheiligen müsste; so würden 6 Umläufe in der Secunde einen Druck von 1200 Gramm auf jeden Quadratcentimeter Fläche der Seitenwand hervorbringen müssen. Durch 10 Umläufe würde sich dieser Druck sogar bis zu 3354 Gramm steigern. Ein Atmosphärendruck entspricht ungefähr 1000 Gramm auf ein Quadratcentimeter Fläche.

---

*) Es ist hier $g = 9{,}8088$ Meter gesetzt, daher muss auch r in Meter ge-

Aus einer cylindrischen, rotirenden Trommel, deren Seitenwand man siebartig mit kleinen Oeffnungen versehen hätte, würde das Wasser, entsprechend dem berechneten Druck, hervorgetrieben werden. Hierauf beruht die Anwendung der Centrifugalkraft zum Filtriren sowie zum Ausringen nasser Zeuge.

224 Jeder Körper, der sich in einer Kreisbahn bewegt, oder in derselben herum getrieben wird, empfindet die Einwirkung der Schwungkraft als einen Druck, der ihn aus der Bahn heraus zu schleudern strebt.

Daher die bekannte Erscheinung, dass ein Pferd auf kreisförmiger Rennbahn gezwungen ist, sich etwas gegen die Mitte der Bahn zu neigen, so weit, dass die Resultirende seines eignen Gewichtes und der Schwungkraft noch zwischen seine Füsse fällt.

Auch unsere Eisenbahnwagen, wenn sie sich über Curven bewegen müssen, gelangen unter den Einfluss der Schwungkraft. Bezeichnen wir mit s den Schwerpunkt eines Wagens und mit $bc = b$ (Fig. 183) die Spurbreite, so wird die Schwungkraft, am Hebelarme $sd = h$ wirksam, den Wagen umwerfen, wenn nicht dessen Standfähigkeit einen genügenden Widerstand bietet. Für die Bedingung des Gleichgewichtes oder vielmehr der äussersten Gränze desselben ist das Moment der Standfähigkeit

$$\frac{p \,.\, b}{2} = P \,.\, h; \quad \text{folglich} \quad P = \frac{pb}{2h}.$$

Fig. 183.

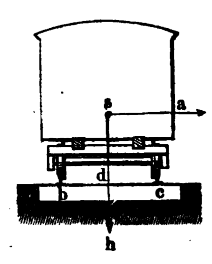
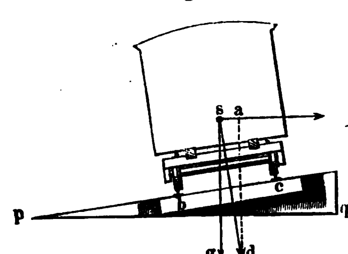


Fig. 184.



In diesem Falle geht die Resultirende beider Kräfte durch den Punkt c, d. h. durch die Schiene an der convexen Seite der Bahn. Die geringste zufällige Erschütterung, begleitet von einem Heben nach dieser Seite, wird dann zur Ursache des Umfallens. Durch Erhöhen der Schiene auf der convexen Seite der Curve kann in solchen Fällen dem Wagen eine gesichertere Stellung gegeben werden. Gesetzt, man will die äussere Schiene so weit heben, dass bei mittlerer Geschwindigkeit v die Resultirende der Schwere und der Schwungkraft in die Mitte der Spurbreite fällt. Es sei (in Fig. 184) $cpq = \alpha$ der Winkel, welchen eine quer über die Schienen gezogene Gerade zu diesem Zwecke mit der wagerechten Linie bilden muss, cb wie vorher die Spurbreite, s der Schwerpunkt des

Wagens, ferner $\frac{sa}{sg} = \frac{P}{p}$ das Verhältniss der Schwungkraft zur Schwere unter der vorausgesetzten Bedingung.

Da nun $P = \frac{v^2 p}{g r}$, so folgt

$$\frac{P}{p} = tng\,\alpha = \frac{v^2}{g r}.$$

Nimmt man z. B. $v = 10$ Meter als mittlere Geschwindigkeit und eine Curve von der Stärke, dass ihr Krümmungshalbmesser $r = 100$ Meter, so wird $tng\,\alpha = tng\ 5^0 49' 30''$ gefunden.

Für die äusserste Gränze der Standfähigkeit auf wagerecht gelegten Schienen ist, wie wir gesehen haben, $P = \frac{p b}{2 h}$, folglich

$$\frac{P}{p} = \frac{b}{2 h} = \frac{v^2}{g r},$$

und

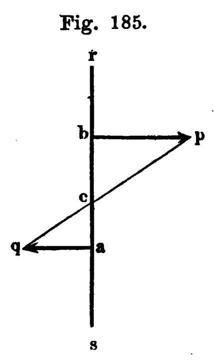
$$v = \sqrt{\frac{g \,.\, r \,.\, b}{2 h}}.$$

Erst beim Eintritte dieser Geschwindigkeit würde der Wagen aus der Bahn heraus geschleudert werden können. Wäre z. B. bei einer Spurbreite von 2 Meter und einer Höhenlage des Schwerpunktes von ebenfalls 2 Meter, der Krümmungshalbmesser r nur 100 Meter, so würde sich ergeben:

$$v = \sqrt{\frac{9{,}8088 \,.\, 100 \,.\, 2}{2 \,.\, 2}} = 22{,}15 \text{ Meter.}$$

225 **Freie Axen.** Im Falle, dass der Schwerpunkt eines rotirenden Körpers in der Drehaxe liegt, sind die Schwungkräfte seiner Massentheile allerdings nach allen Richtungen hin entgegengesetzt gleich (Nro. 223).

Fig. 185.



Daraus folgt jedoch nicht, dass die Axe nicht an gewissen Stellen einen vorherrschend einseitigen Druck erfahren und dadurch, wenn sie nicht festliegt, aus ihrer Lage verschoben werden könnte. Ist z. B. rs (Fig. 185) eine Drehaxe, und sind p und q die in genau gleichem Abstande von derselben in der Ebene $s p r q$ liegenden Schwerpunkte gleicher Massen, so entstehen zwar nach entgegengesetzten Seiten gleiche Schwungkräfte; dessenungeachtet aber wird die Axe, wenn sie nur in einem Punkte, z. B. nur in s gestützt ist, bei beginnender Rotation abgelenkt werden.

Es ist einleuchtend, dass die Axe nicht mehr verrückt werden kann, wenn der Abstand $ab = o$ wird, oder allgemeiner gesprochen, wenn in

jedem Punkte der Axe und nach jeder Richtung entgegengesetzt gleiche Schwungkräfte einander direct gegenüberstehen. Sie wird in diesem Falle eine freie Axe genannt. Um eine freie Axe zu gewinnen, müssen sich also die beiden Bedingungen vereinigen: dass die Drehaxe durch den Schwerpunkt geht, und dass die Schwungkräfte sämmtlicher Massentheile, von ihren Angriffsstellen an einen beliebig gewählten Punkt der Axe (im Sinne des Hebelgesetzes) reducirt, sich zur Schwungkraft Null ergänzen.

Eine kreisförmige Scheibe, die sich um eine auf ihrem Mittelpunkte errichtete Senkrechte dreht, besitzt in dieser augenscheinlich eine freie Axe. Ebenso kann jeder ihrer Durchmesser eine freie Axe bilden. Bei allen Körpern, die man sich durch Rotation einer Linie oder einer ebenen Fläche um eine feste gerade Linie herum erzeugt vorstellen kann, haben in dieser, ihrer Symmetrie-Axe, eine freie Axe; denn alle solche Körper sind als Anhäufungen von Kreisen oder Kreisflächen anzusehen, die mit ihren Mittelpunkten auf einander liegen. So bei den Kugeln jeder Durchmesser, bei Cylindern und Kegeln die Axe.

Wenn die Rotationsaxe eines Körpers, obwohl sie durch den Schwerpunkt gelegt worden, nicht frei ist, so denke man sich diesen Körper durch winkelrecht gegen die Axe geführte Schnitte in eine Anzahl paralleler, dünner Scheiben zerlegt. Die Schwungkräfte derselben, möglicher Weise nach den verschiedensten Richtungen gehend, denke man sich je aus zwei Seitenkräften zusammengesetzt, die in zwei Ebenen fallen, welche sich der Axe entlang winkelrecht durchschneiden. So entstehen zwei Systeme paralleler Kräfte, die sämmtlich theils im positiven, theils im negativen Sinne ihre Angriffsstellen in der Axe finden. Da die letztere nach Annahme durch den Schwerpunkt geht, also die ganze Schwungkraft gleich Null ist, so müssen die algebraischen Summen beider Systeme paralleler Kräfte, jede für sich, sich zu Null ergänzen (Nro. 89); d. h. die Summe der positiven Kräfte in jeder Ebene ist gleich der Summe der negativen Kräfte in derselben Ebene. Wohl aber ist es möglich, dass die Resultirende einerseits der positiven, andererseits der negativen Kräfte, in der einen oder andern oder auch in beiden Ebenen, obwohl an Grösse gleich, doch verschiedene Angriffsstellen in der Axe haben, und zwar die eine auf der einen Seite, die andere auf der entgegengesetzten Seite des Schwerpunktes. Man erhält dann ein Paar oder selbst zwei Paare von Gegenkräften. Im letztern Falle lassen sich die beiden Paare nach dem Gesetz des Parallelogramms der Kräfte zu einem einzigen zusammensetzen.

In allen Fällen also, wenn die Rotationsaxe eines Körpers nicht frei ist, kann die Ursache auf das Vorhandensein eines Paares von Gegenkräften (Nro. 91) zurückgeführt werden. Es seien a und b, Fig. 186 (a. f. S.) ihre Angriffsstellen in der Axe rs. Man denke sich die Masse p des rotirenden Körpers in zwei Theile p' und p'' gebracht, deren Schwerpunkte bei q und p, in den senkrechten Abständen $qa = r$, und

$pb = r_{,,}$ von der Axe liegen, so dass $p' r_{,} = p'' r_{,,}$. Bei der Rotation werden beide Massen gleiche Schwungkräfte gewinnen, also der Bedingung eines Paares gleicher Gegenkräfte genügen.

Fig. 186.

Die Verbindungslinie pq beider Schwerpunkte geht durch ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt c, der nach Annahme in der Axe liegt. Nun ist

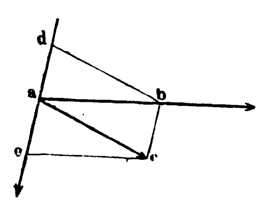
$$qa : bp = qc : pc = p'' : p'.$$

Es folgt hieraus, dass $qc \, . \, p' = pc \, . \, p''$. Durch eine Drehung der Linie qp um den Schwerpunkt c kann demnach, mit Beziehung auf die Axe rs, weder das Gleichgewicht der Massen p' und p'', noch das ihrer Schwungkräfte gestört werden. Hat sich nach erfolgter Drehung der Winkel rcp bis zu 90^0 vergrössert, so halten sich die beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte im Schwerpunkte selbst das Gleichgewicht. Die Axe rs ist folglich frei geworden.

Man erkennt hieraus die Möglichkeit, für jeden Körper die Lage einer freien Axe zu bestimmen. Ja, da durch den Schwerpunkt eines Körpers nach den drei Dimensionen des Raumes charakteristisch verschiedene Drehaxen gelegt werden können, so folgt weiter, dass jeder Körper wenigstens drei freie Axen haben muss.

226 Ein um eine freie Axe rotirender Körper lässt sich parallel mit dieser Axe ohne alle Schwierigkeit in Bewegung setzen. Jeder äussern Einwirkung dagegen, die eine Ablenkung der Axe aus ihrer Lage zur Folge haben muss, tritt alsbald ein Widerstand entgegen; so dass es bei flüchtigem Blicke ganz den Anschein gewinnt, als habe der Körper in Folge der Umwälzungen um seine freie Axe einen gewissen Grad der Standfähigkeit angenommen. Diese überraschende Erscheinung erklärt sich aus dem Gesetze der Trägheit, welches ausspricht: dass ein Kraftaufwand erfordert werde, nicht nur um die Geschwindigkeit, sondern auch um die Richtung einer Bewegung zu verändern.

Fig. 187.

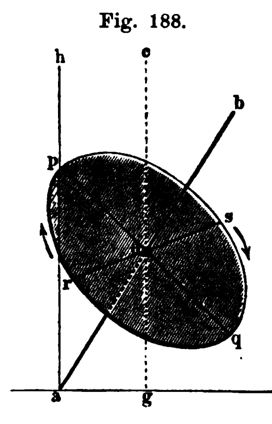


Eine Körpermasse p z. B., die wir uns im Punkte a (Fig. 187) verdichtet vorstellen wollen, und welche von diesem Punkte aus mit der Geschwindigkeit v in der Linie ab fortschreitet, muss diese Bewegungsrichtung einhalten, so lange Einwirkungen von Aussen entfernt bleiben. Ist aber die Masse p gleichzeitig von einer Kraft P in der Richtung ae getrieben, und müsste sie unter diesem Einflusse nach e gelangen in derselben Zeit t, in welcher sie mit ihrer Anfangsgeschwindigkeit den Weg ab beschreiben könnte, so wird sie, wie bekannt, wirklich im Punkte c ankommen. Man kann sich ab in die Componenten ac und ad zer-

legt denken. Von diesen wird $a\,d$ durch die Kraft P aufgehoben, während für die Bewegung von p nur noch die andere Componente $a\,c$ übrig bleibt. Da nun die Geschwindigkeit in der Richtung $a\,d$ nach der Zeit t zernichtet worden ist, so ist es gerade so, als habe der Kraft P fortdauernd ein gleichgrosser Druck entgegengewirkt. Im Sinne der Figur 187 äussert sich dieser Druck in der Richtung von a nach d, wenn die Bewegung von $a\,b$ nach $a\,c$ abgelenkt wird. Allgemein gesprochen, liegt die anfängliche Geschwindigkeit zwischen der abgelenkten und dem aus der Ablenkung entspringenden Druck. Ist P von stetiger Wirksamkeit, so muss auch eine stetige Folge von Ablenkungen der Bewegung eintreten; die Bahn des Körpers p verwandelt sich in eine Curve. Behauptet dabei die Geschwindigkeit sowie die Kraft P eine unveränderliche Grösse, so reihen sich an die gekrümmte Bahn stets gleichartige und auch an Grösse gleiche Bogenelemente; es entsteht eine Kreisbewegung.

Beziehen wir nunmehr diese Folgerungen aus der Theorie, die uns schon bei der Erklärung der Schwungkraft leiteten, auf den Beharrungszustand einer rotirenden Masse, z. B. einer kreisförmigen Scheibe (Fig. 188), die sich mit grosser Geschwindigkeit um ihre freie Axe $a\,b$ dreht. Letztere, die anfangs senkrecht gestanden hatte, ist durch einen seitlichen Stoss in die in der Figur dargestellte schiefe Lage gebracht worden, in welcher sie mit dem Lothe einen Winkel $c\,o\,b = \alpha$ bildet. In dieser veränderten Stellung trachtet das im Schwerpunkte o concentrirte Gewicht, welches in der Richtung $o\,g$ wirksam ist, die Scheibe ganz umzuwerfen. Man kann den diese Bewegung herbeiführenden Druck p in zwei Kräfte nach $o\,a$ und $o\,q$ zerlegen. Die eine $p \cos \alpha$ wird im Punkte a von dem Boden aufgehalten, die andere $p \sin \alpha$ am Hebelarme $a\,o$ wirksam, sucht den Punkt o und mit ihm die ganze Scheibe um den Stützpunkt a zu drehen. Wirklich muss der rotirende Körper diesem Zuge einen Augenblick gehorchen.

Fig. 188.

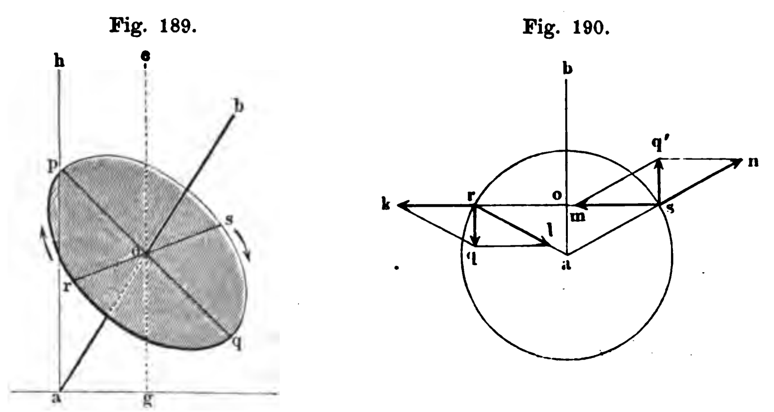


Dadurch bildet aber die vorhergehende mit dieser neuen Lage der Scheibe einen kleinen Winkel. Der Punkt q der Linie $p\,q$ senkt sich, der Punkt p wird gehoben. Aehnliches gilt für alle mit $p\,q$ parallelen Linien der Ebenen; alle beschreiben denselben Winkel.

Angenommen, die Drehung um die Axe $a\,b$ geschehe in der Richtung der Pfeile. Da alle Theile der Scheibe daran Theil nehmen, so haben auch alle während der vorher erwähnten geringen Senkung des Punktes o kleine Bögen um die Axe $a\,b$ beschrieben. Jeder derselben lässt sich in zwei Componenten parallel mit $p\,q$ und winkelrecht gegen

diese Linie zerlegen. Die winkelrechten Componenten folgen der Senkung des Punktes *o* und der damit verknüpften Drehung um die Linie *rs*, deren Lage man sich winkelrecht gegen *pq* vorstellen muss, zunächst ohne Widerstand, weil sie dabei mit sich selbst parallel bleiben. Die der Linie *pq* parallelen Componenten dagegen treten aus der vorhergehenden Bewegungsrichtung heraus. Auf der mit Beziehung auf die Linie *pq* vordern Seite der Scheibe wird ihr vorderes Ende gehoben, auf der hintern Seite der Scheibe wird es gesenkt. In Folge dessen entsteht auf allen Punkten der Scheibe ein Druck winkelrecht gegen die Ebene derselben, wodurch alle diesseits der Linie *pq* liegenden Theile niedergedrückt, alle jenseits gelegenen gehoben werden. Beide Summen paralleler Kräfte, je auf die Punkte *r* und *s* reducirt, bilden ein Paar von Gegenkräften, die sich unterstützen, um die Axe *ab* in der Richtung von *s* nach *r* um den Punkt *a* zu drehen. In der That, denken wir uns die Linie *rs* (Fig. 189) besonders gezeichnet; *r* und *s* in der besondern

Fig. 189. Fig. 190.



Zeichnung (Fig. 190) seien die Angriffsstellen der beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte q und q', deren Richtungen und Grössen durch die Linien rq und sq' angedeutet sind. Man kann sich vorstellen, dass q aus den Seitenkräften rk und rl, und dass ebenso q' aus den Seitenkräften sm und sn hervorgegangen sei. Von diesen fallen rl und sn in den Stützpunkt a. Dagegen finden rk und sm ihre Angriffsstelle in o und suchen, am Hebelarme ao wirksam, die Drehung der Scheibe um den Punkt a zu bewerkstelligen. Der Einfluss der Gegenkräfte äussert sich demnach als ein Druck $2q \cdot tng\, r\, a\, o$, welcher der Linie sr entlang gegen den Punkt o der Scheibe, also winkelrecht gegen den Druck $p \sin \alpha$ gerichtet ist. Während der Schwerpunkt der Scheibe genöthigt wird, in der Ebene aoq (Fig. 189) einen kleinen Winkel zu beschreiben, erfährt also diese Ebene selbst eine Verschiebung mit sich selbst parallel, oder richtiger, eine Drehung um den Punkt a gleichlaufend mit der Linie pq, und der Punkt o gewinnt, entsprechend der Dauer der Einwirkung der

Kraft $2q \cdot tng\,r\,a\,o$, eine kleine Geschwindigkeit, vermöge welcher er, so lange der Winkel hab unverändert bleibt, sich um die Senkrechte ha drehen, folglich einen Kreis beschreiben muss. Mit Beziehung auf diesen Kreis erscheint die Kraft $2q\,tng\,r\,a\,o$ als Tangentialkraft. Die Bewegung, welche diese dem Punkte o einflösst, geht nach der vorher angenommenen Bewegungsrichtung der Scheibe, nämlich auf der vordern Seite der letztern von der Rechten zur Linken, ebenfalls von der Rechten zur Linken. Hätte ein ganzer Umlauf in diesem Sinne stattgefunden, so würde die Axe ab eine Kegeloberfläche umschrieben haben. Wenn man der Scheibe beim Beginne des Versuches die umgekehrte rotirende Bewegung eingeflösst hätte, so würde auch ihre Axe die umgekehrte Richtung der Bewegung annehmen. Wäre der gegen den Schwerpunkt o (Fig. 189) thätige Druck nicht die Schwere, sondern eine im entgegengesetzten Sinne, also von g nach o wirksame Kraft, so müsste die Rotation der Axe von der Linken zur Rechten gehen, sobald die Scheibe sich von der Rechten zur Linken dreht.

Der Bedingung, dass der Winkel hab unverändert bleibe, kann wirklich Genüge geschehen, so lange die Rotationsgeschwindigkeit sich nicht ändert. Denn in Folge der Drehung der Axe ab um die Senkrechte ha wechselt die ganze Scheibe jeden Augenblick ihre Lage. Diejenigen Theile, welche gerade vor dem Durchmesser pq liegen, senken sich, alle dahinter liegenden werden gehoben. So kommt es, dass jetzt die auf pq senkrechten Componenten der Geschwindigkeiten, welche auf der Scheibenfläche diesseits der Linie rs sich abwärts neigen, jenseits dagegen aufsteigen, einen Druck winkelrecht gegen die Scheibe ausüben, und zwar von unten nach oben diesseits, von oben nach unten jenseits der Linie rs. Denken wir uns dieses Kräftepaar ähnlich wie vorher in eine Kraft verwandelt, die gegen den Punkt o entlang der Linie pq gerichtet ist, so leuchtet alsbald ein, dass diese sich dem Drucke $p \sin\alpha$ entgegensetzt, und im Falle sie dessen Grösse erreicht, das Umfallen der Scheibe verhindern muss.

So lange die Drehung der Axe ab ungehindert fortdauert, so lange muss auch die Scheibe ununterbrochen ihre Lage verändern, und folglich den von dieser Veränderung abhängigen, der Schwere entgegengesetzten Druck erzeugen. Ist dessen Componente nach qo nicht genügend, um dem relativen Gewichte der Scheibe $p \sin\alpha$ das Gleichgewicht zu halten, so sinkt die letztere, wodurch alsbald die Tangentialkraft erneuert oder vermehrt und folglich die Umlaufsgeschwindigkeit der Axe ab vergrössert wird. Von dieser ist aber wieder die Grösse der Componente nach qo abhängig, dergestalt dass letztere, so lange überhaupt die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe hinlänglich gross ist, die Grösse $p \sin\alpha$ behaupten oder doch schliesslich immer wieder erhalten muss. Man erkennt leicht, dass das relative Gewicht $p \sin\alpha$ und die Componente nach qo einander gegenüber die Rolle von Centrifugalkraft und Centri-

petalkraft übernehmen, mit dem Unterschiede jedoch, dass in diesem Falle die letztere in Abhängigkeit von der erstern steht.

Wenn die Axe ab nur wenig geneigt ist, so ist auch die Geschwindigkeit ihrer drehenden Bewegung nur gering. Dieselbe vermehrt sich aber bei zunehmender Grösse des Winkels α, weil dem vergrösserten relativen Gewichte nur durch schnellern Wechsel in der Lage der Scheibe das Gleichgewicht gehalten werden kann. Ebenso erklärt sich die überraschende Thatsache, dass bei abnehmender Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe diejenige ihrer Axe zunimmt. Indem durch die Reibung die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe allmälig vermindert wird, neigt sich ihre Axe mehr und mehr, während ihre drehende Bewegung merklich beschleunigt wird, bis endlich der aus der Rotationsgeschwindigkeit noch hervorgehende Gegendruck unvermögend geworden ist, dem relativen Gewichte das Gleichgewicht zu halten.

Hält man die drehende Bewegung der Axe ab durch irgend einen Widerstand auch nur einen Augenblick auf, so fällt die Scheibe um. Gelingt es dagegen, sie durch äussern Einfluss zu beschleunigen, so richtet sie sich auf, der Winkel α nimmt ab.

Die Grösse des Kräftepaares, von welchem bei gegebener Rotationsgeschwindigkeit, einerseits die Drehung der Axe, andererseits das Gleichgewicht abhängig ist, verhält sich wie die Tangente des Winkels rao (Fig. 190). Es folgt hieraus, dass für eine gegebene Winkelgeschwindigkeit Scheiben von grossem Durchmesser und niedrigem Fusse die grösste Stabilität besitzen.

Alle diese Erscheinungen lassen sich mittelst eines gewöhnlichen flachen Kreisels, den man dadurch in Rotation versetzt, dass man einen nicht zu kurzen Faden um seine Axe wickelt und dann abzieht, leicht beobachten.

Aehnliche Vorgänge wie die, welche wir bei der kreisförmigen Scheibe unter möglichst einfachen Beziehungen betrachtet haben, können bei jedem Körper hervortreten, der um eine freie Axe schwingt. Darauf beruhen neben dem kugelgestalteten Kreisel die bekannte in den Lehrbüchern der Physik beschriebene Bohnenberger'sche Rotationsmaschine, sowie die Rotationsapparate von Magnus, von Fessel, und andere verwandte Einrichtungen.

227 **Einfluss auf die Flugbahn länglicher Geschosse.** Die Kugeln im eigentlichen Sinne des Wortes, welche früher bei allen unseren Schusswaffen im Gebrauche waren, sind in der neuern Kriegskunst mehr und mehr durch Geschosse von annähernd cylindrischer Gestalt ersetzt worden, welche vorn eine conische Zuspitzung erhalten, während das hintere Ende flach oder kugelförmig abgerundet ist.

In luftleeren Räumen würden derartige Geschosse eben so wenig wie die wirklichen Kugeln von der parabolischen Wurfbahn abweichen können. In Folge des Luftwiderstandes und der davon abhängigen Ge-

schwindigkeitsabnahme wird jedoch, wie schon früher (Nro. 30) hervorgehoben wurde, ein genaues Einhalten dieser Bahn gehindert, und besonders der zweite Ast derselben abgekürzt.

Doch beträgt diese Störung bei länglichen Geschossen, wenn sie aus gezogenen Röhren abgefeuert werden, z. B. bei dem Geschoss des Zündnadelgewehres, weniger, als bei den kugelgestalteten. Der Grund dieser Verschiedenheit beruht zum Theil allerdings, und besonders wenn die Bahn eine flache Curve bildet, auf der zur Ueberwindung des Luftwiderstandes günstigern Gestalt der länglichen Geschosse. Indessen ist dieser Vortheil geringer als es beim ersten Anblick scheinen möchte, weil die Längenrichtung solcher Geschosse nicht in der Wurfbahn bleibt, sondern dieselbe durchschneidet. Im ersten Augenblicke zwar, da ein Langgeschoss das Rohr verlässt, tangirt seine Längenrichtung die Flugbahn. Dieselbe Lage sucht es aber auch später, ganz entsprechend dem Gesetze der Trägheit, einzuhalten, während die Bahnrichtung seines Schwerpunktes im Fortschreiten sich mehr und mehr aus dieser Lage, nämlich aus der ursprünglichen Wurfrichtung, entfernt. Beide Richtungen, anfänglich gleichlaufend, müssen also während der Dauer der Bewegung einen nach und nach zunehmenden Winkel mit einander bilden.

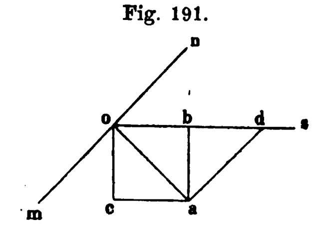
Es hat dies zur Folge, dass der Luftwiderstand, welcher beim Beginn der Bewegung nur gegen den zugespitzten Kopf des Geschosses gerichtet ist, später und zwar mit zunehmender Stärke auch dessen Seitenfläche trifft. Der hieraus entspringende Gegendruck wirkt jedoch nicht ausschliesslich nur in dem Sinne einer Verminderung der Horizontalgeschwindigkeit.

Da von dem Widerstande der Luft gegen die darin bewegten Körper ausführlicher erst später die Rede sein kann, so mag es hier genügen, hervorzuheben, dass sich derselbe als ein Druck gegen die dem Luftstrome ausgesetzte Körperoberfläche betrachten lässt, dessen Grösse, in so weit es ein Langgeschoss betrifft, von der Neigung desselben gegen die Bahn und seinem grössten Längendurchschnitt nach dieser Seite abhängig ist. Wenn die Durchschnittsfläche die Bahnrichtung winkelrecht durchschneidet, so hat bei gegebener Geschwindigkeit der Druck seinen grössten Werth und wirkt ganz zur Verminderung der Geschwindigkeit. Wenn aber die Durchschnittsfläche die Bahn nur tangirt, so verschwindet der Druck auf die erstere. In allen anderen Lagen, die das Geschoss annehmen mag, findet ein Druck gegen die Durchschnittsfläche statt, dessen Grösse näherungsweise bestimmt wird, wenn man den grössten Werth desselben mit dem Sinusse des Neigungswinkels multiplicirt.

Es sei os (Fig. 191, a. f. S.) die Richtung der Bewegung an irgend welcher Stelle der Flugbahn, mn die Neigung des Geschosses gegen diese Richtung und Winkel $nob = \alpha$. Der grösste Luftwiderstand gegen die Schnittfläche nach der Linie mn, welcher stattfinden würde für $\alpha = 90^0$, sei durch die Linie od dargestellt, so ist der wirkliche gegen das Geschoss gerichtete, vom Luftwiderstande abhängige winkelrechte Druck

$oa = od \,.\, \sin\alpha$. Dieser Druck lässt sich wieder in die Seitenkräfte $ob = oa \,.\, \sin\alpha$ und $oc = oa \,.\, \cos\alpha$ zerlegen, von welchen nur die erstere die Geschwindigkeit des Fortschreitens in der Bahnrichtung verzögert. Dagegen die andere oc sucht das Geschoss zu heben und vermindert also bei mässigen Wurfwinkeln, mehr in dem zweiten als in dem ersten Aste der parabolischen Bahn, die Fallbeschleunigung. Es ist einleuchtend, dass dadurch die Abweichung der Wurfbahn von der Parabel zwar nicht ausgeglichen, aber doch weniger auffallend gemacht wird.

Fig. 191.



Allerdings liegt dieser Folgerung die Annahme zu Grunde, dass ein längliches Geschoss seine ursprüngliche Lage, mit der es das Rohr verlassen hat, während der ganzen Flugzeit unverändert beibehalten werde. Dieser Bedingung kann jedoch bei Anwendung glatter Röhren nur in dem Falle Genüge geschehen, wenn der Schwerpunkt des Luftwiderstandes mit dem der Geschossmasse genau zusammenfällt. Gewöhnlich werden aber diese beiden Schwerpunkte nicht zusammenfallen. Zwar dürfte derjenige der Druckkräfte immer ziemlich nahe mit dem der Durchschnittsfläche übereinstimmen, welche man sich nach der Linie mn (Fig. 191) durch das Geschoss gelegt denken kann, und die den Druck des Luftwiderstandes unmittelbar aufnimmt. Allein der Schwerpunkt dieser Ebene ist nicht nothwendig zugleich auch derjenige der Geschossmasse. Bei Geschossen z. B. von cylindrischer Form, die nach vorn conisch zugespitzt sind, liegt der letztere tiefer als der erstere, weil der Schwerpunkt eines Kegels nur um $\frac{1}{4}$ der Höhe, der des Dreiecks aber um $\frac{1}{3}$ der Höhe von seiner Basis absteht. Aehnlich sollen sich, erfahrungsmässig, das Geschoss des Zündnadelgewehres und andere im Gebrauche stehenden länglichen Geschosse mit conischer Zuspitzung verhalten. Ist dem so, so trifft sie die Resultante des Luftstosses excentrisch, und sie gerathen unter der Einwirkung desselben in Schwingungen, die selbst in eine rotirende Bewegung übergehen können. Jedenfalls wird der conische Vordertheil, gegen welchen, vom Schwerpunkte an gerechnet, das Uebergewicht des Luftdruckes gerichtet ist, gehoben und zurückgeworfen. Es ist ohne Schwierigkeit zu verstehen, dass in Folge dieses Verhaltens nicht nur der Luftwiderstand sehr vergrössert, also der Fall des Geschosses beschleunigt, sondern auch dass dadurch der Grad der Sicherheit in der Beurtheilung seiner Bewegungsbahn vermindert wird.

Die Einführung länglicher Geschosse bei unseren Schiesswaffen konnte daher nur bei der gleichzeitigen Anwendung gezogener Büchsen und Geschütze zu dem gewünschten Erfolge führen. Wir wissen schon (Nro. 48), dass durch die Züge das Geschoss gezwungen wird, während des geradlinigen Fortschreitens im Rohr eine sehr rasche Rotation um dessen Axe anzunehmen, welche ihm dann wieder auf seiner Flugbahn die

nöthige Stabilität ertheilt, in der ursprünglichen Lage unverändert zu verharren.

Man hat gleichwohl die Bemerkung gemacht, dass die aus gezogenen Röhren geschleuderten länglichen Geschosse eine kleine Abweichung, und zwar rechts zur Ebene ihrer parabolischen Flugbahn erfahren. Dieselbe zeigt sich immer in der Art, dass das vordere conisch sich verjüngende Ende am stärksten abgelenkt, und im Vergleiche zur ursprünglichen Lage mehr oder weniger gesenkt ist, dass also die Richtung der Längenaxe des Geschosses derjenigen der Flugbahn an der betreffenden Stelle näher gerückt erscheint. Dieses bemerkenswerthe Verhalten hat vor mehreren Jahren Magnus in folgender Weise zu erklären versucht *).

Die Züge in den Geschützen sind immer in demselben Sinne gewunden, und zwar so, dass ein Beobachter, der hinter dem Rohre stände und die Bewegung durch die Windungen gleichsam mit dem Auge verfolgte, wahrnehmen würde, dass dieselbe im obern Theile der Krümmung des Rohres von links nach rechts, im untern Theile von rechts nach links, oder kurz ausgedrückt, dass sie im Sinne des Zeigers einer Uhr geht. In demselben Sinne muss denn auch die Rotation des Geschosses um seine Längenaxe vor sich gehen. Da die letztere (wie vorher gezeigt wurde) nicht in der Tangente der Flugbahn bleibt, so trachtet der Luftwiderstand, unter denselben Voraussetzungen wie vorher, das vordere Ende des Langgeschosses um dessen Schwerpunkt zu heben, das hintere Ende zu senken. Dieser Einwirkung gehorcht jedoch das Geschoss nur in sehr geringem Maasse, indem seine Längenaxe, ähnlich wie die Drehaxe des rotirenden Kreisels und auch in gleichem Sinne eine Kegeloberfläche zu beschreiben beginnt, deren Scheitelpunkt mit dem Schwerpunkte der Geschossmasse zusammenfällt.

Da nun die Kreisbewegung des Geschosses um seine Längenaxe auf der obern Seite von links zu rechts geht, so muss auch sein vorderes Ende beim Beginne der conischen Ablenkung der Axe sich nach rechts neigen.

Diese Bewegung der Längenaxe um eine Kegeloberfläche ist jedoch in Folge der ausserordentlich grossen Rotationsgeschwindigkeit des Geschosses (Nro. 48) eine sehr langsame. So begreift es sich, dass sie gewöhnlich während der Dauer des Fortschreitens in der Flugbahn keine ganze Kegeloberfläche, sondern nur ein Bogenstück davon zu umschreiben vermag. Doch ist dies hinreichend, um die Spitze des Geschosses aus ihrem beziehungsweise höchsten Standpunkte, der in der Ebene der Flugbahn liegt, merklich nach rechts ablenken und zugleich senken zu können.

Sobald in Folge dieser Ablenkung die Längenaxe des Geschosses mit der Ebene der Flugbahn einen Winkel bildet, gewinnt der Druck

*) Poggendorff's Annalen Bd. 88, S. 14.

der widerstehenden Luft eine Componente, welche dasselbe, mit sich selbst parallel, zur rechten Seite treibt. So kommt es schliesslich, dass das aus gezogenem Rohre abgefeuerte Geschoss nicht in der durch seine parabolische Wurfbahn gelegten senkrechten Ebene bleibt, sondern rechts, das vordere Ende mehr als das hintere, daraus abweicht, und dass zugleich die Spitze eine merkliche Senkung erfährt.

Beobachtungen mit Geschützen, deren Züge links gewunden sind, scheinen bis jetzt nicht gemacht worden zu sein. Der Urheber der mitgetheilten sinnreichen Erklärung sprach jedoch seine Meinung dahin aus, dass aus derartigen Röhren längliche Geschosse zur linken Seite der Bahn abgetrieben werden müssten.

Wenn auch diese Ansicht, im Sinne der gegebenen Erklärung, durchaus keinem Zweifel unterliegen kann, so würde doch die experimentelle Prüfung darum nicht weniger ein grosses wissenschaftliches Interesse bieten. Zugleich würde man dadurch ein Hülfsmittel erhalten, den gleichzeitigen Einfluss der von der Erdrotation abhängigen Ablenkung der Geschosse mit der Erfahrung zu vergleichen. Die zuletzt erwähnte Abweichung geht bekanntlich (Nro. 25, δ) auf der nördlichen Erdhälfte ebenfalls rechts zur anfänglichen Richtung der Bewegung. Es wäre daher möglich, dass beim Gebrauch eines gezogenen Geschützes mit links gewundenen Zügen die beiden Einflüsse, da sie in ihren Wirkungen einander entgegengesetzt sind, sich theilweise oder ganz aufheben würden.

228 **Präcession und Nutation.** Einflüssen ganz ähnlicher Art, wie diejenigen, welche frei rotirende Körper auf der Erdoberfläche und in der Luft erfahren, sind die Himmelskörper in Folge ihrer wechselseitigen Attraction unterworfen. Allerdings gehen diese Einwirkungen, Masse gegen Masse betrachtet, wegen der ausserordentlich grossen Abstände der Weltkörper von einander, genau so vor sich, als befände sich jede Masse in ihrem Schwerpunkte verdichtet. Auch ist die Bewegung dieses Punktes an jeder Stelle seiner Bahn durchaus nur von der Resultirenden sämmtlicher von Aussen kommender Anziehungen abhängig, in der Art, dass, im Einklange mit dem Trägheitsgesetze, jedem äussern Einflusse je nach seiner Grösse und Richtung vollständig Genüge geschieht. Gleichwohl können bei einem Weltkörper in Folge von Unregelmässigkeiten seiner Gestalt gewisse Störungen eintreten, welche, wenn sie auch die Bahn seines Schwerpunktes unberührt lassen, doch sich durch Schwankungen in der Lage seiner Rotationsaxe aussprechen.

Von dieser Beschaffenheit sind die unter dem Namen der **Präcession** bekannten Aenderungen in der Stellung unserer Erdaxe gegen den gestirnten Himmel.

Wäre die Erde genau von kugelförmiger Gestalt, und ihre Masse in je gleichen Abständen von dem Mittelpunkte gleichförmig um diesen vertheilt, so würde die Anziehungskraft der Sonne in allen Stellungen der Erde gegen dieselbe durch ihren Mittelpunkt gehen; die Erdaxe, unver-

rückbar in ihrer Lage, würde die Bewegungen des Schwerpunktes nur mit sich selbst parallel begleiten können, und ihre Verlängerung würde immerdar denselben unendlich weit entfernt gedachten Punkt der Himmelskugel treffen. So ist es jedoch nicht wegen der Abplattung an den Polen und der entsprechenden grössern Anschwellung der Erdmasse um den Aequator herum. In Folge dessen erscheint die gemeinschaftliche Angriffsstelle der Anziehungen, welche die Sonne gegen die Erdtheile ausübt, veränderlich. Nur zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen (Aequinoctien) trifft sie die Erdaxe im Mittelpunkte; in der einen Hälfte des Jahres (im Sommer) liegt sie unterhalb, in der andern Hälfte oberhalb der Ebene der Erdbahn, immer jedoch so, dass wenn die Erde dieser excentrischen Einwirkung frei gehorchen könnte, ihre bekanntlich schief gegen die Ebene der Erdbahn gestellte Axe sich senkrecht stellen müsste. Die tägliche Umwälzung der Erde setzt nun diesem Drucke einen ähnlichen Widerstand entgegen, wie derjenige, den wir bei einer rotirenden Scheibe bereits kennen gelernt haben. Aus demselben Grunde wie dort (Nro. 226) hat er zur Folge, dass die Erdaxe (die wir mit Beziehung auf die scheinbare Drehung des Himmels zugleich als Himmelsaxe ansehen) um die wahre und unveränderliche Axe der Weltkugel eine Kegeloberfläche beschreibt, deren Scheitelpunkt der Erdmittelpunkt ist *). Die kreisförmige Basis dieses Kegels am scheinbaren Himmelsgewölbe, deren Peripherie alle Punkte enthält, auf welche die verlängerte Erdaxe nach und nach hinweist, hat einen Durchmesser von etwa 47°. Die Periode, d. h. die ganze Zeit eines Umlaufs der Erdaxe beträgt 25 800 Jahre; das Fortschreiten in der Zeit eines Jahrhunderts 1° 23,7′ von Osten nach Westen.

Man nennt diese Erscheinung: die **Präcession** oder **das Vorrücken der Nachtgleichen**, weil sie zur Folge hat, dass der Zeitpunkt eines jeden Jahres, an welchem die Durchschnittsstelle der Ebene des Aequators (welche mit der Erdaxe, auf der sie stets senkrecht stehen muss, ihre Stellung im Weltraume ändert) mit der Ebene der Erdbahn (Ekliptik) von den Sonnenstrahlen senkrecht getroffen wird, oder an welchem, wie man gemeinhin sagt, die Sonne über dem Aequator steht, langsam vorrückt und nach und nach binnen einer Periode von 25 800 Jahren um die ganze Erdbahn herumgeht. Da der bezeichnete Zeitpunkt während der Periode des Vorrückens der Sonne den Anfang des Frühjahrs bedeutet, so erkennt man, dass die Lage des Sternenhimmels gegen die Erde zu Frühlingsanfang nach und nach sich ändert.

Die **Nutation**, das Schwanken der Erdaxe ist eine verwandte Erscheinung, die von der Einwirkung des Mondes auf die abgeplattete Erde herrührt und, als eine Art von Störung oder Schwankung im regel-

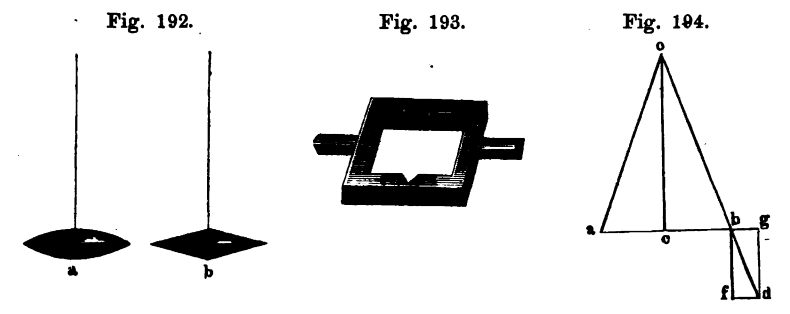
*) Indem mit Rücksicht auf den unmessbar grossen Abstand der Fixsterne die ganze Ebene der Erdbahn oder scheinbaren Sonnenbahn als ein Punkt angesehen wird.

mässigen Gange der Präcession hervortretend, in je 18 bis 19 Jahren verläuft.

229 **Das Centrifugalpendel.** Mit dem Namen Pendel kann bekanntlich jeder Körper bezeichnet werden, der um einen festen Punkt oder um eine Axe drehbar ist, und dessen Schwerpunkt unter der Stütze liegt.

Unter dem einfachen Pendel insbesondere versteht man einen schweren Punkt an einem gewichtslosen und doch zugleich unbiegsamen Faden. Man nennt es auch ideales Pendel, weil ein derartiges Pendel als selbstständige Geräthschaft sich nur denken, aber nicht wirklich herstellen lässt. Man nähert sich indessen der Form desselben, wenn man an einem möglichst dünnen Faden eine kleine Bleikugel oder eine Linse aus demselben Metall verfertigt (Fig. 192) aufhängt. Die Gestalt Fig. 192, *a*, die eigentliche Linsenform, ist die üblichere; die Gestalt Fig. 192, *b*, hat jedoch den Vorzug, noch etwas leichter die Luft zu durchschneiden.

Fig. 192. Fig. 193. Fig. 194.



Eine Pendellinse, die an einem sehr dünnen Faden hängt, lässt sich mit gleicher Leichtigkeit nach jeder Richtung hin in schwingende Bewegung versetzen. Derselbe Zweck kann aber auch bei einem unbiegsamen Stabe oder stangenartigen Körper, der als Pendel schwingt, erreicht werden, wenn derselbe an einer scharfkantigen Axe hängt, deren Pfanne in einem Rahmen (Fig. 193) eingeschnitten ist, welcher seinerseits wieder auf scharfkantiger Axe ruht, deren Richtung diejenige der zuerst genannten Axe winkelrecht durchkreuzt. In der Figur ist nur die zweite Axe mit dem Rahmen, und der zur Aufnahme der ersten Axe bestimmten Pfanne dargestellt. Bei dieser Art der Aufhängung (der Cardani'schen Aufhängungsweise) lässt sich das Pendel, wie leicht einzusehen, ebenfalls nach jeder beliebigen Richtung und selbst um seine lothrechte Stellung im Kreise herum drehen. Bei der letztern Art der Bewegung gewinnt es Centrifugalkraft, vermöge der es sich in einem gewissen von seiner Rotationsgeschwindigkeit v abhängigen Abstande von der lothrechten Stellung erhalten kann. Es führt dann den Namen Centrifugalpendel (auch conisches Pendel, weil es einen Kegelmantel umschreibt).

Es sei o (Fig. 194) der Aufhängepunkt eines solchen Pendels, oc seine Lage während des Ruhezustandes, Winkel $cob = coa = \alpha$

die Winkelöffnung, während es mit der Geschwindigkeit v rotirt. Man nennt α gewöhnlich den Elongationswinkel. Es sei ferner p das Gewicht des rotirenden Körpers, den wir uns als die Linse eines einfachen Pendels vorstellen wollen. Der Punkt b sei der Schwerpunkt dieser Linse; $ob = oa = l$, $cb = r$ und die Höhe $oc = h$.

Die Centrifugalkraft $P = bg$ hält sich mit dem Gewichte $p = bf$ im Gleichgewichte, wenn die Resultirende beider Kräfte in die Richtung ob fällt. Es ist dann

$$P = \frac{v^2 p}{gr} \text{ und folglich auch } \frac{P}{p} = \frac{bg}{bf} = \frac{v^2}{gr}.$$

Man darf aber auch setzen $\frac{bg}{bf} = \frac{cb}{co} = \frac{r}{h}$, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke bgd und bco. Daraus folgt:

$$\frac{r}{h} = \frac{v^2}{gr},$$

und indem man anstatt der Geschwindigkeit die Umdrehungszeit in die Rechnung einführt, da

$$v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{t^2}, \text{ ergiebt sich } \frac{r}{h} = \frac{4\pi^2 r^2}{gt^2 r};$$

daher die Zeit einer Umdrehung

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos\alpha}{g}}.$$

Die Grösse der rotirenden Masse hat, wie man sieht, keinen Einfluss auf die Umlaufszeit. Dagegen ist diese von der Höhe des Aufhängepunktes über der Grundfläche des umschriebenen Kegels abhängig, in der Art, dass zwei Pendel, deren Schwerpunkte in ungleichen Entfernungen l und l' vom Aufhängepunkte liegen, dessen ungeachtet ihre Umläufe in gleichen Zeiten vollenden, wenn ihre Höhen gleich sind, d. h. wenn der Elongationswinkel des längern Pendels gerade um so viel zunimmt, dass der Bedingung genügt wird:

$$l \cos\alpha = l' \cos\alpha' = h.$$

Bei kleinen Elongationen sind die Werthe von l und h nur wenig verschieden. Die folgende Zahlenreihe macht dies anschaulich. In der ersten Horizontalreihe sind die Elongationswinkel angegeben, in der zweiten die Höhen, in der dritten die Umlaufszeiten als Functionen der Winkel

α	0^0	1^0	2^0	5^0	10^0
h	l	$0{,}99985 \,.\, l$	$0{,}99939 \,.\, l$	$0{,}99619 \,.\, l$	$0{,}98481 \,.\, l$
T	t	$0{,}99992 \,.\, t$	$0{,}99970 \,.\, t$	$0{,}99810 \,.\, t$	$0{,}99240 \,.\, t$

Die Umlaufszeit vermindert sich bei zunehmender Grösse des Winkels α. Bedeutet z. B. t eine Zeitsecunde, so werden bei Elongationen von nur wenigen Bogenminuten 10 000 Umdrehungen in eben so vielen Secunden vollendet, bei 1^0 Elongation bedarf es nur einer Zeitsecunde, bei 2^0 nur 3 Secunden weniger, bei 5^0 steigt aber der Unterschied schon auf 19 Secunden u. s. f.

Innerhalb der Gränzen kleiner Elongationswinkel kann man also, ohne merklichen Fehler zu begehen, $\cos \alpha = 1$, folglich $h = l$ setzen und es wird

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Die Umlaufszeit des conischen Pendels verhält sich wie die Quadratwurzel aus dem Quotienten der Pendellänge, dividirt durch die Beschleunigung der Schwere.

Dieser Satz gilt streng genommen freilich nur für sehr kleine Elongationswinkel. Ein Blick auf die vorstehende Tabelle lehrt jedoch, dass auch für grössere Winkel, selbst bis zu 10^0, die Unterschiede nicht sehr gross sind, so dass solche grössere Elongationen die Brauchbarkeit der Formel für die Rechnung wenigstens dann nicht ausschliessen, wenn es sich nur um eine kurze Beobachtungszeit handelt.

Kleine Veränderungen des an sich kleinen Winkels α können auf die Dauer der Umdrehungen keinen merklichen Einfluss äussern, so lange sie sich innerhalb der Gränzen halten, für welche die obige Formel Geltung hat. Angenommen, dass solche Aenderungen periodisch während eines jeden Umlaufs eintreten, so kann die Geschwindigkeit der Drehung keine gleichförmige bleiben. Denn die Pendellinse kann dem Mittelpunkte, den sie umkreist, nicht näher treten, ohne sich zu senken; sie gewinnt dadurch Geschwindigkeit in der Richtung des Leitstrahls, welche sich mit der bereits vorhandenen Geschwindigkeit in bekannter Weise (Nro. 31) zusammensetzt. So erhält die Linse das Vermögen, sich wieder zu heben, also vom Mittelpunkte zu entfernen, bis sie den Geschwindigkeitszuwuchs wieder eingebüsst hat, und von neuem gezwungen wird, sich zu senken u. s. f. Indem sie auf diese Weise dem Mittelpunkte abwechselnd näher tritt, und sich wieder entfernt, kann der Bogen, den sie beschreibt, kein Kreis bleiben; vielmehr nähert sich derselbe der Gestalt einer Ellipse. Die kurze Axe dieser ellipsenartigen Krümmung kann (immer natürlich innerhalb der Gränzen kleiner Elongationen) mannigfaltige Dimensionen haben, ohne dass davon die Dauer der Umläufe berührt wird. Geht sie in Null über, so verwandelt sich die drehende Bewegung um einen festen Mittelpunkt in eine Hin- und Herbewegung in einer durch den Aufhängepunkt gehenden lothrechten Ebene.

Das conische Pendel wird häufig als Mittel benutzt, sehr kleine Zeiträume zu messen. Man denke sich die Linse b (Fig. 194) mit einer leichten Gabel verbunden, die sich gegen den Mittelpunkt c anlehnt, und welche, indem sie nur kleine Verschiebungen (im Sinne ihrer Länge)

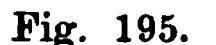
gestattet, die Linse während der Rotation in ungleichem Abstande von der Mitte erhält, so bedarf es nur noch an dem umschriebenen Kreise eine geeignete Theilung anzubringen, um entsprechende Bruchtheile der Umlaufszeit direct messen zu können. Dem conischen Pendel müssen, ähnlich wie dem gewöhnlichen Uhrenpendel, die Geschwindigkeitsverluste, welche es durch Reibungshindernisse erfährt, mittelst eines Uhrwerkes immer wieder ersetzt werden.

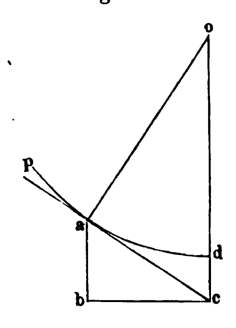
Dreizehnter Abschnitt.

Von der Pendelbewegung.

230 Der Fall auf der schiefen Ebene ist, wie früher (Nro. 80) bereits gezeigt worden ist, eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, deren Beschleunigung dem Verhältnisse der Höhe zur Länge, und deren Endgeschwindigkeit der Quadratwurzel aus der Höhe proportional ist.

Jedes Element a einer gekrümmten Fallbahn (Fig. 195) lässt sich einem Stücke einer schiefen Ebene vergleichen, deren Neigung durch die Tangente des Punktes a gegeben ist. Die gekrümmte Bahn pad entspricht also einer schiefen Ebene mit veränderlicher Neigung, und folglich auch veränderlicher Beschleunigung. Es sei oa der Krümmungshalbmesser und ac die Tangente des Punktes a; die Gerade oc ein Loth. Der Winkel $aod = \varphi$, welchen das Loth mit dem Krümmungshalbmesser bildet, ist dem Neigungswinkel acb der schiefen Ebene gleich, welcher das Bogenelement bei a angehört. Das relative Gewicht bei a, d. h. die Kraft, welche an dieser Stelle ein Gewicht p abwärts treibt, ist daher $p \sin \varphi$. Man bemerkt, dass diese Kraft bei abnehmender Grösse des Winkels, den der Krümmungshalbmesser mit dem Lothe bildet, sich mindert und dass dieselbe bis zu Null herabsinkt, sobald der fallende Körper an einer Stelle ankommt, an welcher die Curve sich in die Horizontalebene verläuft. Die Bewegung ist mithin eine abnehmend beschleunigte. Die daraus hervorgehende Endgeschwindigkeit kann gleichwohl keine andere sein als die von der senkrechten Fallhöhe abhängige. Es ändert sich zwar die Richtung der Bewegung von einem Bahnelemente zum andern. Dies geschieht jedoch in unmerklichen Uebergängen, und der Normaldruck $p \,.\, \cos \varphi$ an beliebiger Stelle vollbringt in seiner Richtung, d. h. in der Richtung des Krümmungshalbmessers, keine Arbeit. Das Quadrat der Endgeschwindigkeit ist folglich


Fig. 195.

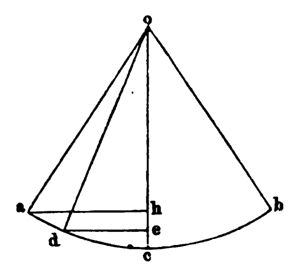


gleich der Summe der Quadrate der Geschwindigkeiten, welche den Höhen der verschiedenen Bahnelemente angehören, also $= v^2 = 2\,g\,h$. Diese Sätze gelten für den Fall auf gekrümmten Bahnen aller Art, also auch auf der Kreisbahn. Lässt man z. B. in einer kreisbogenförmigen Rinne, deren unteres Ende von der wagerechten Ebene tangirt wird, eine recht glatte Kugel herabfallen, so ist die Geschwindigkeit, mit der sie unten ankommt und sich wagerecht weiter bewegt, so gross, als sei sie von der Höhe des Bogens senkrecht herabgefallen. Auf ähnlichem Wege könnte die ursprüngliche Richtung eines fallenden Körpers in jede andere Richtung übergeführt werden, und zwar ohne andern Geschwindigkeitsverlust als den etwa durch Reibungshindernisse veranlassten.

231 Wenn die Linse eines einfachen Pendels (Nro. 229) aus der lothrechten Lage, in welcher sie in Ruhe verharrt, seitwärts abgelenkt und dann sich selbst überlassen wird, so strebt sie, der unmittelbaren Stütze beraubt, in ihre natürliche Gleichgewichtslage zurückzukehren, und beschreibt dabei, weil sie sich von dem Aufhängepunkte nicht entfernen kann, einen Kreisbogen, ähnlich wie eine Kugel in bogenförmiger Rinne.

Es ergiebt sich aus den vorhergegangenen Erörterungen, dass ihre Geschwindigkeit an irgend welcher Stelle der Bahn der bis dahin durchschrittenen Fallhöhe entspricht und dass das Maximum der Geschwindigkeit in dem Augenblicke eintritt, da sie ihre anfängliche lothrechte Lage wieder erreicht hat. Bedeutet o (Fig. 196) den Aufhängepunkt, c den Schwerpunkt der Linse, a ihre grösste Ablenkung (den Ausschlag), so wird sie zurücksinkend einen Bogen adc beschreiben. Bei der Ankunft am Punkte d erreicht sie die Geschwindigkeit

Fig. 196.



$$\sqrt{2\,g\,(he)},$$

und wenn sie endlich bei c in der tiefsten Lage angekommen ist, die grösste Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2\,g\,(hc)}.$$

Mit dieser würde sie sich, befreit von der Verbindung mit dem Aufhängepunkte o, in horizontaler Richtung weiter bewegen. Da sie aber ihren Abstand von o nicht ändern kann, so schwingt sie durch die natürliche Gleichgewichtslage oc nur, um in dem Bogen cb wieder aufzusteigen, und hebt sich, bis sie bei der Ankunft in b in gleicher Höhe mit dem Punkte a die ganze errungene Geschwindigkeit wieder eingebüsst hat. Weil sie aber jetzt ebenso weit wie vorher, nur auf der andern Seite der Ruhelage abgelenkt ist, so muss sie abermals sinken. Der beschriebene Vorgang wiederholt sich demnach u. s. f. So entstehen die Hin- und Herbewegungen des Pendels, die sogenannten Pendelschwingungen.

Dass dieselben, einmal begonnen, nicht ohne Ende fortdauern, beruht darauf, dass die Bewegung nicht ganz ohne Hinderniss vor sich geht, erzeugt, theils durch eine geringe Reibung an der Befestigungsstelle, hauptsächlich aber durch den Widerstand der Luft. So kommt es, dass die Linse bei jeder Schwingung hinter der grössten Steighöhe, welche sie unmittelbar vorher noch erreicht hatte, etwas zurückbleibt, dass demnach ihre Ausschläge stufenweise sich vermindern und endlich verschwindend werden.

Die Schwingung des Pendels ist, wie aus der nähern Analyse dieses Vorganges hervorgeht, eine sehr verwickelte Bewegung. Aus der Ruhe beginnend und mit Ruhe wieder abschliessend, zeigt sie sich auf der ersten Hälfte der Bahn als eine abnehmend beschleunigte, auf der zweiten Hälfte als eine zunehmend verzögerte Bewegung, deren Geschwindigkeit an jeder Stelle, wo sich die Linse gerade befinden mag, abhängig ist von ihrer Senkung unter dem höchsten Stande, welchen sie beim Beginne der Schwingung eingenommen hatte, oder bei Beendigung derselben einnehmen wird.

Die Grösse der Winkelöffnung zwischen den Gränzpunkten einer Schwingung nennt man die Schwingungsweite. Der Ausschlag beträgt die Hälfte dieses Winkels. Man gebraucht auch das Wort Elongation in demselben Sinne wie bei dem conischen Pendel.

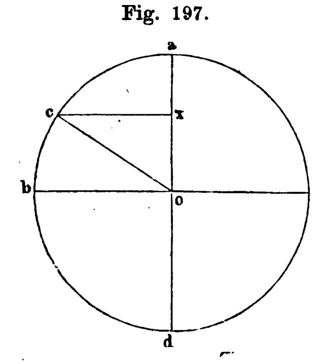
Schon bei einer frühern Gelegenheit (Nro. 80) ist gezeigt worden, dass der Fall in einer kreisbogenförmigen Rinne bei verschiedener, obwohl immer nur geringer Länge des Bogens sehr nahe isochron ist. Dasselbe gilt, und zwar aus demselben Grunde wie an dem angeführten Orte, für die Schwingungen eines Pendels, so lange dessen Elongationen nur gering sind. Die Dauer der Schwingungen lässt sich jedoch aus der Vergleichung des Falls auf Bogensehnen mit dem auf der Bogenkrümmung selbst nicht einmal annäherungsweise ableiten, denn die zuletzt genannte Bewegung verläuft stets in beträchtlich kürzerer Zeit als die erste, obgleich die Endgeschwindigkeit in beiden Fällen gleich ist.

232 Unter der Voraussetzung, dass die Gränze sehr kleiner Schwingungsbögen nicht überschritten werde, führt die folgende Betrachtung zur Kenntniss der Schwingungszeit in ihrer Abhängigkeit von der Pendellänge und der Intensität der Schwere.

Die Kraft, welche das Pendel treibt, ist, wie bekannt, $p \sin \varphi$, wenn φ den Ausschlag und p das im Schwerpunkte concentrirte Gewicht vorstellt. Denken wir uns jetzt ein einfaches Pendel, oder als Annäherung zu demselben eine Linse von verschwindend geringer Dicke an einem fast gewichtslosen Faden hängend, dergestalt, dass das schwingende Pendel ausser dem Gewichte der Linse keine anderen in Betracht kommenden wägbaren Theile besitzt, also sämmtliche schwingenden Theile in ungefähr gleichem Abstande von dem Aufhängepunkte liegen. Diesen Abstand $oa = oc = l$ (Fig. 196) nennt man dann die Länge des

Pendels. Es sei $ah = b$, so ist $\sin\varphi = \frac{b}{l}$, folglich die auf die Pendellinse, tangential zu dem Bogenelemente, welches sie gerade durchschwingt, wirksame Kraft $\frac{p}{l} \cdot b$. Nun ist $\frac{p}{l}$ bei demselben Pendel eine Constante. Die Kraft verhält sich daher wie die senkrechte Entfernung der Linse von dem Lothe oc. Wenn die Elongationen sehr klein werden, nähert sich die Senkrechte b mehr und mehr ihrem Bogen und fällt endlich mit demselben zusammen. Für den Fall sehr kleiner Ausschläge wird daher $b = l\varphi$, und die Kraft verhält sich wie der Weg, den die Linse bis zur lothrechten Lage hin noch zurückzulegen hat. Setzen wir zur Abkürzung die Kraft in dem Abstande $= 1$, nämlich $\frac{p}{l} = a$, und ziehen mit der Länge $b = l\varphi = r$ als Radius den Kreis $abcd$ (Fig. 197). Der Durchmesser desselben $ad = 2r$ bezeichnet als gerade Linie aufgetragen die Schwingungsweite des Pendels. Die Wege $ao = do = r$ und $ox = x$ sind den Kräften proportional, welche die Linse abwechselnd von a gegen die natürliche Gleichgewichtslage o oder von d gegen o treiben. Es sei die Zeit einer Hin- und Herschwingung $= 2t$.

Fig. 197.



Führen wir den Zeitbogen (Nro. 21) ein und setzen demgemäss $2\pi = 2t$, also die einem Bogengrade entsprechende Zeit $= \frac{t}{\pi}$. Während die Zeit, als Gradbogen gemessen, gleichförmig fortschreitet, bewegt sich die Linse des Pendels entlang eines Durchmessers des betreffenden Kreises. Während z. B. die Linse von a bis x vorgerückt ist, hat die Zeit den Bogen $ac = \psi$ beschrieben.

Beim Beginne der Schwingung wurde das Pendel durch die Kraft $P' = \frac{p}{l} \cdot r = ar$ getrieben, bei der Ankunft der Linse in x betrug diese Kraft, immer dem Abstande von o proportional bleibend, nur noch $P'' = ax$. Der Mittelwerth der Kraft, während der Weg von a bis x zurückgelegt wurde, betrug daher

$$P = \frac{P' + P''}{2} = \frac{ar + ax}{2} = \frac{a}{2}(r + x).$$

Die Geschwindigkeit bei der Ankunft in einem Punkte x ergiebt sich im Allgemeinen aus der Gleichung

$$v^2 = 2g\frac{P}{p}s.$$

Indem man für P den soeben gefundenen Werth, und für s den Weg von a bis x, also $s = r - x$ setzt, wird erhalten:

$$v^2 = 2g\,\frac{a\,(r+x)\,(r-x)}{2p} = \frac{ag}{p}\,(r^2 - x^2).$$

Nun ist $ox = x = r\cos\psi$, folglich

$$r^2 - x^2 = r^2\,(1 - \cos^2\psi) = r^2\sin^2\psi \text{ und}$$

$$v = r\sin\psi\,\sqrt{\frac{ag}{p}}.$$

Aus $x = r\cos\varphi$ folgt ferner: der kleine Abzug von x

$$-\,dx = -\,r\sin\psi\,d\psi.$$

Es ist aber auch diese verschwindend kleine Wegesstrecke

$$dx = v\,.\,dt = r\sin\psi\,dt\,\sqrt{\frac{ag}{p}},$$

nämlich gleich dem Producte der bei dem Punkte x erlangten Geschwindigkeit, multiplicirt mit dem Zeitelemente, daher

$$dt\,.\,r\sin\psi\,\sqrt{\frac{ag}{p}} = r\sin\psi\,d\varphi,$$

und

$$dt = d\psi\,\sqrt{\frac{p}{ag}}.$$

Hieraus ergiebt sich, zwischen den Gränzen $\psi = 0$ bis $\psi = \pi$, der Werth der Zeit

$$t = \pi\,\sqrt{\frac{p}{ag}},$$

und indem wieder $a = \frac{p}{l}$ gesetzt wird:

$$t = \pi\,\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Die Zeit einer Pendelschwingung für den Fall geringer Elongationen erhält man durch Multiplication der Zahl 3,14 mit der Quadratwurzel aus dem Quotienten der Pendellänge, dividirt durch die Beschleunigung der Schwere.

Genau denselben Werth hatten wir schon früher (Nro. 229) aus den Beziehungen der Schwingungen in lothrecht stehender Ebene oder den gewöhnlichen zu den conischen Schwingungen abgeleitet.

Die Umlaufszeit des conischen wie des elliptischen Pendels, für den Fall kleiner Elongationen ist $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, also gleich einer Hin- und Herschwingung des gewöhnlichen Pendels. Letzteres, wenn es aus einer Linse besteht, die nur an einem einzigen dünnen Faden hängt, wird durch zufällige äussere Einflüsse, wie Luftzug, sehr leicht veranlasst,

die Schwingungen in der Ebene in solche in elliptischer Bahn zu verwandeln. Die Schwingungsdauer wird dadurch, wie wir jetzt erkennen, nicht geändert.

233 In der Pendelformel $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ ist die Grösse der Schwingungsweiten nicht enthalten. Man könnte daraus schliessen, dass dieselben auf die Dauer der Schwingungen ohne Einfluss seien. Wir dürfen jedoch nicht vergessen, dass bei dem Entwickelungsgange der Formel wir von der Voraussetzung sehr kleiner Weiten ausgegangen waren, dass folglich der auf diesem Wege bewiesene Isochronismus auch nur für kleine Elongationen Geltung hat.

Für die Bestimmung der Schwingungszeit des Pendels im Allgemeinen lässt sich ein endlicher Ausdruck nicht ausfindig machen, was gleichwohl nicht hindert, die Dauer einer Schwingung in jedem besondern Falle mit jeder zu wünschenden Schärfe zu ermitteln. Man wendet zu diesem Zwecke das folgende Verfahren an.

Das Gewicht p des Pendels sei bereits von der Höhe a (Fig. 196) bis zum Punkte d herabgefallen und habe dadurch die Geschwindigkeit v erreicht. Setzen wir wieder die Schwingungszeit $= t$, also die Dauer der Bewegung von a bis $c = \frac{1}{2}t$, die Pendellänge $oc = l$; dann den bereits zurückgelegten Weg $ad = s$, die Fallhöhe $hc = h$ und $ec = x$.

Der in dem unmittelbar folgenden Zeitelemente zurückgelegte Weg ist $ds = v\,.\,dt$, daher

$$dt = \frac{ds}{v}.$$

Es ist aber $v = \sqrt{2g\,(he)} = \sqrt{2g\,(h - x)}$, folglich

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g\,(h-x)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Es ist ferner $(ds)^2 = (dx)^2 + (d\,de)^2$,
und da aus leicht verständlichen Gründen,

$$(de)^2 = x\,(2l - x),$$

also

$$de = (2lx - x^2)^{1/2},$$

$$d\,de = \tfrac{1}{2}\,(2lx - x^2)^{-1/2}\,(2l - 2x)\,dx = \frac{(l - x)\,dx}{\sqrt{2lx - x^2}},$$

und endlich

$$(d\,de)^2 = \frac{(l - x)^2\,dx^2}{x\,(2l - x)};$$

der Werth

$$(ds)^2 = \frac{dx^2\,(2lx - x^2) + dx^2\,(l^2 - 2lx + x^2)}{x\,(2l - x)} = \frac{l^2\,dx^2}{x\,(2l - x)},$$

folglich

$$ds = -\,dx\sqrt{\frac{l^2}{x\,(2l - x)}}.$$

Dieser Ausdruck musste das negative Vorzeichen erhalten, weil das Fortschreiten des Pendels gegen c mit einer Verminderung der Höhe $ec = x$ verknüpft ist.

Wird dieser Werth von ds in die Gleichung (1) eingesetzt, so erhält man

$$dt = \frac{-dx\sqrt{l^2}}{\sqrt{2g\,(h-x)\,x\,(2l-x)}} = \frac{-dx\sqrt{l^2}}{\sqrt{2g\,.\,2l\,(h-x)\,x\left(1-\frac{x}{2l}\right)}}$$

$$= {}^1/_2\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{-dx}{\sqrt{(hx-x^2)\left(1-\frac{x}{2l}\right)}}.$$

Wenn man in dem Nenner dieser Differentialgleichung den unter dem Wurzelzeichen befindlichen Factor $\left(1-\frac{x}{2l}\right)$ als geringfügig vernachlässigt, leitet der zwischen den Gränzen $x = h$ bis $x = 0$ bestimmte Integralwerth zu demselben Ausdrucke $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, welchen wir vorher schon auf anderm Wege, für den Fall kleiner Schwingungsweiten abgeleitet hatten. Das vollständige Integral lässt sich jedoch nur nach Auflösung des Differentialausdruckes in eine Reihe ermitteln. Auf diese Weise hat man gefunden*), dass die Zeit einer ganzen Schwingung von a bis b (Fig. 196) beträgt:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{h}{2l}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{h}{2l}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{h}{2l}\right)^3+\cdots\right\}.$$

Für die Rechnung ist es bequemer, in dieser Gleichung anstatt der senkrechten Fallhöhe h den Winkel der grössten Elongation einzuführen. Nun ist

$$h = l\,(1-\cos\varphi) = 2l\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2;$$

daher

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+{}^1/_4\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2+\frac{9}{64}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^4+\frac{25}{256}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^6+\cdots\right\}.$$

Die gewöhnliche Pendelformel $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ist, wie man sieht, nur das erste Glied einer unendlichen Reihe, deren Glieder jedoch sehr rasch fallen, so dass in den meisten Fällen des Gebrauches das erste ausreicht.

Um die Abweichung der Pendelschwingungen von der Gleichdauer deutlicher übersehen zu können, sind in der folgenden kleinen Tabelle die Schwingungszeiten eines Secundenpendels bei verschiedenen Elongationen zusammengestellt.

---

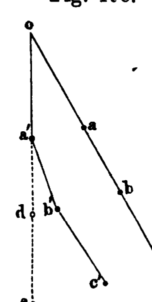
*) Näheres findet man z. B. in *Poisson traité de Mecanique, seconde Edit.* p. 345.

Ausschlag	Schwingungszeit
$0 - 1^0$	1 Secunde
1^0	1,00002
2^0	1,00008
3^0	1,00017
4^0	1,00030
5^0	1,00048
10^0	1,00190
20^0	1,00766

234 **Das zusammengesetzte Pendel.** Jeder hängende Körper, der um eine feste Axe schwingt, kann als ein Aggregat einfacher Pendel gelten, welchen jedoch nicht die volle Freiheit der Bewegung gestattet ist. Denn irgend welcher schwere Punkt dieses Körpers, sich selbst überlassen, übrigens in festem Zusammenhange mit der Drehaxe, würde eine nur von seinem Abstande l vom Aufhängepunkte abhängige Schwingungsdauer annehmen müssen. Weil er sich aber nicht bewegen kann, ausser in Begleitung von allen übrigen Körpertheilen, mit welchen er ein Ganzes bildet, so geräth seine Schwingungsdauer in eine neue Abhängigkeit und kann dadurch beschleunigt oder auch verzögert werden.

Man denke sich drei kleine Bleikugeln a, b und c (Fig. 198), die in verschiedenen Entfernungen vom Aufhängepunkte an einem biegsamen Faden befestigt sind. Sie bilden ein System von drei einfachen Pendeln. Wir beobachten sie von dem Augenblicke an, da sie aus der Ruhelage entfernt ihre Schwingungen beginnen. Da sie anfangs sich in derselben geraden Linie oc befanden, so würden sie, wenn sie in ihren Bewegungen gleiche Winkelgeschwindigkeit behaupten könnten, gleichzeitig durch das Loth oe schwingen müssen. So ist es jedoch nicht. Die Kugel a, welche das kürzeste Pendel bildet, bewegt sich deshalb am schnellsten und hat bereits die Lothlinie erreicht, während b nur bis zur Lage b' vorrücken konnte und c noch weiter rückwärts erst bei c' angekommen ist. Es ist einleuchtend, dass die Fadenstücke zwischen den Bleikugeln dadurch gespannt werden. Diese Spannungen von a' aus gegen o und b' gerichtet bilden einen Winkel und setzen sich in Folge dessen zu einer Resultirenden zusammen, deren Richtung der Bewegungsrichtung der Kugel a entgegengesetzt ist, diese folglich aufhält. Aus demselben Grunde wird die Bewegung der Kugel b' durch das Zurückbleiben von c' verzögert. Ande-

Fig. 198.



rerseits wirkt die Spannung, welche von b' gegen a' gerichtet ist, mit derselben Stärke auch im entgegengesetzten Sinne und verwandelt sich bei b' in zwei Componenten, von welchen die eine den Punkt b' über den dem Halbmesser ob zugehörigen Kreisbogen hebt, die andere denselben Punkt in der Richtung seiner Bewegung beschleunigt, insoweit nicht die Kugel c als Hinderniss entgegentritt und einen Theil dieser beschleunigenden Kraft für sich in Anspruch nimmt.

Aehnliche Wechselbeziehungen treten bei allen schweren Punkten eines zusammengesetzten Pendels hervor. Sie haben zur Folge, dass die der Axe näher liegenden Theile langsamer schwingen, als es ihrer Pendellänge gemäss geschehen müsste, andere entfernter liegende dagegen beschleunigt werden können.

Selbstverständlich muss es demnach für jedes Pendel einen Punkt geben, in welchem diese Einflüsse sich ausgleichen, in der Art, dass derselbe sich ganz so verhält, als sei er der einzige schwere Punkt des schwingenden Körpers, der schwere Punkt eines einfachen Pendels bei gleichem Abstande von der Drehaxe.

Da man die Massengrösse der Körper durch Abwägen bestimmt, so muss die an dem erwähnten bemerkenswerthen Punkt reducirte Masse, bezüglich ihres Zahlenwerthes gleich sein dem an demselben Punkt reducirten Gewichte des Pendels. Man erkennt nun schon, dass es sich um die Bestimmung des S c h w i n g u n g s p u n k t e s handelt, den das Pendel gleichwie jeder andere Körper besitzt, wenn er um eine feste Axe schwingt, die ausserhalb seines Schwerpunktes liegt (Nro. 214).

Die Lage des Schwingungspunktes eines rotirenden Körpers wird ausfindig gemacht, indem man dessen Trägheitsmoment durch sein statisches Moment dividirt. Auf dieselbe Weise lässt sich also auch der Schwingungspunkt eines Pendels ermitteln.

Man hat z. B. nahe über dem einen Ende einer prismatischen Latte eine schneidige Stahlaxe angebracht, so dass, wenn diese Axe in einer geeigneten horizontal gerichteten Pfanne ruht, die Latte gleich einem Pendel schwingen kann. Der Abstand der Schneide vom Schwerpunkte der Latte beträgt $s = 267$ Pariser Linien; Länge der Latte $l = 500'''$; Höhe $h = 35'''$; Gewicht $p = 1060$ Gramm. Hieraus folgt die Grösse des Trägheitsmomentes, bezogen auf die schneidige Axe (Nro. 201 u. 204),

$$M = \frac{l^2 + h^2}{12} p + s^2 p = \frac{l^2 + h^2 + 12 s^2}{12} p;$$

die Grösse des statischen Momentes

$$P = s \cdot p;$$

der Abstand des Schwingungspunktes

$$x = \frac{l^2 + h^2 + 12 s^2}{12 s};$$

und, indem man in diese Gleichung die bekannten Werthe einsetzt:

$$x = \frac{500^2 + 35^2 + 12.267^2}{12.267} = 345{,}42 \text{ Pariser Linien.}$$

Allerdings setzt diese Rechnung voraus, dass die Masse des Pendels vollkommen gleichartig sei. Ist dieses nicht der Fall, oder sind bei den Abmessungen Fehler gemacht worden, so wird sich dies zeigen, wenn man das Pendel schwingen lässt, denn seine Schwingungszeit wird dann von der Zeit $t = \pi \sqrt{\frac{345{,}42}{144 . g}}$ abweichen. So gewinnt man eine Controle für die Richtigkeit der Rechnung, oder wo die Grundlagen für die letztere fehlen, ein experimentelles Hülfsmittel zur Bestimmung der Lage des Schwingungspunktes. Denn es ist klar, dass der Abstand dieses Punktes von der Axe bei dem zusammengesetzten Pendel dieselbe Bedeutung hat, wie bei dem einfachen Pendel dessen Länge. Daher versteht man denn auch unter der Länge eines zusammengesetzten Pendels diejenige eines einfachen von gleicher Schwingungsdauer. Näherungsweise lässt sich dieselbe experimentell bestimmen, indem man ein Pendel, dessen Beschaffenheit derjenigen eines einfachen so nahe wie möglich kommt, neben dem zusammengesetzten Pendel zum Schwingen bringt, dann, nach Bedürfniss, den Faden desselben verkürzt oder verlängert, so lange bis beide gleich schwingen. Es bedarf alsdann nur noch die Länge des einfachen Pendels zu messen.

Der Schwingungspunkt des zusammengesetzten Pendels liegt stets tiefer als sein Schwerpunkt. Dies geht aus der folgenden Betrachtung hervor. Es sei $p z^2$ das Trägheitsmoment, s die Entfernung des Schwerpunktes von der Axe, so ist der Abstand des Schwingungspunktes

$$l = \frac{p z^2 + p s^2}{p s} = s + \frac{z^2}{s}.$$

Der Werth von l ist also immer grösser als s, den einzigen jedoch nur idealen Fall ausgenommen, dass $z = 0$ wird, d. h. dass um den Schwerpunkt herum keine Masse vertheilt, sondern die gesammte Pendelmasse in diesem Punkte wirklich verdichtet ist. Dies ist der Fall des einfachen Pendels, bei welchem Schwerpunkt und Schwingungspunkt zusammenfallen. Je mehr die Masse eines Pendels über seine ganze Länge sich ausbreitet, um so weiter treten beide Punkte auseinander. Z. B. der Schwerpunkt eines dünnen cylindrischen Stabes liegt in der Mitte seiner Länge. Schwingt derselbe um eine winkelrecht zur Länge stehende Axe, die am einen Endpunkte angebracht ist, so ist sein Trägheitsmoment, bezogen auf diese Axe $= \frac{p l^2}{3}$, folglich der Abstand des Schwingungspunktes

$$\frac{p l^2}{3 p . \frac{l}{2}} = {}^2/_3 \, l = {}^4/_6 \, l.$$

Der Schwingungspunkt liegt also in diesem Falle um $^1/_6$ der Länge tiefer, als der Schwerpunkt. Rückt man hierauf die Drehaxe gegen den Schwerpunkt hin, so entfernt sich der Schwingungspunkt weiter von demselben. Hat man z. B. die Axe um $^1/_3\, l$ herabgeschoben, also bis zu $^1/_6\, l$ der Mitte genähert, so fällt der Schwingungspunkt an das äusserste Ende des Stabes. Er rückt sogar über dieses Ende hinaus, d. h. ganz ausserhalb den Rauminhalt des Stabes bis zu jeder beliebigen Entfernung hin, wenn die Axe mehr und mehr in die Nähe der Mitte gelangt.

Umdrehungspendel (Reversionspendel). Das zusammengesetzte Pendel besitzt die sehr bemerkenswerthe Eigenschaft, dass wenn man seinen Schwingungspunkt zum Aufhängepunkt macht, indem man eine schneidige der bereits vorhandenen gleichlaufende Axe durch denselben legt, der frühere Aufhängepunkt die Rolle des Schwingungspunktes übernimmt. 235

Es sei o der Aufhängepunkt, c der Schwingungspunkt, s der Schwerpunkt eines Pendels (Fig. 199); ferner $oc = l$, $os = a$ und $sc = l - a$. Wenn nun das Trägheitsmoment, bezogen auf den Schwerpunkt, mit $p\,z^2$ bezeichnet wird, so ist die Pendellänge

Fig. 199.

$$l = \frac{p\,z^2 + p\,a^2}{p\,a} = \frac{z^2 + a^2}{a},$$

folglich

$$l\,a = z^2 + a^2.$$

Dreht man das Pendel herum und hängt es auf die durch den Schwingungspunkt gelegte Axe, so ist jetzt seine Pendellänge

$$l' = \frac{p\,z^2 + p\,(l - a)^2}{p\,(l - a)} = \frac{z^2 + l^2 - 2\,a\,l + a^2}{l - a}$$

folglich, da $z^2 + a^2 = l\,.\,a$,

$$l' = \frac{l\,.\,a + l^2 - 2\,a\,l}{l - a} = \frac{l\,(l - a)}{l - a} = l.$$

Durch die Umdrehung in der angegebenen Weise hat sich also die Länge des Pendels nicht geändert.

Da die Stelle des Schwingungspunktes eines zusammengesetzten Pendels von vornherein nicht absolut genau bekannt sein kann, und gleichwohl die zweite Axe, deren Schneide natürlich derjenigen der Aufhängeaxe zugekehrt sein muss, nicht nachträglich noch eingefügt werden darf, so hilft man sich durch Anbringung von verschiebbaren Gewichten an der Pendelstange. Diese werden dann an dem übrigens vollendeten Pendel in geeigneter Weise hin- und hergeschoben, bis es auf der einen und andern Axe aufgehängt, gleiche Schwingungsdauer zeigt.

Der Abstand beider Schneiden eines Umdrehungspendels von bestimmter Schwingungsdauer ist in derselben Breite der Erde und bei gleichbleibender Temperatur und Höhe über der Meeresfläche eine abso-

lut unveränderliche Grösse, und bietet aus diesem Grunde ein untrügliches Mittel, eine gegebene Länge immer wieder zu finden. In der That hat der englische Astronom Kater in diesem Sinne die aus der Schwingungsdauer eines Reversionspendels abgeleitete Länge des Secundenpendels zu Greenwich als Grundlage des englischen Maasssystems benutzt. Zu diesem Zwecke war es nicht erforderlich, die Länge des Secundenpendels selbst als Längeneinheit zu wählen. Es genügte, die Länge des Secundenpendels in Theilen des englischen Fusses auszudrücken, um dadurch dessen Länge in unvergänglicher Weise festzustellen.

Die Erfindung und erste theoretische Erklärung des Umdrehungspendels verdankt man Bohnenberger. Auch hat dieser bereits im Jahre 1811, sieben Jahre vor Kater, auf den Gebrauch desselben aufmerksam gemacht.

236 Die Pendelschwingungen erfolgen unter der Einwirkung der Schwere. Die Unveränderlichkeit ihrer Dauer setzt daher Unveränderlichkeit dieser Einwirkung voraus. Wir wollen jetzt untersuchen, in wie weit dieselbe bei der Bewegung in einem widerstehenden Mittel, wie die Luft, möglich ist. Jeder in eine Flüssigkeit eingetauchte Körper verliert dadurch, wie bekannt, einen Theil seines Gewichtes, dessen Betrag gleich ist dem Gewichte des verdrängten flüssigen Mittels. Dieses Gesetz behauptet seine Geltung auch für die Luft.

Es sei V das Volum der Pendelmasse, d die mittlere Dichtigkeit derselben, bezogen auf den leeren Raum, δ die Dichtigkeit der Luft, so ist $V \,.\, d$ das Gewicht des Pendels im leeren Raume, $V \,.\, \delta$ der Gewichtsverlust in der Luft, $V(d - \delta)$ die noch übrig gebliebene bewegende Kraft, folglich

$$g' = g \, \frac{V(d - \delta)}{V \,.\, d} = g \, \frac{d - \varrho}{d}$$

die Beschleunigung, wenn wir unter g die Beschleunigung im leeren Raume verstehen. Die hiernach veränderte Pendelformel heisst:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l \,.\, d}{g\,(d - \delta)}} = \sqrt{\frac{d}{(d - \delta)}} \times \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Man erkennt hieraus, dass die Schwingungsdauer des Pendels in der Luft in der That grösser ist, als im leeren Raume. In Betracht der geringen Dichtigkeit der Luft ist jedoch der Unterschied sehr gering.

Gesetzt, das Pendel sei von Metall und $d = 7{,}8$. Da die Dichtigkeit der Luft bei 0^0 und unter 760 Millimeter Quecksilberdruck $= \delta = {}^1/_{770}$, so folgt

$$\sqrt{\frac{d}{d - \delta}} = \sqrt{\frac{7{,}8}{7{,}8 - {}^1/_{770}}} = \sqrt{\frac{6006}{6005}} = 1{,}000080,$$

daher

$$t_{,} = 1{,}000080\, \pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

wenn die Schwingungszeit im leeren Raume betrug

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Es verhält sich $t : t' = 1 : 1{,}00008$. Daher die Schwingungsdauer dieses Pendels reducirt auf den leeren Raum

$$t = \frac{t_,}{1{,}00008} = 0{,}999917\, t_,.$$

Die Dichtigkeit der Luft verändert sich mit der Temperatur und dem Luftdruck. Vermindert sich der letztere während die erstere zunimmt, so wird der Unterschied zwischen t und t' noch kleiner als der vorher berechnete.

Das Umgekehrte wird durch Verstärkung des Luftdrucks und Verminderung der Temperatur unter 0° herbeigeführt. Die hiervon abhängigen Veränderungen der Schwingungszeit eines in freier Luft schwingenden Pendels können sich jedoch erst in der fünften Decimalstelle der vorstehenden Gleichung fühlbar machen.

Die Luft äussert auf die Bewegungen des Pendels noch einen zweiten Einfluss, indem sie eine allmälige Abnahme der Schwingungsweite herbeiführt. Das Pendel, indem es die Luft durchschneidet, schiebt dieselbe vor sich her und verdichtet sie. Dadurch erzeugt sich ein Gegendruck, der, in welcher Abhängigkeit immerhin derselbe von der Geschwindigkeit des Pendels stehen mag, dahin wirkt, die Bewegung desselben zu vermindern. Beim Niedergange kommt derselbe in Abzug vom relativen Gewichte des Pendels. Er verringert dadurch die Beschleunigung und vergrössert die Zeit des Falles. Beim Erheben addirt er sich zum relativen Gewichte, welches jetzt ebenfalls als Widerstand auftritt. Er vergrössert dadurch die Verzögerung und verkürzt folglich die Zeit des Aufsteigens. Also zur Berechnung der ersten oder beschleunigten Periode jeder Pendelschwingung hat man in der Pendelformel $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$ für g zu setzen, $g_,$ kleiner als g, wodurch natürlich t grösser ausfallen muss, als beim Niedergange im leeren Raume. Für die zweite Periode dagegen muss g mit $g_{,,}$ grösser als g vertauscht werden, was eine Abkürzung von t zur Folge hat.

Da indessen die bezeichneten vom Luftwiderstande abhängigen Störungen, in so weit dieselben bei der beschleunigten Periode jeder Schwingung eintreten, sich bei der folgenden verzögerten Periode in gleicher Ordnung, d. h. in den gleichen Stellungen des Pendels immer auch mit gleicher Stärke wiederholen, so ist zu entnehmen (Nro. 46), dass die verlängerte Bewegungszeit in der einen, durch die abgekürzte in der andern Periode ungefähr wieder ausgeglichen werde, dass also

die Dauer einer ganzen Schwingung durch den Widerstand der Luft keine Aenderung erfahre *).

Dagegen wirkt der Luftwiderstand auf eine allmälige Verminderung der Schwingungsweiten. Denn da das Pendel bei der Ankunft in der Gleichgewichtslage nicht die ganze der senkrechten Fallhöhe entsprechende Geschwindigkeit erreichen konnte, überdies während der Weiterbewegung einer die Schwere g übersteigenden Schwere unterworfen ist, so vermag es dieselbe Höhe nicht wieder zu gewinnen, von der es herabgefallen war. Dasselbe gilt für jede folgende Schwingung, und zwar in einem um so auffallendern Grade, je weniger die Dichtigkeit der Pendelmasse sich von derjenigen der Luft unterscheidet.

Wir haben also bezüglich des Einflusses der Luft auf die Pendelschwingungen zu unterscheiden; einen geringen Gewichtsverlust des Pendels in Folge seines Eintauchens in die Luft, wodurch die Schwingungszeit in sehr geringem Grade vergrössert wird, von dem Widerstande in Folge des Vordringens in der Luft, welcher zwar die Schwingungsdauer unverändert lässt, dagegen von einer Schwingung zur andern eine Abnahme ihrer Weiten (Amplituden) herbeiführt.

237 In der Pendelformel ist keine besondere Rücksicht auf die Beschaffenheit des Körpers genommen, aus welchem das Pendel verfertigt worden, weil, wie aus der gleichen Fallgeschwindigkeit verschiedenartiger Körper im leeren Raume erschlossen wurde, alle wägbaren Stoffe in gleicher Weise durch die Schwere beschleunigt werden. Das Pendel bietet sich nun als ein vorzügliches Hülfsmittel, diesen in der Mechanik so wichtigen Erfahrungssatz experimentell in genauester Weise zu prüfen. Man hat zu diesem Zwecke mit gleich gestalteten Pendels aus sehr verschiedenartigen Körpern verfertigt, wie Metallen, Steinen, Holzarten, Schwingungsversuche angestellt, jedoch keine Abweichungen gefunden, welche die Gränzen der bei so feinen Versuchsmethoden noch gestatteten Beobachtungsfehler übersteigen, oder welche man nicht mit voller Sicherheit von anderen Ursachen als einer bei verschiedenartigen Stoffen ungleichen Schwere hätte ableiten können.

Um die Proportionalität von Masse und Gewicht mit Hülfe des Pendels in Vorlesungen darzuthun, kann man sich mehrere kleine gleich grosse Pendellinsen von der Form wie Fig. 192, b anfertigen lassen, z. B. die eine aus Platin, eine andere aus Blei, eine dritte aus Marmor, eine vierte aus einem festen Holze. Sie werden sämmtlich an sehr feinen Seidenfäden befestigt, deren obere Enden durch enge Oeffnungen gezogen werden, die in einer ebengeschliffenen, horizontal gerichteten Metallplatte

*) Nach Bessel (Poggendorff's Annalen Bd. 12, S. 343) ist indessen der Luftwiderstand doch nicht ganz unerheblich, sondern sein Einfluss nahe so gross, als derjenige der aus dem Wege gedrängten Luft, so dass die bisher übliche Reduction auf den leeren Raum, auf kugelgestaltete Linsen angewendet, nur etwa die Hälfte von derjenigen ausmacht, die man anbringen musste.

in angemessenen Entfernungen von einander angebracht sind. Von diesen Oeffnungen an werden die Pendellängen gerechnet. Oberhalb derselben sind die Enden der Fäden um Rollen gewickelt, die der Drehung einen kleinen aber genügenden Reibungswiderstand entgegensetzen, um ein freiwilliges Aufgehen zu hindern. Durch Drehung derselben im einen oder andern Sinne hat man ein Mittel, die aus den Oeffnungen hervortretenden Fäden länger werden zu lassen oder zu verkürzen, bis endlich sämmtliche Pendel gleiche Schwingungsdauer besitzen. Schon der Augenschein wird dann lehren, dass auch ihre Längen gleich sind.

Wenn man die vier Pendel gleichzeitig in Schwingung versetzt, so wird man bald wahrnehmen, dass die Amplituden der Linse von Holz rascher abnehmen, als die der anderen Pendel, dann folgt die Marmorlinse, während eine Abnahme bei den Metallpendeln erst nach einer langen Reihe von Schwingungen auffallend wird. Die Zeit der Schwingungen bleibt während dieser Vorgänge durch viele Hin- und Herbewegungen hindurch bei allen unverändert, was unmöglich wäre, wenn der Luftwiderstand einen sehr merklichen Einfluss auf die Schwingungsdauer hätte.

238 Zur Bestimmung des absoluten Werthes der Schwere besitzen wir ebenfalls in dem Pendel das zuverlässigste Hülfsmittel. In der That folgt aus der Pendelformel $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, dass die Beschleunigung der Schwere in dem Ausdrucke $g = \frac{\pi^2 l}{t^2}$ gegeben ist. Kennt man also die Länge eines Pendels, so lässt sich aus der beobachteten Schwingungszeit desselben g berechnen.

Die Ableitung der Fallintensität aus der Länge und Schwingungsdauer eines Pendels gehört zu den feinsten experimentellen Untersuchungen, welche die Physik bietet. Auch haben im Laufe dieses Jahrhunderts mehrere der ausgezeichnetsten Physiker und Astronomen einer gründlichen und ganz befriedigenden Lösung dieser Aufgabe diejenige Aufmerksamkeit zugewendet, welche die genaue Kenntniss einer Zahl erfordert, die ihrerseits wieder eine Grundlage so zahlreicher anderer Untersuchungen der Mechanik bildet. In der That haben wir diesen eben so schwierigen als verdienstvollen Arbeiten gegenwärtig eine so zu sagen absolut genaue Feststellung des Werthes g zu verdanken, und zwar nicht bloss für einzelne Punkte der Erde, sondern für jede Stelle ihrer Oberfläche, deren Höhe über dem Meere bekannt ist. Zugleich ist dadurch die Wissenschaft mit einer Anzahl neuer Methoden und neuen Hülfsmitteln des Messens bereichert worden.

239 Die eigentlichen Schwierigkeiten einer derartigen Untersuchung treten jedoch erst dann hervor, wenn es sich darum handelt, den Grad der Sicherheit der Maassbestimmung bis zu den äussersten Gränzen des

zur Zeit Erreichbaren auszudehnen. Denn ziemlich gute Annäherungswerthe lassen sich schon mit den in allen physikalischen Cabinetten vorhandenen Hülfsmitteln erzielen. Da ihre Bestimmung ein sehr schätzbares Mittel des Unterrichts bietet, so wollen wir nicht unterlassen, ein Beispiel der Art hier näher zu betrachten.

Wir wählen zu diesem Zwecke ein Pendel von beträchtlicher Länge, bestehend aus einem dicken Drahte von Eisen, dessen unteres Ende eine schwere Linse trägt, und dessen oberes Ende mit einer schneidigen Axe aus Stahl versehen ist, die in einer ebenfalls aus Stahl verfertigten Pfanne ruht. Letztere bildet eine mit Sorgfalt geglättete und polirte Höhlung, deren Bodenfläche da, wo sie die Axe trägt, eben geschlissen und horizontal gerichtet ist. Die Seitenflächen der scharfkantigen Axe neigen sich unter einem Winkel von ungefähr 60° gegen einander. Bei dieser Anordnung findet, so lange grosse Schwingungsweiten vermieden werden, nur eine äusserst geringe und niemals gleitende Reibung statt.

Die Linse aus Blei hat die Gestalt von zwei flachen Kegeln mit gemeinschaftlicher Grundfläche. Sie erhält dadurch einen kreisförmigen Rand, dessen senkrechten Abstand von der Ebene der Pfanne wir als die Entfernung des Schwerpunktes der Linse von der Axe nehmen wollen. Dieselbe wurde, während das Pendel von seiner Stütze herabhing, auf eine Messstange übertragen und an dieser sodann mittelst einer in Zolle und Linien getheilten halben Toise von Eisen gemessen. Die Ergebnisse mehrerer Maassbestimmungen schwankten zwischen 170,7 und 170,8 Pariser Zoll, entsprechend einer Unsicherheit von ungefähr 1 Linie in der Kenntniss der wahren Länge. Wir wollen dafür setzen 170,75 Pariser Zoll.

Die Länge eines Pendels ist nicht ganz unabhängig von der Temperatur. Bei steigender Temperatur vermehrt sich seine Länge und mit ihr die Schwingungsdauer. Bei sinkender Temperatur verkürzen sich beide. Der Pariser Fuss hat seine richtige Länge bei 16,25° Celsius. Bei einer höhern Temperatur ist folglich die Pendellänge zu kurz gemessen worden; bei niedrigeren Temperaturen hat das Umgekehrte stattgefunden. Die erforderliche Correction ergiebt sich aus der Gleichung

$$a = [1 + \alpha\,(t - 16{,}25)]\;170{,}75$$

mit hinreichender Genauigkeit, wenn auch für α der, streng genommen nur auf die Temperatur 0° als Ausgangspunkt zu beziehende (Nro. 8), Ausdehnungscoefficient des Eisens $\alpha = 0{,}00001235$ gesetzt wird. Nun war die Messung bei 22,25° C. ausgeführt worden. Die auf die Temperatur von 16,25° C. berichtigte Länge ist daher

$$a = (1 + 0{,}00001235\;.\;6)\;170{,}75 = 170{,}763 \text{ Pariser Zoll.}$$

Die betreffende Correction liegt, wie man sieht, schon innerhalb der Gränze der Beobachtungsfehler, und kann daher in unserm Falle das Endresultat nicht wesentlich verbessern.

Die Entfernung des Schwerpunktes der Linse von der Aufhängeaxe kann nicht als die wahre Länge des beschriebenen Pendels angenommen

werden; wohl aber liefert sie das wichtigste Hülfsmittel, um dieselbe zu berechnen, da letztere durch den Quotienten aus der Summe der Trägheitsmomente, dividirt durch die Summe der statischen Momente bestimmt ist (Nro. 234).

Die Linse besteht, wie bemerkt, aus zwei gleichen mit ihren Grundflächen auf einander liegenden Kegeln. Das Trägheitsmoment eines Kegels, bezogen auf einen Durchmesser seiner Grundfläche ist (Nro. 209)

$$= p\,\frac{3\,r^2 + 2\,h^2}{10}.$$

Diesen Werth hat man also nur doppelt zu nehmen, oder für p das Gewicht der ganzen Linse zu setzen, um das Trägheitsmoment derselben, bezogen auf ihren Schwerpunkt, zu erhalten. Ihr Trägheitsmoment, bezogen auf die Pendelaxe, ist daher

$$= p\left(\frac{3\,r^2 + 2\,h^2}{10} + a^2\right).$$

Das Trägheitsmoment des Drahtes, bezogen auf die Pendelaxe, beträgt $q\,\frac{a^2}{3}$ (Nro. 202), indem man denselben, in Betracht seiner im Vergleiche zur Länge sehr geringen Dicke, als eine gerade Linie ansieht. Da nun das statische Moment von Linse und Draht zusammen

$$= a\,p + \frac{a}{2}\,q = \left(p + \frac{q}{2}\right)a,$$

so findet sich die Pendellänge

$$l = \frac{p\left(\frac{3r^2 + 2h^2}{10\,a^2} + 1\right)a^2 + \frac{q}{3}\,a^2}{\left(p + \frac{q}{2}\right)a} = \frac{p + \frac{3r^2 + 2h^2}{10\,a^2}\,p + {}^1/_3\,q}{p + {}^1/_2\,q}\,a.$$

Die Linse wiegt 7011 Gramm $= p$; der Draht 365 Gramm $= q$. Es ist ferner die Kegelhöhe $h = 2{,}10$ Zoll, $r = 2{,}75$ Zoll und $a = 170{,}763$ Zoll (wie oben gefunden wurde). Setzt man diese Werthe in die Gleichung ein, so ergiebt sich

$$l = \frac{7011 + 0{,}77 + 121{,}67}{7011 + 182{,}50} = 169{,}339 \text{ Pariser Zoll.}$$

Die Pendellänge erscheint durch das Gewicht des Drahtes, dessen Schwerpunkt in der Mitte der Höhe liegt, nicht unbeträchtlich verkürzt. Auch der grosse Umfang der Linse hat einen wenn auch nur geringen Einfluss; derselbe äussert sich jedoch im entgegengesetzten Sinne.

Zur Bestimmung der Schwingungsdauer kann man mit Hülfe einer Secundenuhr die Zeit messen, deren das Pendel bedarf, um eine gewisse Anzahl mal an den Ausgangspunkt seines Falles zurückzukehren. Diese Zeit dividirt durch die Zahl der Hin- und Hergänge giebt die Zeit einer Doppelschwingung. Dieses Verfahren ist jedoch nicht zuverlässig, weil das Pendel an der Gränze jeder Elongation sich sehr langsam bewegt,

daher der Zeitpunkt, da es den höchsten Stand eben erreicht hat, kaum mit Sicherheit bestimmbar ist. Empfehlenswerther ist es, die Durchgänge durch die lothrechte Stellung zu zählen, weil in dieser das schwingende Pendel seine grösste Geschwindigkeit besitzt, folglich der richtige Moment des Zusammentreffens eines Durchgangs mit einem Schlage der Secundenuhr unzweideutiger erkannt wird. So entstand, indem man den Zeitraum zwischen zweien Coincidenzen (Zusammentreffen) bestimmte, die folgende Reihe:

13 . 17,5 . 22 . 26 . 30 . 34,5 . 39 . 43 . 47,5 . 51,5 . 56 . 60,5 . 65 . 69 . 73 . 77,5 . 82 . 86 . 90,5 . 95 . 99.

Die erste und die letzte dieser Zahlen, die 13te und 99ste Secunde bezeichnen zwei Zeitpunkte, bei welchen nach dem Urtheile von Auge und Ohr der Secundenschlag mit dem Durchgange des Pendels durch seine mittelst eines Kreidestrichs auf dem Boden winkelrecht zur Schwingungsebene festgehaltene, natürliche Ruhelage coincidirte (zusammenfiel). Die zwischen der 13ten und 99sten Secunde bemerkbaren Zahlen geben nur annäherungsweise die Zeitpunkte der auf den ersten folgenden Durchgänge, alle nur von einer Seite her gezählt. Zwischen je zwei der in dieser Weise aufgezeichneten Secundenzahlen fallen also ungefähr zwei Schwingungen, und zwischen die 13te und 99ste Secunde 40 volle Schwingungen. Die Zeit einer Schwingung ist daher

$$= \frac{99 - 13}{40} = 2{,}150 \text{ Secunden} = t.$$

Zufolge der Beobachtungsweise des ersten und letzten Zeitpunktes der Versuchsreihe, welche dieser Zeitbestimmung zu Grunde liegt, lässt sich der völlige Ausschluss kleiner Fehler keineswegs verbürgen. Eine grössere Sicherheit in der Kenntniss der wahren Schwingungszeit findet man daher aus dem arithmetischen Mittel der Ergebnisse mehrerer Versuchsreihen. In unserm Falle ergab sich jedoch zufällig der Mittelwerth aus zahlreichen Versuchen nur um den tausendsten Theil einer Secunde niedriger.

Halten wir uns an die oben gefundene Zahl, so ist

$$g = \frac{\pi^2 l}{t^2} = \frac{9{,}8696 \;.\; 169{,}337}{2{,}15 \;.\; 2{,}15} = 361{,}556 \text{ Pariser Zoll.}$$

Diese aus Pendelschwingungen, deren Amplituden zwar klein, jedoch nicht unmessbar klein waren, abgeleitete Zahl bedarf noch einer Berichtigung wegen des unvollkommenen Isochronismus. Benutzt man mit Rücksicht hierauf aus der vollständigen Gleichung der Schwingungszeit des Pendels (Nro. 331) noch das zweite Glied, mit der Abänderung, dass anstatt $\sin \frac{\varphi}{2}$ der Näherungswerth $\frac{\varphi}{2}$ gesetzt wird, was hier unbedenklich geschehen kann, so erhält man den für kleine Schwingungsbögen ausreichend genauen Ausdruck

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\varphi^2}{4}\right),$$

folglich

$$t^2 = \frac{\pi^2 l}{g} \left(1 + \frac{\varphi^2}{16}\right)^2,$$

und

$$g = \frac{\pi^2 l}{t^2} \left(1 + \frac{\varphi^2}{16}\right)^2.$$

Die grössten Ausschläge des Pendels während der Dauer der beschriebenen Messungen betrugen ungefähr 4^0, und bei Beendigung derselben nicht viel weniger. Nun ist $180^0 : 4^0 = \pi : \varphi$, daher $\varphi = \frac{3{,}14}{45}$ und

$$g = 361{,}556 \left(1 + \frac{(3{,}14)^2}{16 \,.\, (45)^2}\right)^2 = 361{,}556 \; (1 + 0{,}0003114)^2$$
$$= 361{,}556 \,.\, 1{,}00062 = 361{,}780 \text{ Pariser Zoll.}$$

Dieser Werth von g, wäre derselbe auch vollkommen frei von Beobachtungsfehlern bestimmt worden, giebt doch nur die Grösse der Schwere in der Luft, und zwar mit Beziehung auf die besondere Masse, aus welcher die Pendellinse besteht. Um die Correction auf den leeren Raum (Nro. 236) für unser Beispiel in Anwendung zu bringen, hat man zu beachten, dass die Linse des Pendels aus Blei besteht, dessen Dichtigkeit $d = 11{,}38$. Nun findet man, wie früher (Nro. 236) gezeigt wurde, die Beschleunigung im leeren Raume, indem man den für die Luft geltenden Werth mit $\sqrt{\frac{d}{d - \delta}} = \sqrt{\frac{11{,}38}{11{,}38 - 1/_{770}}} = 1{,}000057$ multiplicirt. Die Zahl 361,780 verwandelt sich dadurch in 361,800 = 30,15 Pariser Fuss.

240 Aus der Kenntniss des Werthes der Schwere folgt diejenige der Länge des Secundenpendels, d. h. eines Pendels, dessen Schwingungszeit genau gleich einer Secunde ist. Denn es ist im Allgemeinen die Pendellänge

$$l = \frac{g t^2}{\pi^2};$$

wenn daher $t = 1$ gesetzt wird, so folgt $l = \frac{g}{\pi^2}$. D. h. man erhält die Länge des Secundenpendels aus dem Quotienten der Beschleunigung der Schwere dividirt durch das Quadrat des Peripherieverhältnisses.

Die Länge des Secundenpendels ist, seit den ersten sehr genauen Messungen, die Borda bereits im Jahre 1792 ausgeführt hat, an vielen Orten und von einer grossen Anzahl von Beobachtern bestimmt worden. Zu den zuverlässigsten dieser Bestimmungen gehören die von Biot und Arago, von Kater und die neuesten von Bessel. Borda's Pendel bestand aus einer Platinkugel, die an einem feinen 12 Fuss langen

Platindrahte hing. Mit demselben oder doch einem ähnlich construirten Pendel haben Biot und Arago im Jahre 1821 die Versuche Borda's wiederholt. Kater, wie schon bemerkt wurde, hat 1818 das Reversionspendel in Anwendung gebracht. Bessel (1828) hat die Methoden seiner Vorgänger mit der bei diesem berühmten Astronomen bekannten Umsicht geprüft, und dieselben mit einer neuen, ihm eigenthümlichen vermehrt. Sie bestand darin, nicht die Länge und Schwingungszeit eines Pendels, sondern die Schwingungszeit zweier Pendel zu messen, deren Länge genau um die ganze Länge der *Toise du Perou* verschieden gemacht war. So entstanden zwei Gleichungen, aus welchen g und folglich auch die Länge des Secundenpendels abgeleitet werden konnte. Hinsichtlich der Vorzüge dieses Verfahrens müssen wir auf die Abhandlung verweisen, von welcher ein Auszug in Poggendorff's Annalen Bd. 12, S. 337 niedergelegt ist.

Die Schwingungszeit wurde von allen Beobachtern seit Borda nach der Methode der Coincidenzen gemessen. Das Pendel wird zu diesem Zwecke vor dem Pendel der Secundenuhr so aufgehängt, dass die kugelförmige Linse des erstern in seiner Ruhelage einen Theil der Linse des Uhrpendels deckt. Dieser Theil der Linse wird geschwärzt, aber mitten im Geschwärzten eine weisse Stelle, die zugleich dem Mittelpunkte der Linse entspricht, gelassen. Man beobachtet dann mittelst eines Fernrohres den weissen Fleck in ziemlicher Vergrösserung, während beide Pendel sich in schwingender Bewegung befinden. Der Augenblick seines Verschwindens in der Lothlinie ist derjenige einer Coincidenz beider Pendel. Es bedarf dann nur noch die Anzahl der in den Zeitraum zwischen zweien Coincidenzen fallenden Schwingungen zu zählen, und aus einer hinreichenden Menge solcher Beobachtungen das Mittel zu nehmen.

241 Die Länge des Secundenpendels ändert sich mit der Breite und Höhe des Beobachtungsortes. Für eine beliebige Breite β lässt sie sich mittelst der Formeln

$$l^{\text{Par. L.}} = 440,435\ (1 - 0,00259 \cos 2\beta),$$

und

$$l^{\text{mm}} = 993,547\ (1 - 0,00259 \cos 2\beta)$$

durch Rechnung bestimmen.

Diesen Formeln sind die Beobachtungen Bessel's zu Grunde gelegt, wonach die Länge des Secundenpendels in Königsberg 11,2 Toisen über der Ostsee und unter 54° 42′ 50″ nördlicher Breite 440,8147 Pariser Linien beträgt.

Durch Multiplication mit $\pi^2 = 9,8696$ erhält man

$$g^{\text{Par. L.}} = 4346,92\ (1 - 0,00259 \cos 2\beta),$$

und

$$g^{\text{mm}} = 9805,92\ (1 - 0,00259 \cos 2\beta).$$

Es sind dies die bereits früher (Nro. 44) angegebenen Gleichungen, nur in diesem Falle in Pariser Linien und in Millimeter ausgedrückt.

Die Aenderungen der Schwere und der davon abhängigen Längen des Secundenpendels mit der Breite, nämlich bei verändertem Standorte in der horizontalen Richtung aber unveränderter Höhe über der Meeresoberfläche, stehen unter dem zusammengesetzten Einflusse der Abplattung der Erde und der Schwungkraft, wie dies schon früher (Nro. 218) des Näheren erörtert wurde.

242 Auch mit der Höhe des Standortes ändert sich die Länge des Secundenpendels, weil die Schwere jedes Körpers im umgekehrten Verhältnisse zum Quadrate seiner Entfernung vom Mittelpunkte der Erde sich vermindert. Wenn daher der mittlere Erdhalbmesser mit r bezeichnet wird, die Höhe des Ortes, an welchem das Pendel schwingt, über der Meeresfläche mit h, ferner die Schwere an der Meeresküste und in dieser Breite mit g, die Schwere in der Höhe h mit g', so ist

$$g' : g = r^2 : (r + h)^2,$$

folglich

$$g' = g \frac{r^2}{(r + h)^2};$$

also auch, da $g : l = g' : l'$ oder $g : g' = l : l'$,

$$l' = \frac{l r^2}{(r + h)^2}.$$

Die Formeln des vorhergehenden Paragraphen, wenn man auf Breite und Höhe des Standortes Rücksicht nimmt, verwandeln sich in die folgenden

$$l' = l \frac{r^2}{(r + h)^2} (1 - 0{,}00259 \cos 2\beta),$$

$$g' = g \frac{r^2}{(r + h)^2} (1 - 0{,}00259 \cos 2\beta).$$

Während der berühmten, durch die Pariser Akademie veranlassten und im Laufe der Jahre 1735 bis 1744 ausgeführten peruanischen Gradmessungen haben De la Condamine und Bouguer die Schwingungsdauer eines und desselben Pendels, in Guayaquil an der Küste des stillen Oceans, in Quito und auf dem Berge Pinchincha mit derjenigen in Paris verglichen. Aus den Beobachtungen Maupertuis' in Torneo liess sich die Schwingungsdauer desselben Pendels unter dem 66sten Breitegrade ableiten.

Man zählte die während eines Tages stattfindenden Schwingungen. Es sei n die gefundene Zahl, T die Dauer der Beobachtungszeit, so erfolgt die Dauer einer Schwingung

$$t = \frac{T}{n} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Hieraus ergiebt sich $T^2 = n^2 \pi^2 \frac{l}{g}$ und

$$\frac{n^2}{g} = \frac{T^2}{l \pi^2},$$

d. h. das Quadrat der Schwingungszahl dividirt durch die Schwere an dem Beobachtungsorte ist eine Constante. Mit Beziehung auf zwei verschiedene Beobachtungsorte hat man daher $\frac{n^2}{g} = \frac{n'^2}{g'}$, folglich

$$g' = g \frac{n'^2}{n^2}.$$

Mittelst dieser Gleichung lässt sich die Beschleunigung der Schwere, ohne Kenntniss der Pendellänge, für die verschiedenen Orte bestimmen, wenn sie nur für einen derselben, z. B. für Paris bekannt ist. Zu demselben Resultate muss aber auch die Rechnung, gestützt auf die Gleichung

$$g = 9805{,}92 \frac{r^2}{(r + h)^2} (1 - 0{,}00259 \cos 2 \beta)$$

führen.

In der folgenden Tafel sind die aus den Pendelschwingungen abgeleiteten, also beobachteten mit den berechneten Werthen zusammengestellt.

	n	Breite	Höhe über dem Meere	g	
				beobachtet	berechnet
Paris	98891	48° 50′ n. B.	185′	9808,8	9808,9
Torneo . . .	98964	66° — „	0	9822,5	9822,9
Guayaquil . .	98770	2° 11′ s. B.	0	9784,8	9780,6
Quito	98740	0° 14′ „	8970	9778,9	9771,6
Pinchincha . .	98720	0° 14′ „	14988	9774,9	9765,6

Der Halbmesser der Erde wurde zu 19630000 Pariser Fuss angenommen.

Die drei letzten Beobachtungsorte liegen nahe unter derselben Breite. Die an diesen Orten beobachteten Werthe von g stimmen mit den berechneten nahe genug überein, um zu zeigen, dass das Gesetz der Abnahme der Schwere auch schon für irdische Verhältnisse Geltung hat und fühlbar wird.

243 **Foucault's Pendel.** Wird ein Pendel in Schwingung versetzt, das ähnlich dem conischen Pendel (Nro. 229) nach allen Richtungen beweglich ist, entweder, weil es an einem feinen biegsamen Faden hängt,

oder für den Fall eines unbiegsamen Stabes, weil derselbe an zweien einander rechtwinklig durchkreuzenden Stahlschneiden hängt, so lässt sich sehr bald eine Veränderung in der Lage der Schwingungsebene wahrnehmen, in der Art, dass sich dieselbe stetig fort zur rechten Hand des Beobachters dreht. Diese Erscheinung ist zuerst von Foucault beobachtet oder doch zur wissenschaftlichen Geltung gebracht, und als eine Folge der Axenumdrehung der Erde erklärt worden. Während nämlich das Pendel, so weit seine Bewegung eine freie, d. h. von äusseren Einflüssen unabhängige ist, seine Schwingungsebene gemäss dem Trägheitsgesetze behauptet, muss sein Aufhängepunkt als fester Bestandtheil der Erdoberfläche an deren Rotation um die Erdaxe Theil nehmen, folglich mit seinem Meridian in jeder Secunde einen Winkel $co = \frac{2\pi}{86164}$ beschreiben, wodurch die Ebene des Meridians ihre Stellung zu der Schwingungsebene des Pendels stufenweise mehr und mehr verändert. Angenommen, dass beide Ebenen zu einem gewissen Zeitpunkte zusammenfielen, also das Pendel in der Richtung des Meridians oscillirte, so lehrt die Rechnung, dass sie in beliebiger Breite β nach t Secunden um einen Winkel $\varphi = \frac{2\pi \sin\beta \, . \, t}{86164}$ von einander abweichen müssen, und zwar immer in der Weise, dass die Schwingungsebene auf der Nordseite sich zur Rechten, auf der südlichen Erdhälfte zur Linken des Beobachters zu drehen scheint (Nro. 25, δ). Liesse sich ein schwingendes Pendel unmittelbar über dem Nordpole beobachten, so würde es hiernach im Laufe von 24 Stunden eine volle Umdrehung im Kreise herum bewerkstelligen müssen; unter dem Aequator würde es seine anfängliche Schwingungsebene unverändert beibehalten, unter 30° Breite würde es täglich eine halbe Umdrehung vollenden u. s. w.

Diese Resultate der Theorie sind an vielen Orten durch Foucault und Andere experimentell bewährt worden, und liefern dadurch sehr bemerkenswerthe physikalische Belege für die tägliche Umwälzung der Erde um ihre Axe.

Die betreffenden Versuche gelingen am sichersten mit sehr langen Pendeln und sehr schweren Linsen, weil bei diesen störende Einflüsse, wie Erschütterungen, Luftbewegungen u. d. m. weniger rasch zur Geltung kommen.

244 **Dichtigkeit der Erde.** Das Pendel in seiner Ruhelage zeigt im Allgemeinen zwar die Richtung der Schwere. Es ist aber schon früher (Nro. 218) erörtert worden, dass dieses Ergebniss der Erfahrung in einer gewissen Abhängigkeit zu der Umwälzung der Erde um ihre Axe steht, und dass die wahre Richtung der Erdanziehung nur am Aequator und an den Polen mit derjenigen des Pendelfadens ganz genau zusammenfallen kann.

Ausser dieser durch die Schwungkraft bedingten Störung giebt es aber noch eine andere, welche von einer ungleichartigen Beschaffenheit der Erdmasse und insbesondere von der unregelmässigen Gestalt der Erdoberfläche abhängig ist; deren Bedeutung jedoch sich nicht mit gleicher Sicherheit voraussehen und für beliebige Punkte der Erde durch Rechnung bestimmen liess. Indessen behauptete schon Newton, dass in Folge der allen materiellen Theilen anhängenden wechselseitigen Attractionskraft das Loth von den Gebirgsmassen abgelenkt werden müsse. Als Thatsache wirklich beobachtet wurde ein derartiger Einfluss zuerst im Jahre 1749 von Bouguer und Condamine in der Nähe des Chimborasso. Späterhin wurde sein Auftreten aber auch anderwärts bestätigt, und als ein höchst wichtiger experimenteller Beleg für das Stattfinden einer wechselseitigen Anziehung sämmtlicher Erdtheile erkannt.

Die seitliche Ablenkung des Pendels durch die Anziehung steiler Felsen und Gebirgsmassen kann auf folgende Art wahrgenommen werden. Die Bestimmung der geographischen Breite eines Ortes mittelst des Höhenkreises basirt auf die Feststellung der Schwerlinie und der von ihr abhängigen Horizontalebene, oder vielmehr derjenigen Ebene, welche, weil sie das Loth rechtwinklig durchschneidet, als Horizontalebene angenommen wird. Erfährt daher das Pendel unter dem Einfluss eines nahen Berges von der wahren Schwerlinie des betreffenden Ortes eine seitliche Ablenkung nach Norden oder nach Süden, so entsteht in der Breitebestimmung ein kleiner Fehler, und zwar in entgegengesetztem Sinne, je nachdem die Ursache der ablenkenden Kraft auf der Nord- oder Südseite des Lothes ihren Sitz hatte.

Die Breite eines Ortes lässt sich aber auch trigonometrisch aus der unzweifelhaft richtig bestimmten geographischen Breite benachbarter Orte, die jenem störenden Einflusse nicht unterworfen sind, ableiten; wodurch nicht nur die Quelle des bezeichneten Fehlers entdeckt wird, sondern auch die Grösse desselben, nämlich der Winkel φ, den das Loth mit der scheinbaren Richtung desselben bildet, gemessen werden kann.

Beide Kräfte, die Schwere und die seitlich ablenkende Kraft stehen rechtwinklig oder fast rechtwinklig auf einander. Da die Grösse g der einen bekannt ist, so kann aus dem gemessenen Ablenkungsbogen φ, nach dem Gesetze des Parallelogramms der Kräfte, die andere berechnet werden. Sie ist $g \operatorname{tng} \varphi$, oder mit Rücksicht auf die Kleinheit des Bogens φ, auch $g \varphi$.

Nach dem Newton'schen Gesetze der Massenanziehung steht die Stärke der wechselseitigen Einwirkung zweier Körper aus der Entfernung im zusammengesetzten geraden Verhältnisse ihrer Massen, und im umgekehrten zum Quadrate des Abstandes ihrer Schwerpunkte von einander. Dies gilt in gleicher Weise für die Gesammtanziehung der Erde, wie für diejenige eines Theiles derselben auf die Pendelmasse. Bezeichnet man daher die letztere mit p, die der Erde mit E, die des seitlich

ablenkenden Berges mit M, endlich die zugehörigen Abstände, von Schwerpunkt zu Schwerpunkt mit R und s, so darf man setzen

$$g : g\varphi = \frac{Ep}{R^2} : \frac{Mp}{s^2},$$

folglich

$$E = \frac{MR^2}{\varphi s^2}.$$

Für R kann man den mittlern Erdhalbmesser setzen. Lässt sich nun die Masse sowie die Lage des Schwerpunktes eines Berges ermitteln, der in nördlicher oder südlicher Richtung eine merkliche Abweichung des Pendels aus dem Lothe bewirkte, so ist die Möglichkeit gegeben, die Grösse der Erdmasse zu berechnen.

Wenn dann ferner die gefundene Masse durch den bekannten cubischen Inhalt der Erde dividirt wird, ergiebt sich die Grösse ihrer mittlern Dichtigkeit.

Im Laufe der Jahre 1772 bis 1776 haben Maskelyne und Hutton *) diesen Weg wirklich eingeschlagen, um die Dichtigkeit der Erde zu bestimmen. Die Gelegenheit bot der zu diesem Zwecke sehr günstig gelegene Berg Shehallien (Perthshire in Schottland), dessen Gestalt und geognostische Beschaffenheit die Bestimmung der Dichtigkeit und Lage des Schwerpunktes annähernd möglich machten, und welcher von West nach Ost sich ziehend auf seinem Nord- und Südabhange steil genug war, um eine grosse Annäherung an den Schwerpunkt zu gestatten.

Hutton, der nach den gewonnenen Beobachtungsresultaten die Rechnung ausführte, fand für die Dichtigkeit der Erde die Zahl 4,71. Wenn auch dieses Ergebniss trotz aller darauf verwendeten Mühe und Sorgfalt doch nur als ein Annäherungswerth betrachtet werden konnte, so ging doch unzweifelhaft so viel daraus hervor, dass die mittlere Erddichte beträchtlich grösser ist, als diejenige der obersten Erdrinde, so weit Menschen bisher in dieselbe eingedrungen sind.

Torsionspendel. Nach einer genauern Methode hat Cavendish **) einige Zeit nachher (1798) die Dichtigkeit der Erde zu messen gesucht. Anstatt einer Gebirgsmasse von geometrisch nicht genau bestimmbarer Gestalt liess er eine grosse Bleikugel auf das Pendel einwirken, und statt die Stärke der Anziehung mit der Schwere zu vergleichen, wurde zur Bestimmung derselben ein ungleich empfindlicheres Hülfsmittel, die Torsionskraft, d. h. der elastische Widerstand eines dünnen und langen Drahtes gegen die Drehung, in Anwendung gebracht. 245

Wird nämlich ein von seinem Befestigungspunkte senkrecht herabhängender Faden durch ein anhängendes Gewicht gerade gespannt, so ist, wie später des Näheren gezeigt werden soll, sein Widerstand gegen

*) Gehler's physikalisches Wörterbuch, Bd. 3, S. 944. — **) Gehler Bd. 3, S. 950.

Drehung dem bereits gebildeten Drehungsbogen genau proportional.

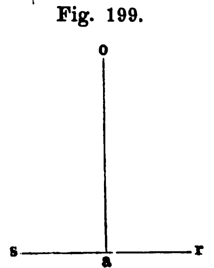


Fig. 199.

Trägt der Faden oder Draht oa (Fig. 199) an seinem untern Ende einen in horizontaler Lage befestigten Stab rs, dessen Länge $= 2r$, und wird dieser durch irgend welche Veranlassung gezwungen, sich in der Horizontalebene zu drehen, so dass die von dem Drehungsmittelpunkte a gleich weit entfernten Punkte r und s des Querstabes genöthigt sind, Kreisbögen zu beschreiben, so tritt alsbald der Torsionswiderstand hervor.

Es werde die Grösse desselben, an einen der Punkte r oder s reducirt, für einen Drehungsbogen von 1^0 mit f bezeichnet. Derselbe muss sich nach dem oben angegebenen Erfahrungssatze bis zu

$$K = nf$$

vermehren, wenn der Stab rs aus seiner anfänglichen Gleichgewichtslage bis zu einem Winkel von n^0 abgelenkt wird.

Ueberlässt man den aus seiner Gleichgewichtslage gebrachten Stab sich selbst, so wird er ähnlich einem Pendel eine Reihe von Schwingungen vollführen, deren Elongationen nach und nach abnehmen, bis endlich die Ruhelage wieder hergestellt ist. In der That ist der in der Horizontalebene um einen elastischen Draht schwingende Stab selbst ein Pendel, von dem Schwerependel wesentlich sich nur dadurch unterscheidend, dass bei diesem die Schwere, bei jenem die Elasticität die Triebfeder der Schwingungen ist.

Der Entwicklung der bekannten Pendelformel $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ liegt die Annahme zu Grunde, dass die Kraft, welche das Pendel treibt, in jedem Augenblicke sich wie der Weg verhält, den die schwingende Masse bis zum Eintritt in die natürliche Ruhelage noch zurückzulegen hat (Nro. 232). Genau dasselbe gilt auch hier, da die Torsionskraft sich wie die Grösse des Drehungsbogens verhält. Um daher die gewöhnliche Pendelformel für diesen Zweck anwendbar zu machen, bedarf es nur an die Stelle von g, das in der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ die Beschleunigung der Schwere vorstellt, die von der Torsionskraft abhängige Beschleunigung, und zwar die für den Abstand $= 1$ von der Gleichgewichtslage geltende einzusetzen (Nro. 232).

Nun wurde oben die auf den Abstand $\frac{rs}{2} = r$ (Fig. 199) reducirte Torsionskraft mit f bezeichnet. Dieselbe in dem Abstande $= 1$ von der Drehaxe beträgt daher $r \,.\, f$. Reducirt auf den Schwingungspunkt des Torsionspendels, verwandelt sie sich in $\frac{rf}{l}$. Es sei ferner die auf den-

selben Punkt reducirte Pendelmasse $= m$, so erhält man für die gesuchte Beschleunigung den Werth $g \frac{rf}{ml}$. Es folgt hieraus, dass die Schwingungszeit des Torsionspendels

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g \frac{rf}{ml}}} = \pi \sqrt{\frac{m l l}{g r f}};$$

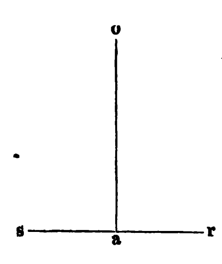
dass also

$$f = \frac{\pi^2 m l^2}{g r t^2}.$$

Der Werth $m l^2$ stellt bekanntlich das Trägheitsmoment des Pendels vor. Kann dieses sowie die Schwingungszeit empirisch bestimmt werden, so lässt sich dann die auf den Abstand r vom Drehungspunkte reducirte Torsionskraft f durch Rechnung ableiten. Dabei ist es gestattet, durch Wahl eines sehr dünnen und langen Drahtes diese Kraft bis zu einem äusserst geringen Werthe zu vermindern.

Nun denke man sich an den beiden Enden des Querstabes rs (Fig. 200) kleine Kugeln von Blei oder besser von Platin angebracht, und diesen dann von der Seite zwei andere viel grössere kugelgestaltete Bleimassen genähert, z. B. der Kugel s von der rechten Seite, der Kugel r von der linken, so jedoch, dass die Mittelpunkte der vier Kugeln genau in dieselbe wagerechte Ebene fallen. Findet zwischen jedem der beiden Kugelpaare eine wechselseitige Anziehung statt, so müssen sich diese beiden Anziehungen den getroffenen Anordnungen gemäss unterstützen, und es muss sich dies durch eine Drehung des Stabes rs in der Horizontalebene zu erkennen geben. Eine solche Drehung wurde nun von Cavendish wirklich wahrgenommen und gemessen. Der Drehungsbogen $r\varphi$ multiplicirt mit dem aus Schwingungsversuchen abgeleiteten Werthe von f gab die Stärke der Anziehung, welche sich zu dem Gewichte p der einen oder andern der kleinen Kugeln verhalten muss, wie das Product $2M \cdot p$ der doppelten Masse einer grossen Kugel in diejenige der kleinen, dividirt durch das Quadrat der Entfernung s ihrer Mittelpunkte, zu dem Producte der Erdmasse in die Masse p, dividirt durch das Quadrat des Erdradius. Es gilt also die Proportion

Fig. 200.



$$r\varphi f : p = \frac{2Mp}{s^2} : \frac{Ep}{R^2},$$

aus welcher folgt: die Erdmasse

$$E = \frac{2MR^2p}{s^2 r \varphi f}.$$

Der aus den Versuchen von Cavendish abgeleitete Werth für die Dichtigkeit der Erde betrug 5,48.

Neuere Versuche von Reich *) in Freiberg, welche im Jahre 1838 veröffentlicht worden sind, führten fast zu demselben Resultate, nämlich zu der Zahl 5,44.

Fast gleichzeitig hatte sich Baily **) in London mit einer sehr umfangreichen Untersuchung über denselben Gegenstand beschäftigt, die aber erst im Jahre 1843 bekannt geworden ist. Er fand den etwas höhern Werth 5,66.

Endlich hat Reich ***) im Jahre 1852 die früheren Versuche einer sorgfältigen Revision unterworfen und dieselben durch zahlreiche neue vermehrt, aus welchen die Zahl 5,58 als wahrscheinlichster Werth für die Dichtigkeit der Erde hervorgeht.

Die Apparate, welche Reich und Baily angewendet haben, sind im Wesentlichen dem von Cavendish ähnlich, mit Rücksichtsnahme jedoch auf mehrere wichtige Verbesserungen, welche die Erfahrungen der neueren Zeit erlaubten.

In der Figur 201 ist der von Cavendish construirte Apparat dargestellt; Fig. 202 giebt seine Projection auf die Horizontalebene. Die grossen Bleikugeln sind durch u und v vorgestellt. An den unteren Enden unbiegsamer Stäbe befestigt, hängen sie von einem mit der Decke des Zimmers verbundenen Gestelle herab. Der Wagebalken oder horizontale Träger der kleinen Kugeln s und r muss möglichst geringes Gewicht mit genügender Festigkeit verbinden. Er war aus trocknem Tannenholz verfertigt und hing an einem Silberfaden oa, dessen Torsionskraft das Maass für die Grösse der wechselseitigen Anziehung der Kugeln bilden sollte. Um die Torsionswage vor äusseren Einflüssen, wie Luftzug, zu schützen, war sie von einem Gehäuse aus leichtem Holze umgeben. Die späteren Beobachter bekleideten dasselbe noch zum Schutz vor zufälligen elektrischen Störungen ausserhalb wie innerhalb mit einem Metallüberzuge (Stanniol).

Die beiden Enden des Wagebalkens trugen feine Gradetheilungen. Gegen das eine oder andere derselben konnte ein Fernrohr ll' mit Fadenkreuz gerichtet werden. Das Gehäuse war an den den Theilungen gegenüberliegenden Stellen durchbrochen.

Dieser ganze Apparat befand sich in einem ringsum abgeschlossenen dunklen Raume. Man beabsichtigte dadurch, jedem raschen Wechsel der Temperatur vorzubeugen. Zum Zwecke der Beleuchtung der Gradetheilung war eine kleine Oeffnung gelassen, durch welche das mittelst eines Convexglases concentrirte Licht der Lampe g Zutritt hatte.

Die Stellung der grossen Kugeln konnte, wie aus der Zeichnung ersichtlich, von Aussen geleitet werden. Beim Beginn eines Versuches

*) Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde. Freiberg 1838. — **) Poggendorff's Annalen, Bd. 57, S. 453. — ***) Poggendorff's Annalen, Bd. 85, S. 180.

standen sie winkelrecht gegen den Balken der Drehwage; also der Mittelpunkt einer jeden der grossen Kugeln in gleichem Abstande von den

Fig. 201.

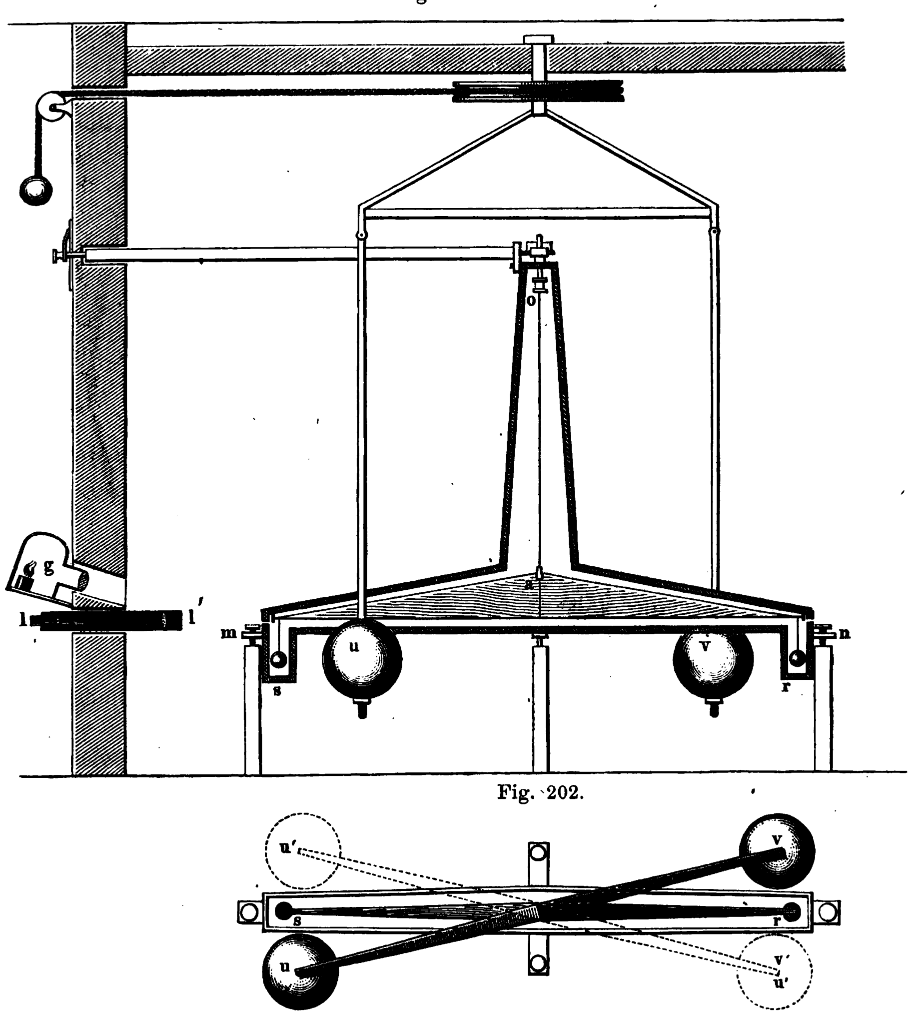


Fig. 202.

Mittelpunkten beider kleinen Kugeln. In diesen Stellungen mussten sich ihre wechselseitigen Einwirkungen aufheben, und der Wagebalken behauptete seine natürliche Gleichgewichtslage oder trat doch nach einer Reihe von Schwingungen in dieselbe zurück. Der Punkt der Theilung, auf welchen der Faden des Fernrohres nach dem Eintritte der Ruhe hinwies, wurde aufgezeichnet. Mit grösserer Sicherheit jedoch liess sich dieser Punkt aus Schwingungsbeobachtungen, ähnlich wie bei dem

Schwerependel ableiten, denn das Torsionspendel in Folge seiner ausserordentlichen Beweglichkeit kam kaum jemals zur vollkommenen Ruhe. Die unmittelbare Bestimmung des neutralen Punktes konnte aber auch ganz umgangen werden, wenn man die grossen Bleimassen abwechselnd in die beiden Stellungen führte, von welchen in Fig. 202 die eine ausgezeichnet, die andere aber nur durch Punctirung angedeutet ist. Es ist einleuchtend, dass bei diesem Verfahren der Zeiger der Torsionswage das eine Mal ebenso weit rechts als das andere Mal links von der Ruhelage abgelenkt werden muss. Die Hälfte des zwischen beiden Beobachtungen liegenden Bogenstückes giebt also die Grösse des wirklichen Ablenkungsbogens $r\varphi$.

Der Apparat Bailly's unterscheidet sich von dem beschriebenen hauptsächlich dadurch, dass die grossen Kugeln, anstatt von der Decke herabzuhängen, von einem auf dem Boden stehenden um eine Axe drehbaren Gestell getragen wurden, während die Drehwage mit den kleinen Kugeln von der Decke herabhing. Die Bewegung des Torsionsbalkens wurde von Reich sowohl wie von Bailly nach der bekannten Methode von Gaus mit Spiegel und Fernrohr gemessen.

Der von Bailly gewählte Torsionsfaden hatte 60 engl. Zoll Länge. Der Abstand der beiden kleinen Kugeln von einander betrug 80 Zoll. Das Gewicht der verschiedenen von ihm gewählten Kugeln von Blei, Kupfer, Platin, Glas, Elfenbein und anderen Stoffen schwankte zwischen 0,25 bis 3,39 Pfund (*avoir du poids*). Dagegen wog der Wagebalken nur $^1/_3$ Pfund. Die beiden grossen Massen wogen zusammen 761 engl. Pfund.

246 **Wage.** In der Form als Wage bildet das Pendel das gewöhnliche Hülfsmittel zur Bestimmung der Körpergewichte. Es dient zu diesem Zwecke im täglichen Verkehr, im Handel und in den Gewerben, gleich wie bei den feinsten Untersuchungen des Naturforschers. Um so mannigfaltigen Anforderungen genügen zu können, sieht man sehr verschiedene Arten von Wagen im Gebrauche. Die wesentlichen Bedingungen ihrer Güte und Verlässlichkeit sind jedoch für alle gleich.

Bei jeder Wage hat man zunächst drei Hauptabtheilungen zu unterscheiden. Eine feste Unterlage als Stütze für die Wagaxe, den Wagebalken und die Schalen.

Der Wagebalken ist ein doppelarmiger Hebel, an dessen Angriffsstellen die Schalen, die Träger der Last und der mit dieser ins Gleichgewicht zu setzenden Gewichtssteine anhängen.

Je nachdem die beiden Hebelarme gleiche oder ungleiche Länge besitzen, entsteht die gleicharmige oder die ungleicharmige Wage.

Die Wage als Ganzes bildet ein zusammengesetztes Pendel. Sei sie belastet oder unbelastet, so beginnt sie, aus der Ruhelage gebracht, zu oscilliren und kommt erst nach einer Reihe von Schwingungen in die ihrer Beschaffenheit entsprechende Ruhelage zurück. Um diese letztere

genau immer wieder einnehmen zu können, darf die Wage während ihrer Hin- und Herbewegungen keine oder doch nur eine äusserst geringe Reibung erfahren. Man nähert sich dieser Bedingung durch völlige Ausschliessung der gleitenden Reibung, indem man der Axe eine harte und ebene Unterlage giebt, sowie durch möglichste Verminderung des Reibungsmomentes. Zur Erreichung des letztern Zweckes wählt man als Axe die eine Kante eines dreiseitigen Stahlprismas von 60° Neigung der Seiten. Liesse sich diese Kante bis zur Gränze einer mathematischen Linie zuschärfen, so würde kein Reibungsmoment entstehen können, ohne dass gleichwohl die Festigkeit der Unterstützung gefährdet wäre. Bei den feinsten chemischen Wagen sucht man in der That dieser Gränze so nahe wie möglich zu kommen. Soll jedoch die Wage zur Abwägung grösserer Lasten benutzt werden, so pflegt man die Prismakante ein wenig abzurunden, weil schneidige Kanten unter einem bedeutenden Drucke sich sehr bald abnutzen. Für solche Wagen genügt als Unterlage eine Pfanne mit sehr flacher Krümmung, welche den Vortheil bietet, eine seitliche Verschiebung zu hindern, und doch an der Stelle, wo die Axe ruht, als ebene Fläche angesehen werden kann.

Jede der Schalen für sich genommen bildet wieder ein Pendel und kann als solches um seinen Aufhängepunkt oscilliren. Die Bedingung der Unveränderlichkeit des Hebelverhältnisses (bei der Gleichwage z. B. der Gleicharmigkeit) erheischt, dass der Schwerpunkt einer Schale sammt Belastung nach eingetretener Ruhe genau senkrecht unter dem Aufhängepunkte liege. Jede Schale muss daher um ihre Stütze die äusserste Beweglichkeit besitzen und ihr Aufhängesystem folglich mit derselben Sorgfalt wie das der Hauptaxe ausgeführt sein.

Bei den besseren Wagen hängen daher auch die Schalen auf prismatischen Stahlschneiden, welche zu einem Winkel von 30 bis 40° zugeschärft sind.

Diese beiden Schneiden müssen mit der Hauptaxe genau parallel gerichtet sein. Alle drei sollen, wenn die Wage ruht, ein und derselben wagerechten Ebene angehören. Bei der Gleichwage insbesondere müssen die äusseren Schneiden von der mittelsten genau gleichweit entfernt liegen.

Um die wagerechte Stellung des Wagebalkens, sowie die Grösse seiner Ausschläge sicher immer wieder zu erkennen, ist es üblich, aus der Mitte des Wagebalkens einen damit verbundenen und auf der geraden Verbindungslinie der drei Axen senkrecht stehenden Zeiger (die Zunge) sich erheben oder herabgehen zu lassen. Seine Spitze zeigt in der Ruhelage der Wage auf einen festen mit dem Träger verbundenen Punkt oder Theilstrich. Wenn sich, wie es bei den feineren Wagen stets der Fall ist, rechts und links von diesem Punkte ein Gradebogen erstreckt, so kann man bei jeder Oscillation nach der einen oder andern Seite die Grösse des Ausschlags messen. Derselbe muss, hinlängliche Beweglich-

keit der Wage und kleine Schwingungsbögen vorausgesetzt, sobald Gleichgewicht eingetreten ist, nach beiden Seiten hin gleich gross sein.

Eine gute Wage muss mit genügender Haltbarkeit Richtigkeit der Anzeigen und Empfindlichkeit verbinden.

Sie ist haltbar, wenn bei der grössten Belastung, für welche sie bestimmt ist, der Balken keine merkliche Biegung erfährt. Mit Rücksicht auf diese Bedingung muss also der Wagebalken je nach der Beschaffenheit des Stoffes, woraus er verfertigt wird, die nöthige Stärke erhalten.

Die zum Gebrauche im Handel und in den Gewerben bestimmten Wagen werden gewöhnlich aus Eisen ausgeführt. Die feinsten Wagen des Chemikers sind fast ausschliesslich aus Messing verfertigt und übergüldet.

Richtig ist eine Wage, so lange sie belastet wie unbelastet für dasselbe Uebergewicht stets auch denselben Ausschlag giebt. Bei der Gleichwage insbesondere muss deren Balken ohne anhängende Schalen mit den Schalen und nach Verwechslung derselben immer mit gleicher Sicherheit in seine horizontale Stellung zurücktreten.

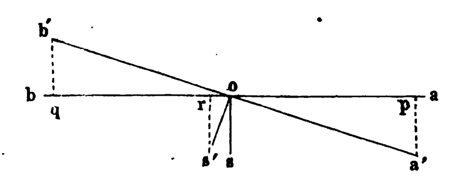
Empfindlichkeit in hinreichendem Maasse besitzt eine Wage, wenn die kleinsten bei den Abwägungen gebrauchten Gewichtstheile, als Uebergewicht, einen Ausschlag von sehr bemerkbarer Grösse bewirken. Der Grad der Empfindlichkeit beruht theils auf den Grundsätzen, wonach, theils aber auch auf der Genauigkeit und Sorgfalt, womit sie ausgeführt ist. Nur die ersteren können den Gegenstand einer wissenschaftlichen Erörterung bilden.

247 Wenden wir unsere Aufmerksamkeit zunächst auf die am häufigsten gebrauchte, die gleicharmige Wage. Denken wir uns für einen Augenblick eine solche Wage in der Art fehlerhaft gebaut, dass ihr Schwerpunkt in die Drehaxe selbst fällt. Sie würde in diesem Falle eine bestimmte Gleichgewichtslage nicht annehmen, als Pendel nicht schwingen können. Wird alsdann ein kleines Gewicht unterhalb des Stützpunktes angebracht, etwa in Form einer Hülse, die auf der Zunge verschiebbar ist, so kann sie forthin nur in einer einzigen Lage zur Ruhe kommen, in der nämlich, in welcher der Schwerpunkt des zugefügten Gewichtes, des Schwingungsgewichtes, lothrecht unter dem Stützpunkte liegt.

Der grösste Theil der Masse einer jeden gleicharmigen Wage ist, ähnlich wie in dem angenommenen Falle, um den Stützpunkt herum gleichförmig vertheilt, so dass immer nur ein verhältnissmässig sehr kleiner Theil ihres Gewichtes als Schwingungsgewicht, d. h. als das Bedingende für die Hin- und Herbewegungen und die endliche Herstellung einer bestimmten Ruhelage angesehen werden kann. Dies gilt bei richtiger Construction mit gleichem Rechte für die belastete wie für die unbelastete Wage.

Man kann sich das Gesammtgewicht einer Schale mit Ladung in deren schneidiger Axe concentrirt denken; für den Fall des Gleichgewichtes, und wenn die drei Schneiden in derselben Ebene liegen und gleichlaufend sind, muss folglich der Mittelpunkt des von beiden Schalen gemeinschaftlich ausgeübten Druckes in die Hauptaxe fallen. Die Grösse der Belastung ist daher ohne Einfluss auf diejenige des Schwingungsgewichtes. D. h. dessen Grösse und Abstand von der Drehaxe verändert sich nicht, wenn die Ladung eine Aenderung erfährt.

Fig. 203.



Es sei p das Schwingungsgewicht, $os = s$ (Fig. 203) sein senkrechter Abstand von dem Stützpunkte während der Ruhelage, ferner $oa = ob = a$ die Länge eines Wagearmes, d. h. des Abstandes einer äussern Schneide von der mittelsten. Gelangt der Wagebalken aus der Lage aob in die Lage $a'ob'$, indem er den Winkel $\varphi = aoa'$ beschreibt, so kommt der Punkt a nach a', b nach b' und s nach s'. Der Hebelarm oa verwandelt sich dadurch in $op = a \cos\varphi$, der Hebelarm ob in $oq = a \cos\varphi$. Die Gleichheit der Hebelarme, oder wenn sie ungleich waren, ihr Verhältniss bleibt also unverändert. Da aber das Schwingungsgewicht nach s' versetzt worden ist, folglich ein Moment $or \,.\, p = p \,.\, s \sin\varphi$ erhalten hat, so ist dennoch das Gleichgewicht gestört; und die Wage beginnt zu schwingen.

Gesetzt, die bei a angehängte Schale hatte eine Ladung P, die andere eine Ladung Q empfangen, so dass P grösser ist als Q, so lässt sich dieses Verhältniss, wenn nach eingetretener Ruhe der Ausschlag $aoa' = sos' = \varphi$ entstanden ist, durch die Gleichung ausdrücken

$$P \,.\, a \,.\, \cos\varphi = Q \,.\, a \,.\, \cos\varphi + p \,.\, s \,.\, \sin\varphi.$$

Es ist daher

$$Q.a.\cos\varphi + (P - Q)\,a.\cos\varphi = Q.a.\cos\varphi + p.s.\sin\varphi,$$

folglich

$$(P - Q)\, a \cos\varphi = ps \sin\varphi$$

und

$$P - Q = \frac{ps}{a}\, tng\, \varphi, \quad \text{oder auch} \quad tng\, \varphi = \frac{a\,(P - Q)}{p \,.\, s}.$$

Der Unterschied $P - Q$ bezeichnet das Uebergewicht, welches den Ausschlag bewirkt hat. Je bedeutender der letztere für ein gegebenes Uebergewicht, eine um so grössere Empfindlichkeit besitzt die Wage. Beschränkt man sich auf Ausschläge von sehr mässiger Grösse, und dies ist die Regel, so fällt $tng\,\varphi$ fast mit der Bogengrösse φ zusammen, und man erhält die für das Verständniss und den Gebrauch der Wage wichtigen Annäherungsgleichungen

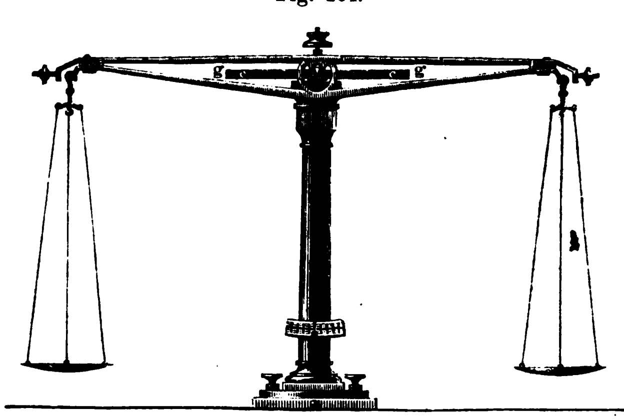
$$P - Q = \frac{p \,.\, s}{a}\,\varphi \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{a}{p \,.\, s}\,(P - Q).$$

Die eine sagt: dass das aufgelegte Uebergewicht der Grösse des Ausschlages proportional ist, dass folglich derjenige, der sich die Mühe gegeben hat, die Eigenthümlichkeit seiner Wage mit Aufmerksamkeit zu studiren, im Stande ist, schon aus der Grösse des nach eingetretener Ruhe bleibenden Ausschlages zu beurtheilen, wie viel ein noch vorhandener sehr kleiner Unterschied zwischen P und Q beträgt.

Die zweite Gleichung $\varphi = \frac{a}{p \,.\, s}\,(P - Q)$ belehrt uns, dass der durch ein gegebenes Uebergewicht erzeugte Ausschlag, also die Empfindlichkeit, verhältnissmässig mit der Länge $2\,a$ des Wagebalkens zunimmt und ferner dadurch vergrössert werden kann, dass man das Product $p \,.\, s$, erhalten durch Multiplication des Schwingungsgewichtes mit dessen Abstand von der Axe, so klein wie möglich macht.

An den feinen Wagen, deren sich der Physiker und Chemiker bedient, erblickt man in der Mitte der Länge des Wagebalkens oberhalb der Axe und senkrecht gegen ihre Längenrichtung (Fig. 204) eine

Fig. 204.



Schraube mit sehr flachen Gängen, an welcher sich ein Schraubenkopf auf- und niederbewegen lässt. Es ist einleuchtend, dass durch das Heben dieses Schraubenkopfes zugleich der Schwerpunkt der Wage gehoben wird; und zwar kann dies bis zum Zusammenfallen desselben mit der Axe geschehen. Dadurch ist also die Möglichkeit gewährt, das Moment $p \,.\, s$ beliebig zu vermindern, somit die Empfindlichkeit der Wage bis zu jeder Gränze, welche der nie ganz zu vermeidende Reibungswiderstand zulässt, zu steigern.

Wie schon bemerkt worden, ist in der Formel ausgedrückt, dass die Empfindlichkeit der Wage auch durch Vergrösserung der Länge des

Wagebalkens vermehrt werden könne. Und wirklich werden aus diesem Grunde noch in den meisten Lehrbüchern Wagen mit langen Hebelarmen empfohlen. Allein wenn auch bei einseitig theoretischer Auffassung lange Wagebalken einen kleinen Vortheil zu bieten scheinen, so stellt sich doch die Sache in der Ausführung ganz anders heraus. Zunächst bemerke man, dass die Verlängerung des Wagebalkens keinen Nutzen bringt, der sich nicht auch durch die vorher erwähnte Schraube, und zwar in einfacherer und weniger kostspieligen Weise erzielen liesse. Aus der folgenden Erörterung wird sich ferner ergeben, dass der scheinbare Vortheil des langen Wagebalkens nur durch anderweitige Nachtheile erkauft wird.

Die Wage in ihrer Eigenschaft als Pendel gehorcht dem durch die Formel $t = \pi \sqrt{\frac{M}{g \cdot p \cdot s}}$ ausgedrückten Gesetze (Nro. 234). Es bedeutet hier M das Trägheitsmoment, $p \cdot s$ das statische Moment der Wage, also $\frac{M}{ps} = l$ ihre Pendellänge. Sie schwingt um so langsamer, je grösser ihr Trägheitsmoment wird und je kleiner ihr statisches Moment. Letzteres ist, wie wir gesehen haben, bei richtig gebauten Wagen eine beständige Grösse und identisch mit dem Producte aus dem Schwingungsgewichte, multiplicirt mit dessen Abstand von der Drehaxe. Daraus geht hervor, dass mit der Empfindlichkeit einer Wage auch ihre Schwingungsdauer zunimmt. Weil nun sehr langsame Schwingungen bei dem Gebrauche der Wage lästig sind, so ist es angesagt, sich nach Mitteln umzusehen, die Dauer derselben abzukürzen. Zu diesem Zwecke giebt es aber, sobald von einem gewissen Grade der Empfindlichkeit, der durch die Grösse des Momentes $p \cdot s$ bestimmt ist, nicht weiter abgegangen werden kann, keine andere Hülfe, als möglichste Verminderung des Trägheitsmomentes M.

Die Grösse dieses letztern hängt ab von der Grösse der Wagenmasse und deren Vertheilungsweise um den Stützpunkt herum, dann von der Grösse der Belastung.

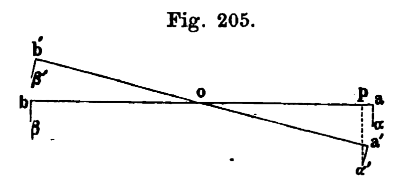
Um dem Wagebalken genügende Steifigkeit verleihen zu können, muss man demselben eine von den äusseren zu der mittelsten Schneide zunehmende Dicke geben. Damit indessen der Druck auf die Axe und die davon abhängige Reibung möglichst vermindert werde, pflegt man den innern Theil der Masse des Balkens, der zu der Festigkeit des Ganzen erfahrungsmässig nur wenig beiträgt, grösstentheils auszuschneiden (siehe Fig. 204). Natürlich wird dadurch zugleich auch das Trägheitsmoment vermindert.

Den bedeutendsten Einfluss auf dieses haben indessen die Schalen und deren Belastung, weil sie sich im weitesten Abstande von der Axe befinden, in der Art, dass eine Verkürzung des Wagebalkens auf die Hälfte seiner Länge auch die Schwingungsdauer nahe um die Hälfte

verkürzt. Der hierdurch errungene Vortheil ist aber noch bedeutend dadurch vergrössert, dass der kürzere Wagebalken, für die Bedingung gleicher Festigkeit und Steifigkeit, leichter gebaut werden kann und dann auch eine geringere Reibung erzeugt. Ist aber die Reibung in Folge der Feinheit in der Ausführung der Wage an sich schon unbeachtenswerth, so kann man dem kürzern Wagebalken, ohne das gestattete Gewicht zu vergrössern, eine viel grössere Stärke geben und dadurch ohne Gefahr für ihre Empfindlichkeit den Umfang der Tragungsfähigkeit der Wage bedeutend vergrössern *).

Die Tragungsfähigkeit einer Wage ist nämlich durch die Stärke des Wagebalkens bedingt. Letzterer darf durch die angehängten Gewichte nicht merklich gebogen werden. Gesetzt, eine Biegung habe gleichwohl stattgefunden; die Schneide a (Fig. 205) habe sich dadurch bis zu α, die Schneide b bis zu β gesenkt.

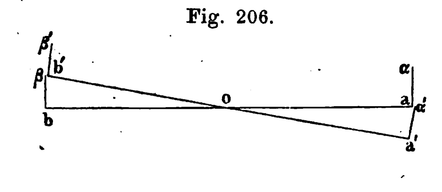
Fig. 205.



Die gerade Verbindungslinie der beiden äusseren Axen geht dann nicht mehr durch die Hauptaxe und der Mittelpunkt des von den Schalen und ihren Belastungen ausgeübten Druckes fällt nicht mehr in den Stützpunkt o, sondern liegt unter diesem Punkte. Die Wage erhält dadurch ein neues Schwingungsgewicht, dessen Moment sich zu dem früher vorhandenen addirt. Die Empfindlichkeit nimmt ab. Zugleich verliert die Wage, deren äussere Schneiden sich gesenkt haben, an ihrer Richtigkeit; die gleicharmige Wage, sowie ein Ausschlag erfolgt ist, hört auf gleicharmig zu sein. Ein Blick auf die Figur belehrt sogleich, dass der Hebelarm der niedergehenden Schale kürzer wird als $a \, . \cos \varphi$, dahingegen derjenige der aufgehenden Schale sich vergrössert.

Es ist selbstverständlich, dass jede Wage, deren äussere Schneiden gleich anfangs tiefer liegen als die mittelste, an demselben Fehler leidet. Die Stützpunkte der Schalen dürfen aber auch nicht höher liegen als die Hauptaxe. Befinden sie sich während der Gleichgewichtsstellung der Wage, in Folge fehlerhafter Construction, über der durch den Stützpunkt o (Fig. 206) geführten Horizontalen, wär z. B. die eine der äusseren Schneiden in α anstatt in a, die andere in β anstatt in b angebracht worden, so vergrössert sich bei erfolgendem Ausschlage der Hebelarm der sinkenden Schale, während der der steigenden kürzer wird. Denn der

Fig. 206.



*) Die anerkannte Güte der von dem Universitäts-Mechanikus Jung in Giessen ausgeführten Wagen beruhen nicht zum geringsten Theile auf der richtigen Würdigung dieses Umstandes.

erstere, wenn man jetzt $o\alpha = o\beta = a$ setzt, wird $a \cos (a o \alpha - \alpha' o \alpha)$, der andere $a \cos (b o \beta + \beta' o \beta) = a \cos (a o \alpha' + a o \alpha)$. Eine solche Wage ist also ebenfalls nur in der wagerechten Stellung gleicharmig. Man erkennt diesen Fehler sehr leicht daran, dass eine damit behaftete Wage bei zunehmender Belastung empfindlicher wird und endlich nach der einen oder andern Seite überschlägt, selbst dann, wenn beide Schalen mit genau gleichen Gewichten beladen sind. Der Grund ist, weil der gemeinschaftliche Schwerpunkt der belasteten Schalen, welcher in der geraden Verbindungslinie der äusseren Schneiden und in dem angenommenen Fall über der Hauptaxe liegt, bei zunehmender Belastung allmälig über den Schwerpunkt des Schwingungsgewichtes und endlich selbst über den Stützpunkt o so weit gehoben wird, dass die Wage ihre Fähigkeit verliert zu oscilliren. Es kann in diesem Falle sogar geschehen, dass die geringer beladene Schale, wenn dieselbe niedergedrückt wird, diese Senkung beibehält, so dass es für den Unkundigen den Anschein gewinnt, als befände sich auf dieser Seite ein Uebergewicht.

Man wird jetzt verstehen, warum bei einer guten und richtigen Wage die Bedingung, dass die Axen der Schalen mit der Hauptaxe in derselben Ebene liegen sollen, aufs Strengste eingehalten werden muss; sowie dass nur so lange als derselben Genüge geschieht, die Empfindlichkeit eine constante bleiben und nach Bedürfniss im Voraus festgesetzt werden kann.

Das Zeichen des hergestellten Gleichgewichtes ist, wie schon hervorgehoben worden: dass der Zeiger der Wage auf der Mitte oder dem Nullpunkt des Gradbogens einspielt. Häufig kommt aber der Zeiger (die Zunge) erst nach einer langen Reihe von Schwingungen zur Ruhe; es ist daher mit Rücksicht auf Zeitersparung von Wichtigkeit, die Grösse eines etwa noch vorhandenen Uebergewichtes schon aus der Grösse des Ausschlages beurtheilen zu können. Diese Beurtheilung kann aber nur so lange zu einem brauchbaren Resultate führen, als das Moment des Schwingungsgewichtes seine Unveränderlichkeit behauptet.

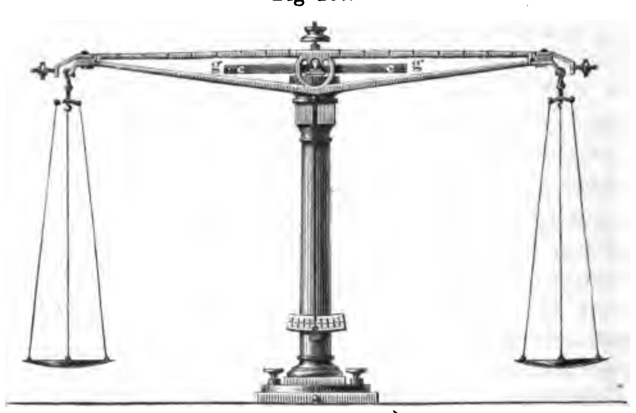
Die Bedingung der Unveränderlichkeit des Schwingungsgewichtes ist bei den feineren Wagen, deren sich der Naturforscher bedient, von ungleich grösserer Wichtigkeit als die Gleicharmigkeit. Denn sollte die letztere auch nicht zutreffen, so lassen sich gleichwohl mittelst einer, wenn sonst nur genügend empfindlichen Wage nach dem Verfahren der doppelten Wägungen sehr genaue Gewichtsbestimmungen ausführen. Man beginnt damit, den Körper, dessen Gewicht ermittelt werden soll, auf die gewöhnliche Weise abzuwägen, oder auch an Stelle der Gewichtssteine beliebige Messingstücke, Schrotkörner, Drahtabschnitte und dergleichen (Tara) in die Schale bis zur Herstellung des Gleichgewichtes einzutragen; sodann wird der Körper aus seiner Schale genommen und durch richtige Gewichte bis zum abermaligen Eintritt des Gleichgewichtes ersetzt.

Um die Grösse des Ausschlages zu erkennen, ist es übrigens keineswegs nothwendig, den endlichen Eintritt der Ruhelage abzuwarten. Der Versuch wird bedeutend abgekürzt, und darum nicht weniger genau, wenn man den Ausschlag aus den Schwingungsweiten selbst ableitet. Man notirt z. B. zu irgend einem Zeitpunkte den Zahlenwerth der äussersten Elongation links, dann ebenso die Elongation rechts und wieder links. Es ist anzunehmen, dass in Folge der Bewegungshindernisse die nächst späteren Elongationen immer etwas geringer ausfallen als ihre Vorgänger. Die erste Notirung wird demnach muthmaasslich etwas mehr, die dritte etwas weniger betragen als die zweite, also das Mittel der ersten und dritten mit grosser Wahrscheinlichkeit ebenso weit links, als die zweite rechts von der Ruhestellung des Zeigers entfernt liegen. Das arithmetische Mittel der zweiten und des Mittels der ersten und dritten Ablesung giebt folglich den wahrscheinlichen Werth des Ausschlages. Zur grössern Sicherheit kann man dieses Verfahren wiederholen, und dann das Mittel sämmtlicher Beobachtungen nehmen.

Dieses Schwingungsverfahren in geübten Händen ist der gewöhnlichen Weise des Abwägens vorzuziehen, weil es die gewonnenen Resultate von den Störungen durch die Reibung unabhängig macht. Es ist einleuchtend, dass man sich auf demselben Wege auch überzeugen kann, ob das Gleichgewicht wirklich hergestellt ist, und ob der Zeiger ganz genau auf Null einspielt.

Die in Fig. 207 abgebildete Wage ist für die feinsten Wägungsversuche berechnet. Ihre scharfkantige Stahlaxe ruht während des Ge-

Fig 207.



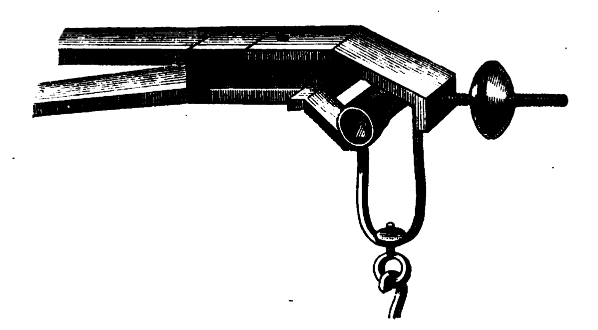
brauches auf zwei Achatplatten, zwischen welchen der Wagebalken schwebt. Sie bilden Stücke derselben wagerechten Ebene und sind mit der Säule, die als Träger des Instrumentes dient, unverrückbar fest verbunden. Diese feste Unterlage ist von einem auf- und niederbeweglichen Rahmen umgeben, der mit einer Stange im Innern der Säule zusammenhängt, mittelst eines excentrischen im Fusse der Säule angebrachten

Rades gehoben werden kann, und durch eine schraubenförmig gewundene die Stange umgebende Feder einem fortdauernden Druck nach unten unterworfen ist. In dem Rahmen befinden sich, senkrecht unter den beiden Enden der Stahlschneide, zwei Ausschnitte, geeignet, um, wenn man den Rahmen hebt, die prismatische Stahlaxe aufzunehmen und von ihrer Achatunterlage abzuheben. Zu gleicher Zeit greifen die Arme *c c* eines Querstückes *g g*, das mit dem Rahmen zusammenhängt, unter entsprechende Stellen des Wagebalkens, wodurch dieser festgestellt wird.

Um in gleicher Weise auch die Axen der Schalen vor zu rascher Abnutzung zu schützen, pflegt man auf dem Brette unter jeder Schale einen auf und nieder verschiebbaren Träger anzubringen. Beide Träger endigen in wagerechte gepolsterte Platten, welche, wenn sie gehoben werden, gegen die untere Fläche der Schalen drücken. Ihre Bewegung geschieht durch dasselbe Triebwerk, welches den Rahmen hebt, und zwar so, dass sie etwas früher beginnt, als die des letztern. Dadurch ist es auch möglich, ohne die Hauptaxe zu bewegen, die Schwankungen der Schalen, so oft es nöthig erscheint, zur Ruhe zu bringen. Diese Vorsorge ist aber, um richtig wiegen zu können, absolut nothwendig, denn so lange die Schalen um ihre eigenen Axen oscilliren, verändern sich ihre Hebelarme fortwährend.

Die Haken, woran die Schalen aufgehängt werden, sind gleich den prismatischen Axen, auf welchen sie sitzen, gewöhnlich aus Stahl verfer-

Fig. 208.



tigt (Fig. 207). Haken aus Achat, gleich den (Fig. 208) abgebildeten, sind jedoch in Betracht ihrer grössern Dauerhaftigkeit weit vorzuziehen. Es ist vortheilhaft, denselben eine beträchtliche Breite zu geben, damit das Gewicht der Schale sich auf mehrere Punkte vertheilen kann; wodurch die Schneide weniger abgenutzt wird. Dasselbe gilt natürlich auch für stählerne Haken, wo man deren Gebrauch noch vorzieht.

Das genaue Richten der äusseren Schneiden ist indessen eine schwierige und zeitraubende Arbeit. Es kommen aus diesem Grunde viele Wagen in Gebrauch, bei welchen die Schalen nur an einem einzigen

Punkte aufgehängt sind. Solche Wagen sind jedoch nur zum Zwecke des Abwägens sehr geringer Belastungen zu empfehlen.

Der durchbrochene Wagebalken hängt nicht unmittelbar über der Säule, sondern an einem Querstücke, das vom obern Ende derselben horizontal hervortritt. Nur bei dieser Anordnung kann der Zeiger (Zunge) unmittelbar an dem Wagebalken angeschraubt werden, was mit Rücksicht auf eine gleichförmige Vertheilung des Gewichtes der Wage um ihre Axe herum wünschenswerth ist.

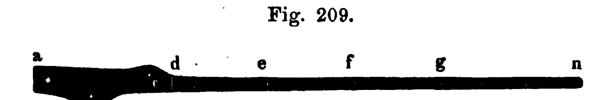
Die Länge des Wagebalkens zwischen den Aufhängepunkten der Schalen beträgt 32 Centimeter, die des Zeigers von der Axe an gerechnet 20 Centimeter.

Jeder der beiden Arme ist von der mittelsten bis zur äussern Schneide in 100 gleiche Abtheilungen gebracht, die durch Theilstriche an dem Wagebalken bemerkt sind. Man ist hierdurch in den Stand gesetzt, mit dem kleinsten vorhandenen Gewichte, wenn dieses aus dünnem Draht in Form eines Reuters gebildet ist und sich bequem hin- und herschieben lässt, Gewichtsunterschiede bis zu $^1/_{100}$ festzustellen. Hält das Reutergewicht z. B. 10 Milligramm und musste dasselbe zur Herstellung des Gleichgewichtes auf den Theilstrich 63 geschoben werden, so ist es gerade so, als habe man zu den Gewichten 6,3 Milligramm zugelegt.

Das Brett, worauf die Wage steht, ist mit drei Stellschrauben versehen, zwei auf der vordern Seite, eine hinten. Sie dienen, die Säule mittelst eines daran hängenden Pendels senkrecht und dadurch die Ebene der drei Schneiden, welche mit derjenigen der Achatplatten zusammenfällt, wagerecht stellen zu können. Ein Glasgehäuse verhindert während der Benutzung den störenden Einfluss der Luftbewegungen und zu allen Zeiten den Zutritt von Staub und Feuchtigkeit.

248 Als Beispiel einer ungleicharmigen Wage mag hier die Beschreibung der **Schnellwage** (römische Wage) eine Stelle finden. Die Fig. 209 giebt einen Durchschnitt ihres Wagebalkens. Ihr Stützpunkt liegt in *c*;

Fig. 209.



an der bei *a* aufwärts gerichteten Schneide hängt die Schale. Die beiden Schneiden *a* und *c* fallen in die durch die Linie *dn* bezeichnete Ebene. Eine dritte Schneide in gleicher Höhe befindet sich an einem Schieber, welcher der Ebene *dn* entlang beweglich ist. Er ist bestimmt, ein Gewicht (das Laufgewicht) daran anzuhängen. Angenommen, das letztere an die Stelle *d* gerückt, hält der leeren Schale das Gleichgewicht, so muss es, um einem dem seinigen gleichen Gewichte in der Schale das Gleichgewicht halten zu können, von *d* nach *e* vorgeschoben werden, so

dass $de = ac$. Denn das statische Moment des Laufgewichtes $P \,.\, ce$, welches hierdurch erhalten wird, ist nichts anderes als das frühere Moment $P \,.\, cd$, das dem Momente der leeren Schale entsprach, vermehrt um das Moment $P \,.\, ac = P \,.\, dc$ der Ladung. Theilt man demgemäss die Stange dn in die gleichen Abschnitte $de = ef = fg$ etc., so wird das Laufgewicht in der Stellung f einer Ladung $2\,P$, in der Stellung g einer Ladung $3\,P$ etc. entsprechen.

Betrüge z. B. mit Einschluss des Schiebers $P = 5$ Pfund und hätte man jeden der gleichen Abschnitte $de = ef$ etc. in fünf gleiche Unterabtheilungen gebracht, so würde ein Vorrücken des Laufgewichtes von d um je einen Theilstrich jedesmal eine Gewichtsvermehrung der Ladung von 1 Pfund andeuten. Hätte z. B. das Laufgewicht, um Gleichgewicht herzustellen, bis zu $12^1/_2$ vorgeschoben werden müssen, so wäre damit gesagt, dass die Ladung $12^1/_2$ Pfund wiegt.

Die Schnellwage ist gewöhnlich so eingerichtet, um darauf mit demselben Laufgewichte auch grössere Lasten abwiegen zu können. Man dreht zu diesem Zwecke ihren Wagebalken herum und macht die Schneide c' (Fig. 210) zum Stützpunkte, während die Schale nunmehr auf die Schneide a' gehängt wird. Gleichzeitig wird auch der Schieber umgedreht, der so eingerichtet ist, dass dann dessen Schneide gleichwie die Axen c' und a' in die gerade Linie $a'dn$ zu liegen kommen. Der lange Arm hat jetzt das Uebergewicht, aber ein in die Wagschale zugegebenes Gewicht, am besten das Laufgewicht selbst, wie wir hier annehmen wollen, stellt das Gleich-

Fig. 210



gewicht wieder her. Hängt man hierauf das Laufgewicht an den Punkt d (Fig. 210), so gewählt, dass z. B. $dc' = 3\,a'c'$, so bedarf man zur Erhaltung des Gleichgewichtes in der Schale einer Ladung $= 4\,P$, oder nach der Annahme, dass $P = 5$ Pfund, einer Ladung von 20 Pfund. Der Punkt e, wenn $de = a'c'$, entspricht dann 25 Pfund u. s. w.

Brückenwage. Zum Zwecke des Abwägens sehr grosser Lasten **249** von mehreren bis zu vielen Centnern sind die einfachen frei um ihre Axe schwingenden Wagen wenig geeignet, und über gewisse Gränzen hinaus wegen des auf eine geringe Anzahl Punkte angehäuften Druckes sogar unausführbar. Man hat in solchen Fällen das Auskunftsmittel ergriffen, nur einen proportionalen Theil der Ladung auf die Axe drücken zu lassen, während der Rest von der Erde unmittelbar getragen wird. Eine wegen der Zweckmässigkeit ihrer Anordnung sehr verbreitete Art einer solchen zusammengesetzten Wage ist die Quintenz'sche oder Strassburger Brückenwage. Fig. 211 (a. f. S.) giebt eine schematische

Darstellung und Fig. 212 eine Ansicht derselben. Bei *K*, *a* und *d* befinden sich prismatische Schneiden, von welchen *K* als Axe des Wagebalkens *B* dient, *d* mit dem Gerüste der Wage zusammenhängt und *a* auf dem

Fig. 211.

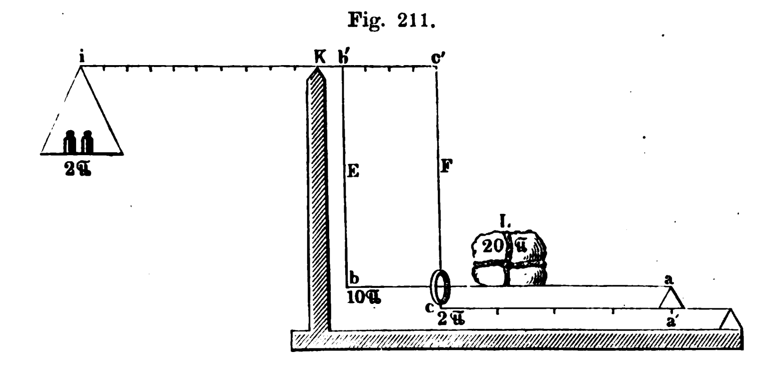
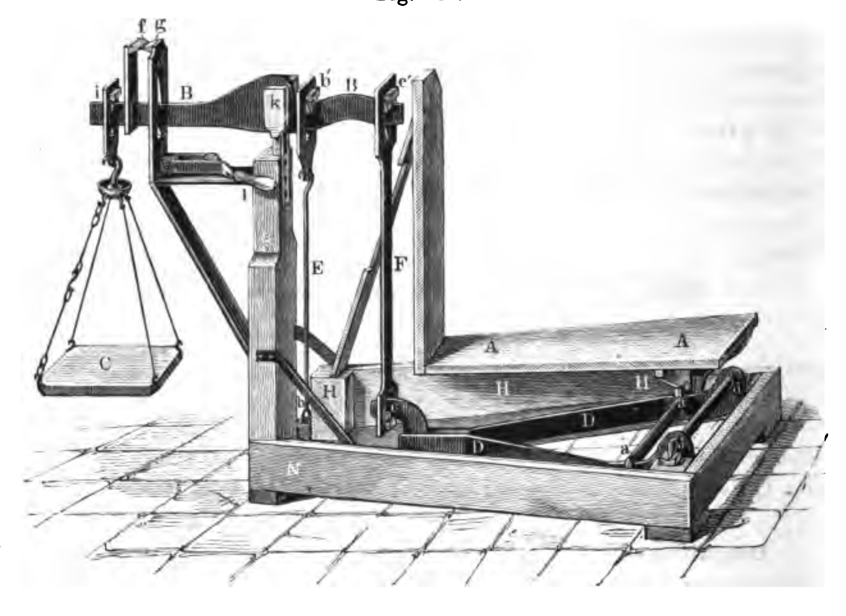


Fig. 212.



Hebel *D* festsitzt, welcher in *d* seinen Drehpunkt hat. Der Punkt *c* dieses Hebels ist mittelst der Stange *F* an dem Punkte *c'* des Wagebalkens angehängt. Die Verbindung ist nicht durch Gelenke, sondern durch Stahlschneiden und Pfannen bewerkstelligt, wie aus Fig. 212 deutlich zu erkennen. In ähnlicher Weise ist der Punkt *b* des Brettes *a b* in Fig. 211 oder *A A H* in Fig. 212 mit dem Punkte *b'* des Wagebalkens durch die Stange *E* verbunden. Dieses Brett, die Brücke, erscheint in

Fig. 212 theilweise weggeschnitten, um den Einblick in das Innere zu gestatten. Auf die Brücke und zwar auf beliebige Stelle derselben wird die abzuwägende Last L gebracht. Der Druck, welchen letztere ausübt, vertheilt sich auf die Punkte a und b. Es sei p der gegen a und q der gegen b wirkende Druck. Es ist dann

$$p + q = L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die Kraft p von a (Fig. 211) auf den Punkt a' sich fortpflanzend, erscheint bei c als ein Druck x, indem man setzt:

$$cd \,.\, x = da' : p.$$

Es folgt hieraus

$$x = p \frac{da'}{cd}.$$

Derselbe Druck pflanzt sich durch die Stange F bis zu dem Punkte c' des Wagebalkens fort.

Auf den Punkt b' desselben wirkt durch Vermittlung der Stange E ein Druck q.

Wenn zur Herstellung des Gleichgewichtes in die Schale ein Gewicht G gebracht werden muss, so ist

$$G.Ki = q.Kb' + x.Kc' = q.Kb' + p.\frac{da'}{cd}.Kc' \quad . \quad . \quad (2)$$

In der Einrichtung des Wagebalkens B ist nun, mit Beziehung auf den Hebel D die Bedingung eingeführt, dass

$$Kb' : Kc' = da' : cd,$$

dass folglich

$$Kb' = Kc' \frac{da'}{cd}.$$

Dieser Ausdruck in Gleichung (2) eingeführt, und mit Rücksicht auf (1) wird erhalten:

$$G.Ki = q.Kb' + p.Kb' = (q + p)\, Kb' = L.Kb',$$

oder auch

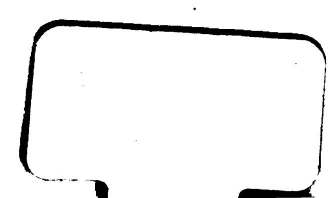
$$G = L \,.\, \frac{Kb'}{Ki}.$$

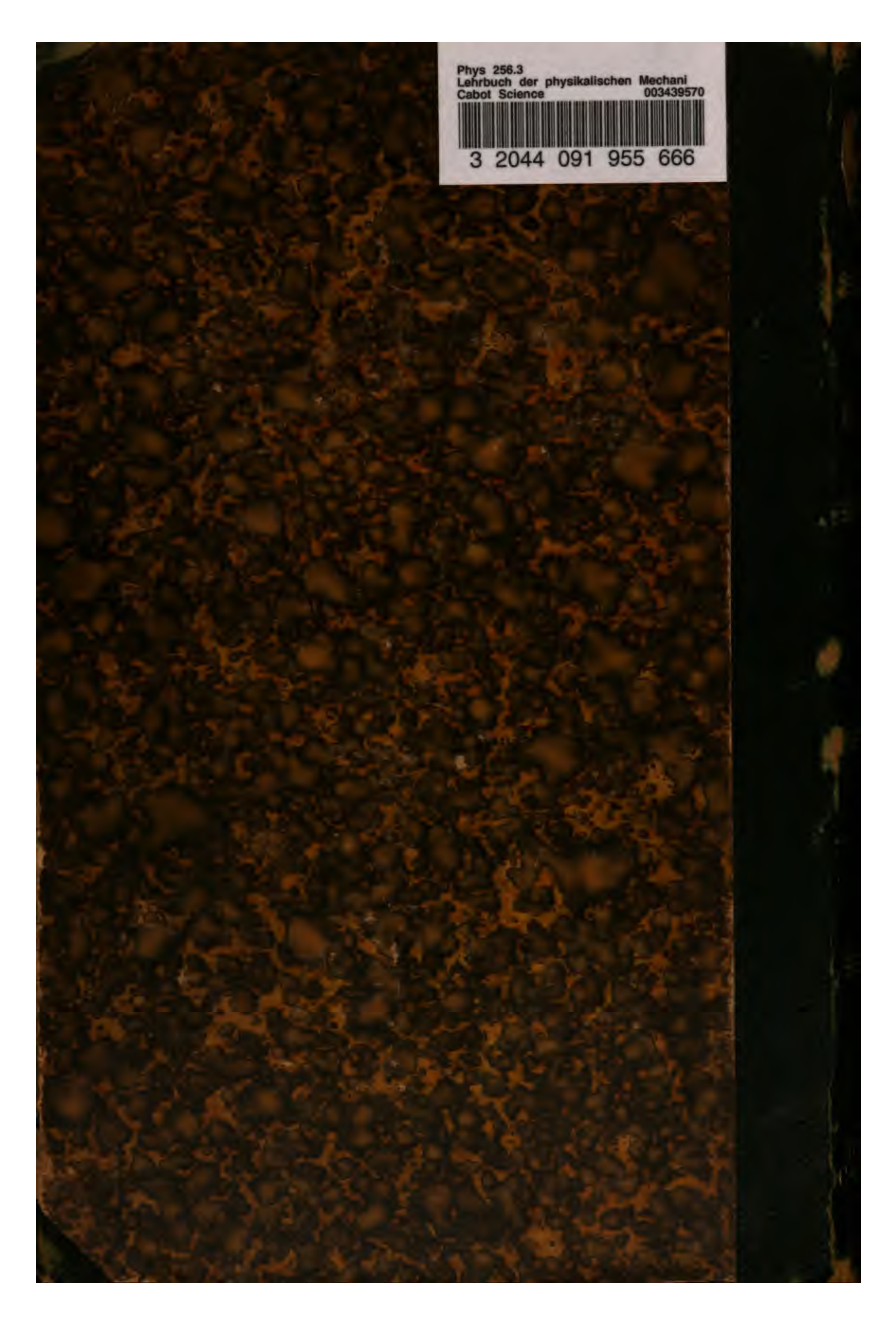
Da, wie man sieht, die Drücke p und q aus der Rechnung wieder verschwinden, indem sie sich bei genauer Einhaltung der gestellten Bedingung immer zu dem Drucke $p + q = L$ vereinigen, so ist es offenbar gleichgültig, an welche Stelle der Brücke zwischen den Punkten a und b die Last gelegt werden möge. Es hat daher auch nichts zu sagen, wenn dieselbe ganz nahe der Stütze oder Schneide a zu liegen kommt, vorausgesetzt nur, dass ihre Schwerlinie sich noch diesseits, d. h. zwischen den Punkten a und b befindet. Dadurch ist das Mittel gegeben, einen fast beliebig grossen Theil der abzuwägenden Ladung von der Hauptaxe K wegzunehmen und den Boden unmittelbar damit zu belasten. Es ist

einleuchtend, dass bei dieser Vorsichtsnahme nicht nur die Haltbarkeit der Wage, sondern auch ihre Empfindlichkeit vermehrt wird.

Gewöhnlich wird das Verhältniss $Kb' : Ki = 1 : 10$ gesetzt, so dass das in der Wagschale erforderliche Gewicht um der Last auf der Brücke das Gleichgewicht zu halten, nur den zehnten Theil derselben beträgt. Daher der Name Decimalwage.






Phys 256.3
Lehrbuch der physikalischen Mechani
Cabot Science 003439570
3 2044 091 955 666